

**Mémoire**

Présenté en vue d'obtenir

**L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Université Paul Sabatier, Toulouse 3

Spécialité :

**Mathématiques Appliquées**

par

**Marie - Hélène VIGNAL**

TITRE :

**Modélisation mathématique et schéma préservant  
l'asymptotique quasi-neutre pour décrire des  
plasmas et le transport de particules**

Soutenance prévue le 12 décembre 2007 devant le jury composé de

**François Bouchut, Rapporteur**, CNRS, École Normale Supérieure

**Yann Brenier, Rapporteur**, CNRS, Université de Nice-Sophia-Antipolis

**François Castella, Examineur**, Université de Rennes 1

**Thierry Colin, Examineur**, Université de Bordeaux 1

**Pierre Degond, Directeur de recherche**, CNRS, Université de Toulouse 3

**Thierry Gallouët, Examineur**, Université de Provence

**Mohamed Masmoudi, Examineur**, Université de Toulouse 3

**Eric Sonnendrücker, Examineur**, Université L. Pasteur de Strasbourg

Après avis de

**François Bouchut**, CNRS, École Normale Supérieure

**Yann Brenier**, CNRS, Université de Nice-Sophia-Antipolis

**Haïliang Liu**, Université de l'état de l'Iowa



# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Thèmes de recherche	5
1.2	Liste de publications	7
1.2.1	Articles ou comptes rendus de conférences tirés de la thèse	7
1.2.2	Notes postérieures à la thèse	7
1.2.3	Articles postérieurs à la thèse	8
1.2.4	Comptes rendus de conférences postérieurs à la thèse	9
<b>2</b>	<b>Résumé du travail de thèse : analyse numérique de schémas volumes finis</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Couplage de modèles pour un problème d'expansion de plasma</b>	<b>13</b>
3.1	Introduction	13
3.2	Contexte physique et modèle d'Euler-Poisson	15
3.3	Modèles asymptotiques unidimensionnels	16
3.3.1	Modèle asymptotique dans le faisceau	18
3.3.2	Modèle asymptotique dans le plasma et connexion à l'interface	18
3.4	Différentes formulations du modèle à courant non nul	25
3.5	Extension au cas d'Euler complet	30
3.6	Vers une modélisation bidimensionnelle	34
3.7	Conclusions et perspectives	37
<b>4</b>	<b>Schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre et problème de couche limite</b>	<b>39</b>
4.1	Introduction	39
4.2	Un schéma asymptotiquement consistant et stable dans la limite quasi-neutre pour le système d'Euler-Poisson	41
4.2.1	Le modèle d'Euler-Poisson et sa limite quasi-neutre	41
4.2.2	Les schémas classique et AP pour le modèle d'Euler-Poisson	42
4.2.3	Résultats numériques	44
4.3	Analyse numérique linéaire du schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre	47
4.3.1	Linéarisation et discrétisation du modèle un fluide Euler-Poisson	47
4.3.2	Stabilité du modèle linéarisé	50

4.4	Un problème de couche limite lié à la quasi-neutralité . . . . .	52
4.4.1	Le modèle bifluide Euler-Poisson . . . . .	53
4.4.2	Problèmes numériques reliés à la couche limite . . . . .	54
4.4.3	Résolution du problème de couche limite . . . . .	56
4.4.4	Résultats numériques avec des conditions aux limites préparées au régime quasi-neutre . . . . .	59
4.5	Conclusions et perspectives . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Modèles cinétiques pour le transport de particules . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1	Confinement de particules dans un puits de potentiel . . . . .	63
5.1.1	Modèle asymptotique de type énergie-transport . . . . .	64
5.1.2	Dérivation d'un modèle de type Boltzmann pour des particules confinées contre une paroi . . . . .	66
5.2	Transport de gouttes dans un gaz . . . . .	71
5.3	Conclusions et perspectives . . . . .	72
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>73</b>

## Chapitre 1

# Introduction

### 1.1 Thèmes de recherche

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire sont axés autour de trois grands thèmes : d'une part le couplage de modèles pour décrire des plasmas contenant à la fois des zones quasi-neutres et non quasi-neutres, d'autre part l'élaboration et l'analyse d'un schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre et enfin la modélisation du transport de particules chargées ou non.

Avant de détailler les trois thèmes principaux que je viens d'évoquer, je résume dans le deuxième chapitre de ce mémoire, les travaux que j'ai effectués pendant ma thèse. Ils concernent l'analyse numérique de schémas volumes finis pour des équations de type elliptique et hyperbolique avec un intérêt particulier pour les problèmes de conditions aux limites. Bien que les travaux que j'ai effectués depuis, n'ont pas de liens étroits avec les travaux contenus dans ma thèse, le savoir que j'ai acquis durant cette période m'a beaucoup guidée : tout d'abord sur les critères faisant d'un schéma volumes finis qu'il est un "bon schéma volumes finis" et surtout sur les problèmes de conditions aux limites qui restent pour moi un sujet d'un grand intérêt. De plus, j'ai suivi avec une attention particulière les avancées apportées dans ce domaine depuis cette période.

Le premier sujet de mes recherches concerne le couplage de modèles pour décrire l'expansion d'une bulle de plasma quasi-neutre dans l'espace séparant deux électrodes. Le plasma contenant des électrons et une seule espèce d'ions, est injecté à la cathode et se détend dans l'espace entre les deux électrodes. Au cours de son expansion, des électrons sont émis dans l'espace entre la bulle de plasma et l'anode. Ces électrons sont attirés par le potentiel positif de l'anode et forment un faisceau électronique dans le vide. Alors, dans le domaine, deux zones aux propriétés radicalement différentes, coexistent. La première zone est constituée de la bulle de plasma. Cette bulle est quasi-neutre, c'est-à-dire que les déséquilibres électriques ont lieu à une échelle en espace, nommée la longueur de Debye, très petite. La deuxième zone est constituée du faisceau électronique. Cette zone ne contient que des électrons et ne peut donc pas être à l'équilibre. Ainsi, la longueur de Debye  $y$  est d'ordre un.

Le modèle de départ est constitué des équations d'Euler pour chaque espèce de particules couplées par une équation de Poisson pour décrire les interactions électriques. Ce modèle est appelé modèle bifluide Euler-Poisson. Malheureusement les discrétisations classiques de ce modèle sont soumises à de sévères contraintes dans

les zones quasi-neutres. Les simulations numériques sont alors trop coûteuses pour être réalisées dans des cas pratiques multi-dimensionnels.

Deux solutions sont envisageables. La première, décrite dans le Chapitre 3, consiste à s'affranchir de ces contraintes au niveau du modèle mathématique. À partir du modèle bifluide Euler-Poisson, nous dérivons un modèle quasi-neutre pour décrire la bulle de plasma. Ce modèle n'étant valide que dans les zones quasi-neutres, nous dérivons un modèle de Child-Langmuir pour le faisceau. Il est alors nécessaire de déterminer la dynamique de l'interface entre les différentes zones et de coupler les deux modèles. Nous proposons deux descriptions basées sur des hypothèses différentes. La première consiste en un modèle quasi-neutre à courant nul dans le plasma couplé au modèle de Child-Langmuir pour le faisceau. Nous couplons ces deux modèles en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot du modèle bifluide Euler-Poisson. Les simulations numériques de ce modèle montrent que cette approche permet de décrire correctement la dynamique de l'interface. En revanche la conservation de la densité électronique à l'interface n'est pas satisfaite. Ceci se traduit par la présence d'un pic de densité dans le plasma au niveau de l'interface. Pour remédier à ceci, nous considérons une nouvelle description conduisant à un modèle quasi-neutre à courant non nul dans le plasma couplé au modèle de Child-Langmuir pour le faisceau. Le couplage est alors réalisé en étudiant un modèle de transmission à l'interface. Nous étudions ce nouveau modèle d'un point de vue mathématique et numérique. Ceci nous permet de déterminer la zone de validité du modèle quasi-neutre à courant non nul. Les simulations numériques montrent une très bonne concordance avec les résultats du modèle bifluide Euler-Poisson en une dimension d'espace. Nous proposons de plus, des extensions de ses travaux au modèle bifluide Euler complet-Poisson ainsi qu'au cas bidimensionnel.

Malheureusement, les simulations numériques du cas test d'expansion de plasma, nécessitent de décrire un régime au voisinage de l'interface en dehors du domaine de validité du modèle asymptotique présenté dans le Chapitre 3. C'est pourquoi nous envisageons une deuxième approche présentée dans le Chapitre 4. Dans ce chapitre nous proposons une discrétisation du modèle bifluide Euler-Poisson, asymptotiquement stable et consistante dans la limite quasi-neutre. Ce nouveau schéma permet de n'utiliser qu'un seul modèle pour décrire à la fois les zones quasi-neutres et non quasi-neutres du plasma. De plus, tout en ayant un coût similaire à celui des schémas classiques, il n'est pas soumis aux contraintes numériques quasi-neutres. Il n'est donc plus nécessaire de suivre l'interface entre les zones. Nous montrons le bon comportement de ce schéma dans toutes les zones, en réalisant des simulations numériques et en étudiant sa stabilité sur un modèle un fluide Euler-Poisson linéarisé autour d'une solution constante. Nous étudions de plus un problème de couche limite au point d'injection du plasma. En effet, nous montrons numériquement que des conditions aux limites mal préparées au régime quasi-neutre génèrent des contraintes numériques tout aussi sévères que celles dont on s'est affranchi avec le nouveau schéma. L'établissement et l'analyse d'un problème de couche limite permettent alors de déterminer des conditions aux limites préparées au régime quasi-neutre. Ces conditions aux limites sont testées avec des simulations numériques du cas test d'expansion de plasma précédemment décrit. Elles montrent que toutes les contraintes numériques

sont levées.

Le dernier chapitre de ce mémoire présente des travaux réalisés autour de descriptions cinétiques de particules. Tout d'abord nous étudions un problème de particules confinées contre une surface par un potentiel. À partir d'une description cinétique, nous dérivons un modèle asymptotique moins coûteux que le modèle cinétique original. Cette dérivation est faite de manière rigoureuse dans le cas de particules non chargées et de manière formelle pour le cas couplé avec l'équation de Poisson. Nous illustrons ce travail par des simulations numériques d'un problème de décharge primaire rencontré dans l'étude de phénomènes d'arcs électriques sur les panneaux solaires des satellites. Enfin, je termine ce mémoire, par l'étude mathématique d'un modèle diphasique simplifié. Ce modèle décrit le transport de gouttelettes dans un gaz. Il est constitué d'une équation de Vlasov pour les gouttelettes, couplée à une équation de Burgers pour le gaz. Nous avons étudié l'existence, l'unicité et les limites des solutions des différents systèmes avec viscosités.

## 1.2 Liste de publications

### 1.2.1 Articles ou comptes rendus de conférences tirés de la thèse

- [Th1] M.-H. Vignal, Convergence of a finite volume scheme for an elliptic-hyperbolic system, *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **30** (1996) no. 7, 841–872.
- [Th2] S. Verdière, M.-H. Vignal, Numerical and theoretical study of a dual mesh method using finite volume schemes for two phase flow problems in porous media, *Numerische Mathematik* **80** (1998) no. 4, 601–639.
- [Th3] T. Gallouët, R. Herbin, M.-H. Vignal, Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **37** (2000) no. 6, 1935–1972.
- [Th4] M.-H. Vignal, Convergence of Finite Volumes Schemes for an elliptic hyperbolic system with boundary conditions, *Proceeding of the First International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, ed. F. Benkhaldoun et R. Vilsmeier, *Hermes* (1996) 145–152. Ce proceeding est un travail à part entière qui n'est pas publié dans un article.

### 1.2.2 Notes postérieures à la thèse

- [N1] K. Domelevo, M.-H. Vignal, Limites visqueuses pour des systèmes de type Fokker-Planck-Burgers unidimensionnels, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* **332** (2001) no. 9, 863–868. Cette note est un travail à part entière qui n'est pas développé dans un article.

- [N2] P. Degond, C. Parzani, M.-H. Vignal, Un modèle d'expansion de plasma dans le vide, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* **335** (2002), no. 4, 399–404. Cette note est un travail à part entière qui n'est pas développé dans un article.
- [N3] P. Degond, C. Parzani, M.-H. Vignal, A one-dimensional model of plasma expansion, *Mathematical and Computer Modeling* **38** (2003) no. 10, 1093–1099. Cette note annonce les résultats publiés dans [A1].
- [N4] P. Crispel, P. Degond, C. Parzani, M.-H. Vignal, Trois formulations d'un modèle de plasma quasi-neutre avec courant non nul, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* **338** (2004) no. 4, 327–332. Cette note annonce les résultats publiés dans [A2].
- [N5] P. Crispel, P. Degond, M.-H. Vignal, An asymptotically stable discretization for the Euler-Poisson system, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* **341** (2005) no. 5, 323–328. Cette note annonce les résultats publiés dans [A4].

### 1.2.3 Articles postérieurs à la thèse

- [A1] P. Degond, C. Parzani, M.-H. Vignal, Plasma expansion in vacuum: modeling the breakdown of quasineutrality, *Multiscale Modeling and Simulation*, SIAM **2** (2003) no. 1, 158–178.
- [A2] P. Crispel, P. Degond, M.-H. Vignal, Quasi-neutral fluid models for current-carrying plasmas, *Journal of Computational Physics*, **205** (2005) no. 2, 408–438.
- [A3] P. Degond, C. Parzani, M.-H. Vignal, A Boltzmann model for trapped particles in a surface potential, *Multiscale Modeling & Simulation*, SIAM **5** (2006) no. 2, 364–392.
- [A4] P. Crispel, P. Degond, M.-H. Vignal, An asymptotic preserving scheme for the two-fluid Euler-Poisson model in the quasi-neutral limit, *Journal of Computational Physics* **223** (2007) no. 1, 208–234.
- [A5] P. Crispel, P. Degond, M.-H. Vignal, A plasma expansion model based on the full Euler-Poisson system, *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences* **17** (2007) no. 7, 1129–1158.
- [A6] K.-C. Le Thanh, C. Parzani, M.-H. Vignal, A Volume Of Fluid method for a two-dimensional plasma expansion problem, *Journal of Computational Physics* **225** (2007) 1937–1960.
- [A7] J.-G. Liu, P. Degond, M.-H. Vignal, Analysis of an asymptotic preserving scheme for the Euler-Poisson system in the quasineutral limit, soumis.



- [A8] Vignal M.-H., A boundary layer problem for an asymptotic preserving scheme in the quasi-neutral limit for the Euler-Poisson system, soumis.

#### 1.2.4 Comptes rendus de conférences postérieurs à la thèse

- [CR1] P. Degond, R. Talaalout, M.-H. Vignal, Electron transport and secondary emission in a surface of solar cell, proceeding of the Workshop ESA-CNES, 4th and 6th september 2000, ESTEC, Noordwijk, the Netherlands. Ce compte rendu est un travail à part entière qui n'est pas publié dans un article.
- [CR2] P. Degond, C. Parzani, M.-H. Vignal, On plasma expansion in vacuum, proceedings of the conference on Free Boundary Problems, Theory and applications, Trento, juin 2002, International Series of Numerical Mathematics, Birkäuser, Editors P. Colli, C. Verdi, A. Visinti, **147** 103–112. Ce compte rendu est un travail à part entière qui n'est pas publié dans un article.
- [CR3] N. Ben Abdallah, P. Degond, F. Deluzet, V. Latocha, R. Talaalout, M.-H. Vignal, Diffusion limits of kinetic models, proceedings of the conference on Hyperbolic problems: theory, numerics, applications, Springer, Berlin, (2003) 3–17. Les travaux me concernant dans ce compte rendu reprennent les travaux publiés dans [CR1].



## Chapitre 2

# Résumé du travail de thèse : analyse numérique de schémas volumes finis

Durant ma thèse, je me suis intéressée à l'analyse numérique de schémas volumes finis pour des équations elliptiques et hyperboliques sur des domaines bornés. L'originalité de mon travail réside dans le traitement des conditions aux limites ainsi que dans le traitement du couplage elliptique-hyperbolique.

Les schémas volumes finis sont depuis longtemps utilisés dans l'industrie, notamment dans l'industrie pétrolière. Ils sont particulièrement bien adaptés à la discrétisation d'équations de conservation. Le principe de ces schémas est le suivant. On se donne un ensemble de mailles (ou volumes de contrôle). À chaque maille est associée une inconnue, on obtient alors autant d'équations que d'inconnues en intégrant l'équation à discrétiser sur chaque volume de contrôle. Cette intégration fait apparaître des termes d'échange entre volumes. On discrétise ces derniers par différences finies.

Je me suis tout d'abord intéressée à un problème constitué d'une équation hyperbolique linéaire couplée à une équation elliptique linéaire en dimension quelconque. Ce système est discrétisé à l'aide d'un schéma volumes finis "à quatre points" pour l'équation elliptique, étudié dans [26], et du schéma décentré amont pour l'équation hyperbolique. Je montre alors la convergence de la solution approchée vers la solution exacte du système. Pour cela, j'établis pour l'équation elliptique, une estimation d'erreur en norme  $H^1$  discrète de l'ordre de  $\Delta x$ , où  $\Delta x$  est la taille du maillage. De plus, à l'aide d'inégalités discrètes de Sobolev, j'établis des estimations d'erreurs en norme  $L^r$  du domaine, pour tout  $r$  tel que  $1 \leq r \leq +\infty$ . Pour l'équation hyperbolique, je montre la convergence dans  $L^\infty$  faible- $\star$  de la solution approchée vers la solution exacte. Ce travail a été publié dans [Th1].

Je me suis ensuite intéressée, en collaboration avec Sophie Verdière, à un problème d'écoulement diphasique en milieu poreux. Ce travail est publié dans [Th2]. Le modèle consiste en une équation elliptique linéaire couplée à une équation hyperbolique non linéaire. Les paramètres de ce problème sont donnés par les géophysiciens comme des fonctions constantes sur chaque maille d'une grille fine. Cette grille peut être composée de plusieurs millions de cellules. La discrétisation de l'équation elliptique conduit à un système linéaire trop important pour être résolu sur le maillage fin. C'est pourquoi, cette équation est discrétisée sur une grille plus grossière. Toutefois,

afin de conserver l'information donnée sur la grille fine, l'équation hyperbolique est résolue sur celle-ci. On a alors, une méthode dite de double maillage. Puisque les équations sont couplées, il est nécessaire de reconstruire une partie de l'information sur le maillage fin à partir des valeurs connues sur le maillage grossier. Nous étudions deux méthodes de reconstruction. Dans le cas d'un modèle linéaire simplifié, nous montrons la convergence du schéma. De plus, pour le système non linéaire, nous effectuons des simulations numériques sur des problèmes physiques plus complexes.

Dans [Th3], on considère une équation de convection-diffusion avec des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou Fourier. On discrétise cette équation sur un maillage dit de Voronoï (incluant le cas des triangles ou des rectangles). En supposant la solution exacte au moins dans  $H^2$ , on montre une estimation d'erreur en norme  $H_0^1$  discrète du domaine ainsi que  $L^2$  discrète du bord. Des inégalités discrètes de Sobolev, nous permettent alors, d'établir une estimation d'erreur en norme  $L^2$  du domaine. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Thierry Gallouët et Raphaële Herbin.

J'ai alors considéré le cas où l'équation hyperbolique est non linéaire et posée sur un domaine borné. L'équation est discrétisée avec un schéma volumes finis général. À l'aide d'estimations  $L^\infty$  et "BV faible", je montre que la solution approchée converge dans  $L^\infty$  faible- $\star$  vers une solution processus entropique du problème. Cette notion, introduite dans [21] pour le cas sans conditions aux limites, est construite à partir de la fonction de répartition d'une mesure de Young. Lorsque la solution exacte est à variations bornées, on montre que cette solution processus est en fait la solution entropique du problème en utilisant une technique introduite par S.N. Kruzkov dans [30]. De plus, pour un cas particulier de flux, on montre des estimations d'erreurs en norme  $L^1$  de l'ordre de  $\Delta x^{1/4}$  où  $\Delta x$  est la taille du maillage. Ce travail est publié en partie dans [Th4].

## Chapitre 3

# Couplage de modèles pour un problème d'expansion de plasma

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, je décris la modélisation mathématique et numérique de l'expansion d'une bulle de plasma quasi-neutre dans l'espace séparant deux électrodes. Ce travail a été publié dans [N2], [N3], [N4], [A1], [A2], [A5], [A6] et [CR2]. Il a été réalisé en collaboration avec Pierre Crispel, Pierre Degond, Kim-Claire Le Thanh et Céline Parzani dans le cadre de deux projets industriels et a fait l'objet de plusieurs contrats.

Le premier projet concerne l'étude de diodes à forts courants et a été proposé par Franck Assous, Jacques Segré et Kim-Claire le Thanh du CEA de Bruyères le châtel. Il a couvert la période de 2001 à 2004. Le deuxième projet nous a été proposé par Jean-Pierre Catani et Denis Payan du CNES et Jean-François Roussel de l'Onera de Toulouse. Il a couvert la période de 2003 à 2005 et concerne les phénomènes d'arcs électriques sur les panneaux solaires des satellites.

Les scenari physiques de ces deux phénomènes sont identiques, seuls les ordres de grandeurs des quantités changent. Dans chacun des deux cas, on considère deux électrodes planes. Un plasma est injecté à partir de la cathode. La bulle de plasma subit une détente thermique dans l'espace entre les deux électrodes. Au cours de la détente, des électrons, attirés par le potentiel positif de l'anode, sont émis dans l'espace entre l'interface plasma-vide et l'anode. Ils forment un faisceau électronique dans le "vide". Le plasma est supposé totalement ionisé et constitué d'électrons et d'une seule espèce d'ions. On utilise une description fluide et le point de départ de la modélisation est le modèle bifluide Euler-Poisson donné par

$$\partial_t n_i + \partial_x(n_i u_i) = 0, \quad (3.1)$$

$$m_i (\partial_t(n_i u_i) + \partial_x(n_i u_i^2)) + \partial_x p_i(n_i) = -e n_i \partial_x \phi, \quad (3.2)$$

$$\partial_t n_e + \partial_x(n_e u_e) = 0, \quad (3.3)$$

$$m_e (\partial_t(n_e u_e) + \partial_x(n_e u_e^2)) + \partial_x p_e(n_e) = e n_e \partial_x \phi, \quad (3.4)$$

$$-\partial_{xx}^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e), \quad (3.5)$$

où  $t$  est le temps,  $x$  est la variable d'espace et où les quantités relatives aux ions sont

indicées par  $i$  et celles relatives aux électrons par  $e$ . Pour  $j = i$  ou  $e$ , on note  $m_j$  la masse des particules  $j$ ,  $n_j$  leur densité,  $u_j$  leur vitesse et  $p_j$  leur loi de pression supposée adiabatique et donc donnée par  $p_j(n) = C_j n^{\gamma_j}$  avec  $C_j > 0$  et  $\gamma_j > 1$ . De plus,  $e > 0$  est la charge élémentaire,  $\phi$  est le potentiel électrique et  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide.

Ce modèle permet de décrire l'ensemble du dispositif (plasma, interface, faisceau), en revanche il subit des contraintes numériques trop sévères pour être utilisé dans les cas pratiques. Les temps calculs en une dimension d'espace sont déjà très importants et l'objectif est de simuler des cas en deux voir trois dimensions d'espace. Ces contraintes numériques sont liées à deux grandeurs bien connues en physique des plasmas (voir [7], [28]). Ces grandeurs sont la longueur de Debye et la période plasma, notées respectivement  $\lambda_D$  et  $\tau_p$ . Elle sont données par

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T_0}{e^2 n_0} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tau_p = \left( \frac{\epsilon_0 m_e}{e^2 n_0} \right)^{1/2}, \quad (3.6)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $n_0$  et  $T_0$  sont la densité et la température typiques dans le plasma.

La longueur de Debye donne l'échelle de la distance à laquelle les interactions électriques ont lieu dans le plasma. En d'autres termes, si on considère une charge particulière  $q$  dans le plasma, alors un nuage de charges opposées se forme autour de cette charge. Ce nuage écrante l'action électrique de la charge  $q$  au delà de la distance  $\lambda_D$ . Les charges situées en dehors de la zone d'action n'interagissent donc pas avec la charge  $q$ . La période plasma est liée à ces déséquilibres de charges. Lorsqu'un déséquilibre est présent (de l'ordre de  $\lambda_D$ ), des forces électriques de rappels tendent à ramener les particules vers leur position d'équilibre. Les particules se mettent alors à osciller autour de cette position. La période de ces oscillations pour les électrons est donnée par  $\tau_p$ . On peut bien sûr définir la période d'oscillations des ions en changeant  $m_e$  en  $m_i$ . Mais cette période est bien plus grande que  $\tau_p$  puisque les ions sont beaucoup plus lourds que les électrons. Dans le problème physique que nous considérons ici, les densités sont très élevées dans la bulle de plasma et ainsi la longueur de Debye et la période plasma sont très petites devant les échelles macroscopiques, c'est-à-dire la taille du dispositif (distance cathode-anode) et le temps final que l'on désire atteindre.

En pratique, lorsqu'on utilise un schéma classique, la discrétisation en temps doit résoudre la période plasma sinon une instabilité numérique est générée. Ce résultat est démontré dans [23] pour le système un fluide d'Euler-Poisson linéarisé autour d'une solution stationnaire. Nous verrons de plus au paragraphe 4.4, que dans notre problème, la présence d'une couche limite de taille  $\lambda_D$  à la cathode, impose en général une nouvelle contrainte numérique. La discrétisation en espace doit résoudre la couche limite pour assurer la stabilité du schéma. Ces contraintes conduisent à des coûts calculs trop élevés pour permettre la réalisation de simulations numériques en deux dimensions d'espace.

Deux approches sont envisageables pour dépasser ces limitations. Elles consistent à s'affranchir soit au niveau de la modélisation, soit au niveau de la discrétisation de

la résolution des petites échelles  $\lambda_D$  et  $\tau_p$ . Nous décrivons la première approche dans ce paragraphe, la deuxième approche sera développée dans le Chapitre 4.

Dans la première approche, décrite ici, on choisit d'utiliser un modèle quasi-neutre dans la bulle de plasma. Ce modèle est obtenu comme limite du modèle bifluide Euler-Poisson lorsque la longueur de Debye tend vers 0. Il n'est pas contraint de résoudre l'échelle  $\tau_p$ . En revanche, il n'est valide que dans la zone quasi-neutre c'est-à-dire la bulle de plasma. Nous devons donc utiliser un autre modèle pour décrire le faisceau d'électrons. Il faut alors identifier les zones où chacun des modèles est valide et pour cela suivre l'interface plasma-vide ou plutôt plasma-faisceau. Enfin, il faut connecter les deux modèles à cette interface.

### 3.2 Contexte physique et modèle d'Euler-Poisson

On commence par décrire le contexte physique des deux projets évoqués dans l'introduction. Dans une diode plane conventionnelle un fort potentiel est appliqué à l'anode permettant l'émission d'électrons dans l'espace entre les deux électrodes. Ce courant extrait est limité par un courant seuil, appelé courant de Child-Langmuir ou courant limité par charge d'espace, et ceci quel que soit le processus d'émission des électrons. Cette valeur seuil est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux électrodes, voir [31], [14], [18], [19].

Afin de dépasser cette limitation, les industriels ont développé de nouveaux dispositifs : les diodes à forts courants. Dans les diodes à forts courants la cathode est constituée d'un matériau présentant un réseau de micro-pointes régulièrement disposées. Plusieurs types de matériaux sont utilisés parmi lesquels on trouve les cathodes en métal-diélectrique, en fibres de carbone ou les cathodes velours, voir [44]. Les physiciens estiment que deux facteurs peuvent être à l'origine de l'augmentation du courant extrait. Ces facteurs sont d'une part l'augmentation considérable du champ électrique au niveau des pointes et d'autre part l'érosion explosive de la cathode produisant un plasma très chaud et très dense, voir [29], [33]. On s'intéresse ici à la description de la dynamique du plasma dense.

Au cours du temps, le plasma se détend dans l'espace entre les deux électrodes. L'émission électronique se fait à partir de l'interface plasma-vide. Le plasma étant quasi-neutre la différence de potentiel cathode-anode se retrouve en quasi totalité entre l'interface plasma-vide et l'anode. L'interface plasma-vide joue le rôle de cathode virtuelle. La distance entre la cathode (virtuelle) et l'anode diminuant, le courant extrait augmente.

Décrivons maintenant le contexte physique des phénomènes d'arcs sur les satellites. Afin de s'alimenter en énergie, les satellites sont dotés de panneaux solaires constitués de chaînes de cellules photoélectriques. Chaque chaîne est composée de plusieurs dizaines de cellules mises en série, et délivre des tensions de l'ordre de cinquante Volts. Ces chaînes sont ensuite reliées en parallèle afin d'obtenir les puissances voulues. Pour augmenter la puissance des satellites, et ainsi répondre aux besoins de leurs clients, les constructeurs sont amenés à augmenter le nombre de cellules par chaîne passant à soixante-dix voir cent Volts.

Or, lorsque cette tension dépasse le seuil de cinquante Volts, des phénomènes d'arcs électriques apparaissent. Ces derniers sont parfois suffisamment importants pour court-circuiter la chaîne concernée et le satellite subit alors des pertes d'énergie importantes.

Le scénario physique du claquage se décompose essentiellement en trois grandes étapes. La première phase est l'apparition d'une décharge électrostatique dite primaire au niveau d'une partie métallique d'une cellule. Le dépôt d'énergie en résultant provoque un échauffement intense du matériau, lequel se vaporise et s'ionise très rapidement formant un plasma chaud et dense. Ce plasma se détend dans l'intervalle entre deux cellules électriques portées à différents potentiels. Lorsque le plasma a connecté les deux cellules, l'arc électrique peut s'établir. On s'intéresse ici à la transition de la décharge primaire vers l'arc électrique c'est-à-dire la phase d'expansion du plasma dense.

Le modèle de départ est le modèle bifluide Euler-Poisson (3.1)-(3.5) pour  $x \in [0, L]$  et  $t > 0$  où  $L$  est la distance entre les deux électrodes. On complète ce système par des conditions initiales et aux limites. On suppose qu'au début du processus le domaine est vide de plasma. On pose donc  $n_i|_{t=0} = n_e|_{t=0} = 0$ . La cathode et l'anode sont respectivement situées en  $x = 0$  et  $x = 1$ , ainsi

$$\phi|_{x=0} = 0, \quad \text{et} \quad \phi|_{x=L} = \phi_L > 0. \quad (3.7)$$

Enfin, pour les quantités fluides, en  $x = L$ , on suppose qu'on est dans un régime supersonique et donc aucune condition aux limites n'est nécessaire. En  $x = 0$ , on considère qu'un plasma quasi-neutre avec des vitesses identiques pour les ions et les électrons, est présent en dehors du domaine pour  $x < 0$ . Les conditions aux limites sont alors données par

$$(n_i, u_i)(0, t) = (n_{i0}, u_{i0})(t), \quad (n_e, u_e)(0, t) = (n_{e0}, u_{e0})(t), \quad (3.8)$$

pour tout  $t > 0$  et où  $(n_{i0}, u_{i0})$  et  $(n_{e0}, u_{e0})$  sont donnés par la résolution de problèmes de Riemann ionique et électronique où les états gauches sont identiques et donnés par  $(n_0, u_0)$  qui caractérise le plasma quasi-neutre présent en dehors du domaine pour  $x < 0$ . Les états droits sont donnés par  $(n_{i,e}, u_{i,e})(0^+, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (n_{i,e}, u_{i,e})(x, t)$ .

### 3.3 Modèles asymptotiques unidimensionnels

Je résume ici les travaux publiés dans [N2], [N3] et [A1]. Je rappelle que le modèle (3.1)-(3.5), (3.7), (3.8), est valide dans tout le domaine : bulle de plasma et faisceau, mais il est contraint à résoudre l'échelle de la période plasma. Le but est donc de dériver un modèle valide dans chaque zone non contraint à résoudre cette petite échelle. Pour cela on commence par adimensionner les quantités physiques dans (3.1)-(3.5). Le choix des adimensionnements va différer dans chacune des deux zones puisque celles-ci ont des caractéristiques physiques très différentes.

On commence par donner l'adimensionnement dans la zone de plasma. On choisit les grandeurs suivantes pour adimensionner le problème : la taille du domaine  $L$



pour l'échelle d'espace, les densité et vitesse caractéristiques données par  $n_0$  et  $u_0$ , le temps  $t_0 = L/u_0$ , la pression ionique  $p_0 = n_0 m_i u_0^2$  et le potentiel d'anode  $\phi_L$ . Les variables adimensionnées sont alors définies par  $\tilde{x} = x/L$ ,  $\tilde{t} = t/t_0$ ,  $\tilde{n}_{i,e} = n_{i,e}/n_0$ ,  $\tilde{u}_{i,e} = u_{i,e}/u_0$ ,  $\tilde{p}_{i,e}(\tilde{n}_{i,e}) = p_{i,e}(n_{i,e})/p_0$  et  $\tilde{\phi} = \phi/\phi_L$ . On note  $\tilde{X}(\tilde{t})$  la position, en variables adimensionnées, de l'interface plasma-faisceau pour tout  $\tilde{t} > 0$ . En omettant les "tildes", on obtient pour tout  $x \in [0, X(t)]$  et tout  $t > 0$

$$\partial_t n_i + \partial_x(n_i u_i) = 0, \quad \partial_t(n_i u_i) + \partial_x(n_i u_i^2) + \partial_x p_i(n_i) = -\frac{n_i \partial_x \phi}{\eta}, \quad (3.9)$$

$$\partial_t n_e + \partial_x(n_e u_e) = 0, \quad \varepsilon (\partial_t(n_e u_e) + \partial_x(n_e u_e^2)) + \partial_x p_e(n_e) = \frac{n_e \partial_x \phi}{\eta}, \quad (3.10)$$

$$-\lambda \partial_{xx}^2 \phi = (n_i - n_e), \quad (3.11)$$

où  $\varepsilon$ ,  $\eta$  et  $\lambda$  sont trois paramètres sans dimension donnés par

$$\varepsilon = \frac{m_e}{m_i}, \quad \eta = \frac{m_i u_0^2}{e \phi_L}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_0 \phi_L}{e n_0 L^2} = \frac{e \phi_L}{e^2 / (\varepsilon_0 (n_0 L^2)^{-1})}.$$

Ils mesurent respectivement le rapport des masses des électrons et des ions, le rapport de l'énergie thermique et de l'énergie potentielle et le rapport de l'énergie potentielle due à la différence de potentiel appliquée et de l'énergie potentielle due aux interactions Coulombiennes (voir [7]).

On se place dans le cas où  $\lambda$  est d'ordre un et  $\eta$  est très petit. Ces valeurs correspondent à celles observées dans les diodes à forts courants (voir [50]). En pratique,  $\varepsilon$  est petit mais ne peut pas être négligé. En effet, même si l'inertie des électrons est petite, ils subissent des accélérations très fortes. Ainsi, on considère  $\varepsilon$  comme une quantité d'ordre un. Notons que la longueur de Debye adimensionnée, c'est-à-dire le rapport entre la longueur de Debye et l'échelle de distance macroscopique  $L$ , est donnée par  $\sqrt{\lambda \eta}$ . De plus, la période plasma adimensionnée, c'est-à-dire le rapport entre la période plasma et l'échelle de temps macroscopique  $t_0$ , est donnée par  $\sqrt{\varepsilon \lambda \eta}$ . Ainsi,  $\eta$  petit conduit à une longueur de Debye et une période plasma petites également.

Dans la zone de faisceau il n'y a plus que des électrons, les grandeurs choisies pour l'adimensionnement sont les mêmes pour les variables d'espace et de temps ainsi que pour la densité, le potentiel et la pression. En revanche, les électrons étant accélérés par le champ électrique, on s'attend à des énergies de l'ordre de l'énergie potentielle  $e\phi_L$ . Ainsi, on choisit d'adimensionner la vitesse électronique par  $\sqrt{e\phi_L/m_e}$ . On pose alors  $\bar{u}_e = \sqrt{\varepsilon \eta} u_e$  où  $u_e$  est la vitesse adimensionnée dans la zone de plasma. On obtient le modèle Euler-Poisson dans la zone de faisceau  $[X(t), 1]$  :

$$\sqrt{\varepsilon \eta} \partial_t n_e + \partial_x(n_e \bar{u}_e) = 0, \quad -\lambda \partial_{xx}^2 \phi = -n_e, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon (\sqrt{\varepsilon \eta} \partial_t(n_e \bar{u}_e) + \partial_x(n_e \bar{u}_e^2)) + \varepsilon \eta \partial_x p_e(n_e) = \varepsilon n_e \partial_x \phi, \quad (3.13)$$

avec les conditions aux limites en  $x = X(t)$  telles que  $n_e$ ,  $\bar{u}_e$ ,  $\phi$  se raccordent aux valeurs correspondantes des quantités calculées à l'aide du modèle bifluide adimensionné dans la zone de plasma. Remarquons en particulier que puisque  $u_e = O(1)$

dans la zone de plasma, on a  $\bar{u}_e|_{x=X(t)} = (\varepsilon\eta)^{1/2}u_e|_{x=X(t)} = O((\varepsilon\eta)^{1/2}) \rightarrow 0$  lorsque  $\eta$  tend vers 0. De même  $\phi \rightarrow 0$  dans la zone de plasma, et donc  $\phi|_{x=X(t)} \rightarrow 0$  lorsque  $\eta$  tend vers 0. De plus, on rappelle que  $\phi|_{x=1} = 1$ .

On est alors en mesure d'établir un modèle asymptotique pour chaque zone. On commence par la zone de faisceau.

### 3.3.1 Modèle asymptotique dans le faisceau

Le modèle asymptotique pour le faisceau est commun aux références [N2], [N3] et [A1].

On note  $n_e^\eta, \bar{u}_e^\eta, \phi^\eta$  une solution du système (3.12), (3.13) assorti des conditions aux limites spécifiées ci-dessus. La limite formelle  $\eta \rightarrow 0$  est analysée dans la proposition suivante basée sur les résultats établis dans [14] et [18].

**Proposition 3.1** *Lorsque  $\eta \rightarrow 0$ ,  $n_e^\eta, \bar{u}_e^\eta, \phi^\eta$  convergent vers  $n_e, \bar{u}_e, \phi$ , solution du problème de Child-Langmuir dans  $[X(t), 1]$  :*

$$\partial_x(n_e\bar{u}_e) = 0, \quad \partial_x(n_e\bar{u}_e^2) = n_e \partial_x\phi, \quad -\lambda\partial_{xx}^2\phi = -n_e,$$

avec les conditions aux limites  $\bar{u}_e|_{x=X(t)} = 0, \phi|_{x=X(t)} = 0, \phi|_{x=1} = 1$ . On note  $\bar{j}_e = n_e\bar{u}_e$ . Alors,  $\bar{j}_e$  ne dépend pas de  $x$  sur  $[X(t), 1]$ . On introduit le courant de Child-Langmuir :

$$\bar{j}_{CL}(t) = \frac{4\sqrt{2}\lambda}{9(1-X(t))^2}. \quad (3.14)$$

Alors, pour toute valeur  $\bar{j}_e \in [0, \bar{j}_{CL}(t)]$ , il existe une solution unique  $n_e, \bar{u}_e, \phi$ , avec  $\phi$  strictement positif sur  $]X(t), 1]$ , donnée par  $n_e = \bar{j}_e/\sqrt{2\phi}, \bar{u}_e = \sqrt{2\phi}$ . Le potentiel  $\phi$  est déterminé implicitement par

$$\int_0^{\phi(x,t)} \frac{d\psi}{\sqrt{(\partial_x\phi|_{x=X(t)})^2 + 2\sqrt{2}\lambda^{-1}\bar{j}_e\sqrt{\psi}}} = x - X(t). \quad (3.15)$$

La connaissance de  $\partial_x\phi|_{x=X(t)}$  et la condition aux limites en  $x = 1$  sur le potentiel donnent implicitement  $\bar{j}_e$  en écrivant (3.15) en  $x = 1$ . Il n'y a pas de solution si  $\bar{j}_e \notin [0, \bar{j}_{CL}(t)]$  et  $\bar{j}_e \in [0, \bar{j}_{CL}(t)]$  correspond à un champ électrique à l'interface  $\partial_x\phi|_{x=X(t)} \in [0, 1/(1-X)]$ . En particulier, pour  $\partial_x\phi|_{x=X(t)} = 0$ , on est dans un régime de courant maximal et  $\bar{j}_e = \bar{j}_{CL}(t)$  et  $\phi = ((x-X)/(1-X))^{4/3}$ .

En retournant dans les variables adimensionnées dans le plasma, le flux électronique  $j_e$  et le courant de Child-Langmuir  $j_{CL}$  sont donnés par  $j_e = (\varepsilon\eta)^{-1/2}\bar{j}_e$  et  $j_{CL} = (\varepsilon\eta)^{-1/2}\bar{j}_{CL}$ .

### 3.3.2 Modèle asymptotique dans le plasma et connexion à l'interface

Le modèle asymptotique pour le plasma ainsi que le modèle de connexion à l'interface plasma-faisceau diffèrent dans les références [N2] et [N3], [A1].

Dans [N2], on suppose que la limite du courant, lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , est nulle dans le plasma, c'est-à-dire que les vitesses ionique et électronique sont identiques. Si  $n_{e,i}^\eta$ ,  $u_{e,i}^\eta$  et  $\phi^\eta$  sont solutions de (3.9)-(3.11), la limite formelle  $\eta \rightarrow 0$  donne  $n_{e,i}^\eta \rightarrow n$ ,  $u_{e,i}^\eta \rightarrow u$  et  $\phi^\eta \rightarrow 0$ . La densité quasi-neutre  $n$  et la quantité de mouvement totale  $(1 + \varepsilon) n u$  satisfont le modèle d'Euler isentropique classique sur  $[0, X(t)]$

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(n u) = 0, & \phi(x) = 0, \\ (1 + \varepsilon) (\partial_t(n u) + \partial_x(n u^2)) + \partial_x(p_i(n) + p_e(n)) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Le couplage et la fermeture des modèles de Child-Langmuir pour le faisceau (donné dans la Proposition 3.1) et d'Euler isentropique classique pour le plasma se fait de la manière suivante.

**Proposition 3.2** *On suppose que l'asymptotique quasi-neutre reste valide jusqu'à l'interface  $X(t)$ , que la densité électronique est continue à travers l'interface tandis que la vitesse électronique est discontinue. On fait de plus les hypothèses d'une émission électronique dans un régime de courant maximal dans le faisceau et qu'une force de pression de réaction, concentrée à l'interface, est exercée sur le plasma par le faisceau. L'état à gauche est donné par  $n_{e-} = n_{i-} = n_-$ ,  $u_{i-} = u_{e-} = u_-$ ,  $\phi_- = 0$  et  $(\phi_x)_- = 0$ , et l'état droit par  $n_{e+} = n_-$ ,  $n_{i+} = 0$ ,  $n_{e+} u_{e+} = j_{CL}$  et  $(\phi_x)_+ = 0$  où pour toute fonction  $f$ , on note  $f_\pm = \lim_{x \rightarrow X(t)^\pm} f$ , de plus  $n_-$  et  $u_-$  sont les valeurs à gauche de  $X(t)$  de la densité et de la vitesse du plasma données par le modèle quasi-neutre (3.16). La valeur  $j_{CL}$  est donnée par  $j_{CL} = (\varepsilon \eta)^{-1/2} \bar{j}_{CL}$  où  $\bar{j}_{CL}$  est défini par (3.14). Alors, la vitesse de l'interface et la pression de réaction exercée sur le plasma par le faisceau sont données par*

$$\frac{dX}{dt} = u_-, \quad (p_i + p_e)(n_-) = \varepsilon j_{CL} \left( \frac{j_{CL}}{n_-} - u_- \right) + p_e(n_-).$$

La démonstration de ce résultat repose sur le passage à la limite  $\eta \rightarrow 0$  dans les relations de Rankine-Hugoniot écrites sur les conservations de la densité ionique et de l'impulsion totale.

Nous avons réalisé des simulations numériques avec des valeurs s'approchant de celles données dans les diodes à forts courants. Nous comparons le modèle bi-fluide Euler-Poisson (3.9)-(3.11) valide dans tout le domaine, au modèle asymptotique constitué du modèle d'Euler isentropique classique (3.16) pour la zone de plasma et du modèle de Child-Langmuir dans le faisceau, connectés par les relations établies dans la Proposition 3.2. La discrétisation est de type volumes finis avec un solveur HLLE (voir [51]) ou un solveur polynômial de degré 2 (voir [17]) qui sont des solveurs d'ordre 1 de type Roe. Nous utilisons un maillage uniforme en espace ( $\Delta x = \text{constante}$ ) sauf au voisinage de l'interface plasma-faisceau où le maillage suit l'interface. Ceci nous permet de prendre en compte la pression de réaction puisque le long de cette interface le flux est donné par la pression totale. La vitesse de l'interface est donnée par la vitesse dans la dernière maille non vide de plasma. La discrétisation est détaillée pour un modèle similaire dans [A1]. On fixe  $\eta = 10^{-4}$ ,  $\lambda = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $C_i = C_e = 1$ ,  $\gamma_i = \gamma_e = 2$  et  $\Delta x = 2 \times 10^{-4}$ . Notons que ces paramètres donnent une

longueur de Debye et une période plasma adimensionnées respectivement données par  $\sqrt{\lambda\eta} \approx 3.2 \times 10^{-4}$  et  $\sqrt{\varepsilon\lambda\eta} \approx 2.2 \times 10^{-4}$ .

La Figure 3.2 montre que le modèle de Child-Langmuir dans le faisceau est valide. En effet, après l'interface les résultats du modèle bifluide Euler-Poisson coïncident avec ceux du modèle de Child-Langmuir. En revanche, la Figure 3.1 montre que le modèle d'Euler isentropique dans le plasma présente plusieurs défaillances. Tout d'abord on constate la présence d'un pic de densité avant l'interface non présent dans les résultats du modèle bifluide Euler-Poisson. Ceci est lié à l'hypothèse de courant nul dans le plasma qui implique une contradiction physique importante. En effet, la conservation de la densité électronique n'est pas satisfaite au travers de l'interface. Le bilan de masse n'est donc pas correct à l'interface et la quantité d'électrons dans le plasma est surévaluée. De plus, nous avons été obligés de pénaliser le terme de pression de réaction à l'interface. En effet, sans cette pénalisation le terme de pression est trop fort et l'interface prédite par le modèle asymptotique est en retard par rapport à la position de l'interface donnée par le modèle bifluide.

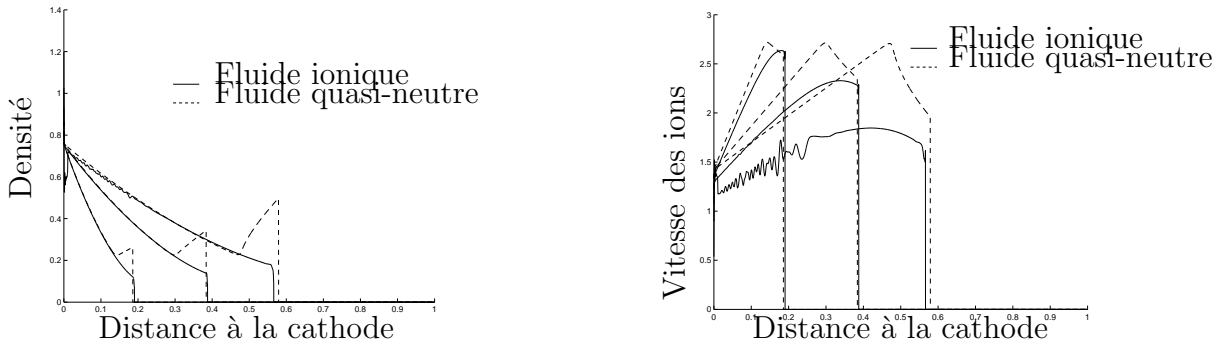


Figure 3.1: Densité et vitesse adimensionnées du fluide ionique issues des modèles bifluide et quasi-neutre : quantités observées entre la cathode  $x = 0$  et l'interface aux temps adimensionnés  $t = 0.07$ ,  $t = 0.15$  et  $t = 0.24$ .

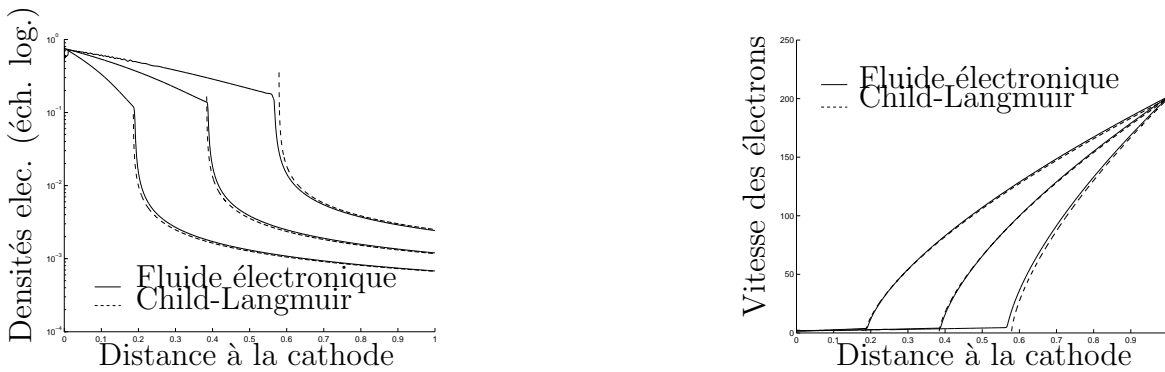


Figure 3.2: Densité et vitesse adimensionnées du fluide électronique issues des modèles bifluide et de Child-Langmuir : quantités observées entre l'interface  $x = X(t)$  et l'anode  $x = 1$  aux temps adimensionnés  $t = 0.07$ ,  $t = 0.15$  et  $t = 0.24$ .

Toutes les défaillances du modèle précédent nous ont donc amenés naturellement à considérer dans [N3] et [A1] une autre modélisation pour la zone de plasma ainsi

que d'autres conditions de raccord. Tout d'abord, on suppose un courant non nul dans le plasma donc des vitesses ioniques et électronique différentes. Notons toutefois que la limite donnant la quasi-neutralité  $n_i = n_e$ , la conservation des densités ioniques et électroniques donnent un courant,  $j = n_i u_i - n_e u_e$ , constant. Dans [N3] et [A1], on établit le résultat formel suivant.

**Proposition 3.3** *Si  $n_e^\eta, n_i^\eta, u_e^\eta, u_i^\eta, \phi^\eta$  sont solutions de (3.9)-(3.11), la limite formelle  $\eta \rightarrow 0$  dans  $[0, X(t)]$ , donne*

$$n_e^\eta, n_i^\eta \rightarrow n, \quad u_i^\eta \rightarrow u, \quad u_e^\eta \rightarrow u - j/n, \quad \phi^\eta \rightarrow 0,$$

où  $n, u, j$  et  $\phi$  sont solutions du modèle quasi-neutre à courant non nul suivant :

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad \partial_x j = 0, \quad \phi = 0, \quad (3.17)$$

$$(1+\varepsilon) (\partial_t(nu) + \partial_x(nu^2)) + \partial_x(p_i(n) + p_e(n)) + \varepsilon \partial_x \left( -2uj + \frac{j^2}{n} \right) = \varepsilon \partial_t j. \quad (3.18)$$

Le courant  $j$  est à ce stade inconnu et sera spécifié plus tard, au cours de la connexion des deux modèles. Sa valeur dépend de l'émission électronique dans le faisceau et donc du modèle de Child-Langmuir. Notons de plus que l'analyse formelle n'assure pas qu'à la limite les conditions aux bords soient encore satisfaites, nous faisons l'hypothèse, ici, que ceci est vrai pour la densité quasi-neutre et la vitesse des ions. Nous verrons dans le Chapitre 4 que la présence d'une couche limite à la cathode transforme les conditions aux bord. D'ailleurs, remarquons que si  $j \neq 0$ , les conditions pour  $u_e^\eta$  sont perdues à la limite, puisque  $u_e|_{x=0} = 1 - j \neq 1$ . Ce qui confirme la présence de la couche limite.

Dans (3.18), le terme de flux additionnel (par rapport au modèle isentropique classique),  $\varepsilon \partial_x(-2uj + j^2/n)$ , traduit la quantité de mouvement perdue due à l'émission des électrons dans le faisceau, comme le recul d'un fusil lorsqu'on tire une balle.

Si  $j \neq 0$ , le système (3.17), (3.18) n'est pas inconditionnellement hyperbolique. Dans le cas  $\gamma_i = \gamma_e = \gamma$ , ce système est strictement hyperbolique si et seulement si la densité du plasma  $n$  satisfait la condition  $n > n_H(j)$  où

$$n_H(j) = \left( \frac{\varepsilon j^2}{(c_i + c_e)\gamma(1 + \varepsilon)} \right)^{1/(\gamma+1)}. \quad (3.19)$$

Dans le domaine d'hyperbolicité  $n \in [n_H(j), \infty)$ , les vitesses caractéristiques sont données par

$$\mu_\pm = u - \frac{\varepsilon j}{(1 + \varepsilon)n} \pm \left( \frac{\gamma(c_i + c_e)n^{\gamma-1}}{1 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon j^2}{(1 + \varepsilon)^2 n^2} \right)^{1/2}.$$

Notons enfin que la zone de plasma est caractérisée par la présence des ions, ainsi l'interface plasma-faisceau  $X(t)$  avance à la vitesse des ions  $u$ .

Il reste à connecter les deux modèles et en particulier à spécifier le courant à l'interface, puisque je le rappelle celui-ci est pour l'instant inconnu dans la zone de plasma mais aussi dans la zone de faisceau (sa valeur étant déterminée par le champ

électrique à l'interface). Mais avant cela, il faut savoir combien de relations sont nécessaires pour avoir un problème bien posé dans la zone de plasma. Le problème de connexion à l'interface est en fait un problème de conditions aux limites où la limite bouge. Pour déterminer combien de conditions aux limites on doit fixer pour le modèle de plasma (3.17), (3.18), il suffit de se placer dans le référentiel de l'interface et de regarder le signe des valeurs propres dans ce référentiel. Dans ce référentiel les valeurs propres du système sont données par  $\mu_- - u$  et  $\mu_+ - u$ . On se place dans le cas où  $j < 0$  puisque l'émission d'électrons dans le faisceau impose que les électrons sont accélérés à des vitesses plus grandes que celles des ions. On a donc clairement  $\mu_+ + u > 0$  et l'information portée par le champ associé à cette valeur propre est sortante du domaine  $[0, X(t)]$ . De même, un calcul simple montre que  $\mu_- - u > 0$  si et seulement si  $n < n_P(j)$  où

$$n_P(j) = \left( \frac{\varepsilon j^2}{(c_i + c_e)\gamma} \right)^{1/(\gamma+1)} > n_H(j). \quad (3.20)$$

Ainsi, si  $n > n_P(j)$ , on doit imposer une condition aux limites à l'interface, sinon aucune condition aux limites n'est nécessaire.

En résumé, pour fermer complètement le modèle asymptotique, il reste à déterminer les courants dans les deux zones et à donner une condition aux limites à l'interface au modèle de plasma si la densité est plus grande que  $n_P(j)$ . Pour cela on introduit un problème de transmission. On reprend le modèle bifluide Euler-Poisson (3.9)-(3.11), seul modèle valide des deux côtés de l'interface, et on zoome autour de l'interface en effectuant le changement de variables  $x \mapsto \xi = (x - X(t))/\eta^{1/2}$ . On obtient ainsi, un problème d'interface qui doit connecter à gauche les solutions du modèle quasi-neutre, i.e. en  $\xi \rightarrow -\infty$ , aux solutions du modèle de Child-Langmuir à droite, i.e. en  $\xi \rightarrow +\infty$ . De plus, l'interface étant localisée en  $\xi = 0$ , on pose  $n_i = 0$  pour  $\xi > 0$ . Enfin, on demande que  $n_i$  soit continu à travers l'interface puisqu'il est classique qu'un choc ne peut pas border le vide, voir [51]. On montre le résultat suivant.

**Proposition 3.4** *Si  $\gamma \geq 2$ , il existe une solution (régulière ou non) du problème d'ondes progressives connectant le plasma au faisceau telle que  $n_e$  est bornée,  $n_i = 0$  au delà de l'interface et  $n_i$  est continue à travers l'interface si et seulement si*

$$j = -j_e, \quad u_- = \frac{dX}{dt}, \quad n_- \in [n_H(j), n_P(j)], \quad (3.21)$$

où  $u_- = \lim_{x \rightarrow X(t)^-} u(x, t)$ ,  $n_- = \lim_{x \rightarrow X(t)^-} n(x, t)$ ,  $u$  et  $n$  étant respectivement la vitesse ionique et la densité quasi-neutre dans le plasma. De plus,  $n_H(j)$  et  $n_P(j)$  sont donnés par (3.19) et (3.20).

La condition  $\gamma \geq 2$  est technique et peut très certainement être levée au prix d'une analyse plus fine. Les relations (3.21) donnent des informations pour la fermeture du modèle. Tout d'abord, elles confirment que la dynamique de la frontière est pilotée par les ions. De plus, elles donnent la continuité du courant en imposant que le courant dans le plasma soit égal au courant dans le faisceau généré par l'émission d'électrons.

En revanche, la valeur du courant n'est pas déterminée, la seule information que l'on ait, est celle donnée par le modèle de Child-Langmuir qui impose  $0 \leq j_e \leq j_{CL}$ . Enfin, la dernière relation donne une contrainte sur la densité dans le plasma à l'interface. Notons au passage qu'il est remarquable que les valeurs  $n_H$  et  $n_P$  précédemment rencontrées apparaissent naturellement dans le problème de transmission. Ceci confirme leur rôle prédominant dans la zone de l'interface. La dernière condition exprime que la densité dans le plasma doit être telle que les deux valeurs propres du modèle quasi-neutre dans le référentiel de l'interface,  $\mu_- - u$  et  $\mu_+ - u$ , doivent être positives (voir (3.20)). Le plasma doit donc être supersonique à l'interface. Cette condition est bien connue dans les analyses de gaines d'ions (voir [7], [24], [40], [46], [47], [49], [2] et [25]) et porte le nom de critère de Bohm. Ce critère stipule qu'à la sortie de la gaine les ions doivent être supersoniques. Cette condition donne implicitement une condition aux limites pour le modèle quasi-neutre. En effet, si la densité du plasma à l'interface est subsonique et donc telle qu'une condition aux limites est nécessaire, on impose, comme condition aux limites, la plus grande valeur permettant de revenir dans le régime supersonique, c'est-à-dire  $n_P(j)$ .

Pour fermer le modèle, on affecte une valeur au courant d'électrons  $j_e = -j \in [0, j_{CL}]$ . Puisque cette valeur n'est pas déterminée par l'analyse, on se base sur les résultats numériques précédemment effectués et on impose un régime de courant maximal c'est-à-dire  $j_e = -j = j_{CL} = (\varepsilon\eta)^{-1/2}\bar{j}_{CL}$  où  $\bar{j}_{CL}$  est donné par (3.14).

Nous avons réalisé des simulations numériques avec les valeurs des paramètres précédemment utilisés dans le cas du modèle à courant nul c'est-à-dire  $\eta = 10^{-4}$ ,  $\lambda = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $C_i = C_e = 1$ ,  $\gamma_i = \gamma_e = 2$ . Je rappelle que ces paramètres donnent une longueur de Debye et une période plasma adimensionnées respectivement données par  $\sqrt{\lambda\eta} \approx 3.2 \times 10^{-4}$  et  $\sqrt{\varepsilon\lambda\eta} \approx 2.2 \times 10^{-4}$ . Nous comparons le modèle bifluide Euler-Poisson (3.9)-(3.11) valide dans tout le domaine, au modèle asymptotique constitué du modèle quasi-neutre (3.17), (3.18) pour la zone de plasma et du modèle de Child-Langmuir dans le faisceau, connectés par les relations données ci-dessus. La discrétisation est de type volumes finis avec un solveur HLLC (voir [51])

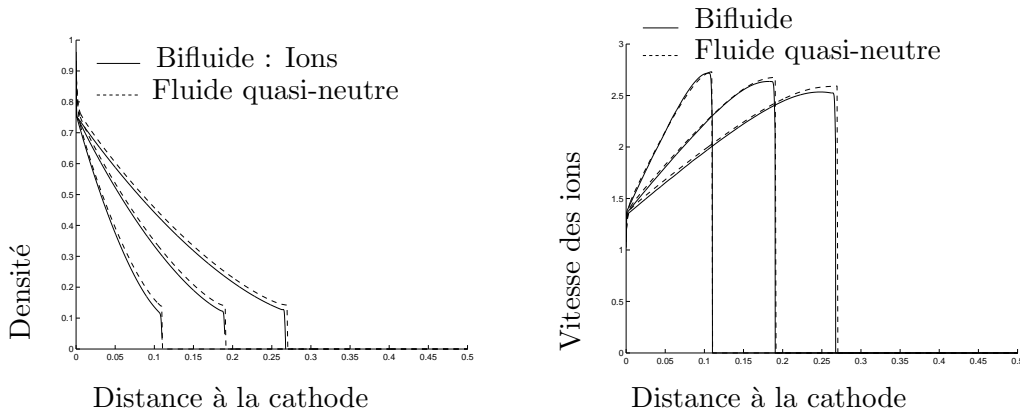


Figure 3.3: Densité et vitesse des ions donnés par le modèle bifluide Euler-Poisson (trait plein) et par le modèle quasi-neutre à courant non nul (pointillés). Les valeurs sont observées entre la cathode  $x = 0$  et l'interface plasma-faisceau  $x = X(t)$  aux temps adimensionnés  $t = 0.04$ ,  $t = 0.07$  et  $t = 0.1$ .

ou un solveur polynômial de degré 2 (voir [17]) qui sont des solveurs d'ordre 1 de type Roe. Nous utilisons un maillage uniforme ( $\Delta x = \text{constante}$ ) sauf au voisinage de l'interface où le maillage suit l'interface. Pour le modèle bifluide, on utilise un pas d'espace donné par  $\Delta x \leq 2.10^{-4}$  alors que pour le modèle asymptotique le pas d'espace est  $\Delta x = 10^{-3}$ . La Figure 3.3 montre la densité et la vitesse ionique dans la zone de plasma  $[0, X(t)]$  pour différents temps. On constate que le modèle quasi-neutre à courant non nul donne la bonne position de l'interface ainsi que les bons profils de densité et vitesse. Sur la Figure 3.4 à gauche, je présente le potentiel électrostatique donné par les modèles bifluide et de Child-Langmuir. On constate, comme précédemment, que le modèle de Child-Langmuir est valide dans la zone de faisceau. Enfin, la Figure 3.4 montre à droite, le courant donné par le modèle bifluide Euler-Poisson et le courant de Child-Langmuir. On voit que le courant de Child-Langmuir donne une très bonne approximation du courant dans le domaine sauf dans l'interface. En effet, le courant donné par le modèle bifluide présente un pic au niveau de l'interface. Ce pic peut s'expliquer grâce à la solution du problème de transmission. Celle-ci satisfait  $n_e(u_e - \sigma) = j_e$ ,  $n_i(u_i - \sigma) = 0$ , où  $j_e$  et  $\sigma = dX/dt$  sont indépendants de  $x$ . Ainsi,  $j = n_i u_i - n_e u_e = -j_e + (n_i - n_e)\sigma$  et  $j$  est, à une constante près, proportionnel à  $n_i - n_e$ . L'analyse de la monotonie de  $n_i - n_e$  comme fonction de  $x$  montre que son comportement est le même que celui observé sur la Figure 3.4 à droite.

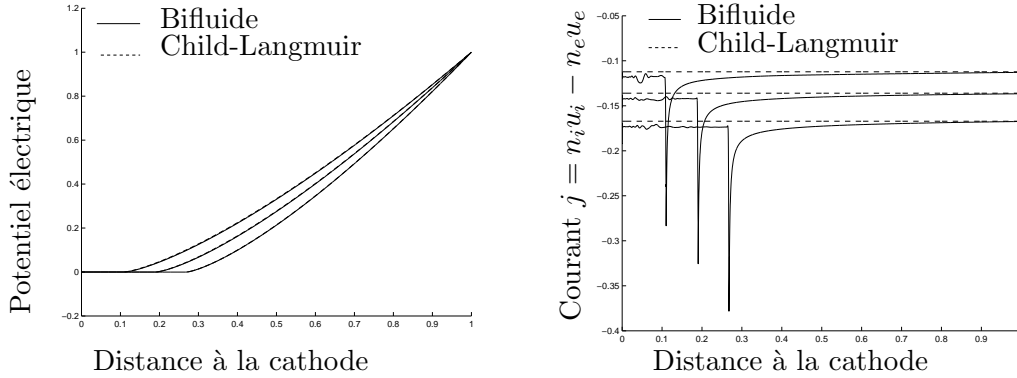


Figure 3.4: Potentiel (à gauche) et courant (à droite) calculés par le modèle bifluide Euler-Poisson (trait plein) et par le modèle de Child-Langmuir (pointillés). Les valeurs sont observées aux temps adimensionnés  $t = 0.04$ ,  $t = 0.07$  et  $t = 0.1$ .

Ainsi, le modèle asymptotique donne une bonne approximation du modèle bifluide originel pour un faible coût. En revanche, nos simulations numériques s'arrêtent en dehors du domaine d'hyperbolicité du modèle quasi-neutre à courant non nul c'est-à-dire lorsque la densité passe en dessous de la valeur critique  $n_H$  définie par (3.19). Or, cette valeur est atteinte et dépassée par le plasma au delà du temps adimensionné  $t = 0.116$ . Sur la dernière maille avant l'interface la condition d'hyperbolicité n'est plus satisfaite et le modèle quasi-neutre s'arrête. Ce problème est indépendant de la taille du maillage en espace et en temps. Nous ne sommes donc pas capables de simuler des temps au delà de  $t = 0.116$  avec le modèle asymptotique. Afin de chercher une réponse à ce problème, on introduit dans [N4] et [A2] d'autres formulations du



modèle quasi-neutre à courant non nul. Je détaille ce travail dans le paragraphe suivant.

### 3.4 Différentes formulations du modèle à courant non nul

Je décris ici les travaux publiés dans [N4] et [A2] dans lesquels on étudie plusieurs formulations du modèle quasi-neutre à courant non nul afin (entre autres) de lever la perte d'hyperbolicité rencontrée dans les simulations numériques présentées ci-dessus.

On part du modèle bifluide Euler-Poisson (3.9)-(3.11). Remarquons tout d'abord qu'en redimensionnant le potentiel, c'est-à-dire en changeant  $\phi$  en  $\eta\phi$ , on fait apparaître la longueur de Debye, et donc la limite quasi-neutre, de manière explicite dans le système. En effet, on obtient

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, \quad \partial_t (n_i u_i) + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i(n_i) = -n_i \nabla \phi, \quad (3.22)$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, \quad \partial_t (n_e u_e) + \nabla \cdot (n_e u_e \otimes u_e) + \nabla p_e(n_e)/\varepsilon = n_e \nabla \phi/\varepsilon, \quad (3.23)$$

$$\lambda \eta \Delta \phi = n_i - n_e, \quad (3.24)$$

où  $p_{i,e}(n) = C_{i,e} n^{\gamma_{i,e}}$ . On rappelle que  $\lambda_D^2/L^2 = \lambda \eta$  où  $\lambda_D$  est la longueur de Debye donnée par (3.6) et  $L$  est l'échelle de longueur macroscopique.

On se place en dimension quelconque, car nous cherchons à étudier le caractère bien posé des formulations du modèle quasi-neutre en dimensions supérieures à un. La limite quasi-neutre  $\lambda \eta \rightarrow 0$  de ce système donne formellement les équations (3.22)-(3.23) assorties de la contrainte de quasi-neutralité  $n_i = n_e$ . De ce système nous déduisons trois formulations du modèle quasi-neutre à courant non nul.

La première formulation, que nous appelons formulation 2-fluides contraints est obtenue en remarquant que la contrainte de quasi-neutralité  $n_i = n_e$  est équivalente (si la quasi-neutralité est vérifiée à l'instant initial) à la contrainte d'un courant à divergence nulle. Cette formulation est donc donnée par (3.22), (3.23) et

$$\nabla \cdot (n_i u_i - n_e u_e) = 0. \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) est une contrainte permettant de calculer le potentiel  $\phi$ . Nous verrons au Chapitre 4 qu'on peut établir une équation elliptique pour le potentiel. La deuxième formulation du modèle quasi-neutre à courant non nul, appelée formulation 1.5-fluides est obtenue à partir de la formulation 2-fluides contraints. Elle consiste tout d'abord à tirer partie de la quasi-neutralité et donc à ne garder qu'une équation pour la densité dans le plasma, notée  $n = n_i = n_e$ . On écrit alors la conservation de la quantité de mouvement totale en gardant la vitesse ionique comme inconnue  $u_i$  et en introduisant la variable courant donnée par  $j = n_i u_i - n_e u_e$ . Enfin, on écrit une équation sur le courant obtenue en faisant la différence des équations de conservation de quantités de mouvement. On reporte au second membre les termes non classiquement présents dans les équations d'Euler en les traitant comme un terme de force issu d'un potentiel noté  $\psi$  et donné par  $\psi = -(p'_i(n)/(\gamma_i - 1) - p'_e(n)/(\varepsilon(\gamma_e - 1))) - (1 + 1/\varepsilon)\phi$ . La formulation 1.5-fluides

est donnée par

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu_i) = 0, \quad (3.26)$$

$$(1 + \varepsilon) [\partial_t (nu_i) + \nabla \cdot (nu_i \otimes u_i)] + \nabla (p_i + p_e) = \varepsilon n \nabla \psi, \quad (3.27)$$

$$\partial_t j + \nabla \cdot (u_i \otimes j + j \otimes u_i - j \otimes j/n) = n \nabla \psi, \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot j = 0. \quad (3.29)$$

Le nouveau ‘‘potentiel’’  $\psi$  est scalaire et est déterminé par la contrainte de courant à divergence nulle (3.29). Comme précédemment une équation elliptique peut être déduite pour le calculer explicitement. L’opérateur associé aux membres de gauche des équations (3.26)-(3.28) est hyperbolique mais pas strictement hyperbolique. Si la dimension d’espace  $d = 1$ , on montre facilement que deux valeurs propres peuvent coïncider. Notons enfin pour terminer que l’équation (3.28) sur  $j$  ne découle pas d’une conservation physique, en particulier lorsque des chocs apparaissent, les relations de Rankine-Hugoniot ne sont pas nécessairement physiquement vraies.

La formulation 1-fluide, utilisée en une dimension d’espace dans le paragraphe précédent, s’obtient de la formulation 1.5-fluides en éliminant le ‘‘potentiel’’  $\psi$ , on obtient

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu_i) = 0, \quad (3.30)$$

$$(1 + \varepsilon) [\partial_t (nu_i) + \nabla \cdot (nu_i \otimes u_i)] + \nabla (p_i + p_e) - \varepsilon \nabla \cdot (u_i \otimes j + j \otimes u_i - j \otimes j/n) = \varepsilon \partial_t j, \quad (3.31)$$

$$\nabla \cdot j = 0. \quad (3.32)$$

Remarquons que ce modèle est mal posé en dimension supérieur à un. En effet, si  $d$  est la dimension de la variable d’espace, on a  $2 + d$  équations pour  $1 + 2d$  inconnues or  $2 + d = 1 + 2d$  si et seulement si  $d = 1$ . Enfin, je rappelle que ce système n’est que conditionnellement hyperbolique, le domaine d’hyperbolicité est caractérisé par  $n > n_H(j)$  où  $n_H$  est défini par (3.19).

Le but est de comparer ces différentes formulations afin de choisir la mieux adaptée à notre problème. On rappelle que le cas test d’expansion de plasma nécessite le couplage avec un modèle non quasi-neutre pour la description du faisceau. Afin d’éliminer la part de problèmes dus au couplage, on introduit un nouveau cas test. Il consiste en une perturbation périodique de faible amplitude d’un plasma quasi-neutre constant parcouru par un courant non nul. Cette configuration est décrite dans [7] comme génératrice d’une instabilité dite instabilité de Buneman due à la vitesse de dérive des électrons par rapport aux ions. Pour ce cas test, on sait calculer des solutions analytiques des modèles bifluide Euler-Poisson et quasi-neutre linéarisés autour de l’état constant. Ceci offre donc deux champs d’étude. Le premier est le calcul de zones de stabilité en fonction des paramètres pour chaque modèle linéarisé à l’aide d’une analyse modale. Le second est la comparaison des solutions numériques de chaque modèle avec la solution analytique des modèles linéarisés, et l’étude de la vitesse de convergence des schémas numériques.

On linéarise donc les modèles bifluide Euler-Poisson et quasi-neutre autour de l’état constant  $U^0 = (n_i^0 = 1, n_e^0 = 1, u_i^0 = 0, u_e^0 = u_D, E^0 = (-\partial_x \phi)^0 = 0)$ . Notons

que les différentes formulations du modèle quasi-neutre donnent les mêmes résultats. Je rappelle brièvement le principe de l'analyse modale. La perturbation initiale est périodique et supposée développable en série de Fourier. On cherche donc des solutions sous la forme  $U = \bar{U}(t) e^{ikx}$  où  $k \in \mathbb{R}$  est fixé par la condition initiale et où l'on note  $\bar{U} = (\bar{n}_i, \bar{n}_e, \bar{u}_i, \bar{u}_e, \bar{E})$ . On obtient ainsi un système différentiel à coefficients constant de matrice  $A$  qui dépend de  $k$ . Les solutions sont de la forme  $U(x, t) = \bar{U}(0) e^{At} e^{ikx}$ . Alors, on dit que le système est instable si la norme de  $U$  croît exponentiellement avec le temps c'est-à-dire lorsqu'une des valeurs propres de  $A(k)$  possède une partie réelle positive. De sorte que les modes stables correspondent à des quantités réelles, il est d'usage de ne pas travailler sur les valeurs propres  $\mu$  mais plutôt sur la pulsation propre  $\omega = i\mu$ . Les modes instables correspondent alors à des parties imaginaires de  $\omega$  négatives.

On montre les deux résultats suivants.

**Proposition 3.5** *La relation de dispersion, c'est-à-dire le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , du système bifluide Euler-Poisson linéarisé autour de  $U^0$ , est donnée par*

$$\lambda\eta = \frac{1}{\omega^2 - \gamma_i T_i^0 k^2} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - ku_D)^2 - \gamma_e T_e^0 k^2}, \quad (3.33)$$

où  $T_{i,e}^0 = p_{i,e}(n_{i,e}^0)/n_{i,e}^0$ . Si de plus  $T_i^0 = 0$ , on a

- Si  $u_D^2 > (1 + \varepsilon^{-1})\gamma_e T_e^0$ , alors  $\exists k^*$  tel que la solution est instable pour  $k < k^*$  et stable pour  $k \geq k^*$ .

- Si  $\varepsilon^{-1}\gamma_e T_e^0 < u_D^2 < (1 + \varepsilon^{-1})\gamma_e T_e^0$ , alors  $\exists k_1, k_2$  tels que la solution est instable pour  $k \in ]k_1, k_2[$  et stable sinon.

- Si  $u_D^2 < \varepsilon^{-1}\gamma_e T_e^0$  alors la solution est inconditionnellement stable.

**Proposition 3.6** *La relation de dispersion du modèle quasi-neutre linéarisé autour de  $U^0$ , est donnée par*

$$0 = \frac{1}{\omega^2 - \gamma_i T_i^0 k^2} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - ku_D)^2 - \gamma_e T_e^0 k^2}. \quad (3.34)$$

De plus, on a

- Si  $u_D^2 > (1 + \varepsilon^{-1})(\gamma_i T_i^0 + \gamma_e T_e^0)$ , la solution est instable pour tout  $k$ .

- Si  $u_D^2 \leq (1 + \varepsilon^{-1})(\gamma_i T_i^0 + \gamma_e T_e^0)$ , la solution est inconditionnellement stable.

Remarquons tout d'abord que la limite  $\lambda\eta \rightarrow 0$  de la relation de dispersion du modèle bifluide donne celle du modèle quasi-neutre. De plus, résoudre (en  $\omega$ ) la relation de dispersion (3.33), revient à chercher les racines d'un polynôme de degré 4 alors que pour le modèle quasi-neutre le polynôme (3.34), n'est que de degré 2. La limite quasi-neutre filtre donc deux modes non quasi-neutres pour ne conserver que deux modes quasi-neutres. De plus, si  $\gamma_i = \gamma_e = \gamma$ , la condition  $u_D^2 \leq (1 + \varepsilon^{-1})(\gamma_i T_i^0 + \gamma_e T_e^0)$  peut encore s'écrire

$$n_{i0} = n_{e0} = n_0 \geq \left( \frac{\varepsilon(n_0 u_D)^2}{(1 + \varepsilon)(C_i + C_e)\gamma} \right)^{1/(\gamma+1)}.$$

On retrouve exactement la condition d'hyperbolicité du modèle 1-fluide (voir (3.19)). Cette analyse étant valide pour les trois formulations quasi-neutre, on constate d'ores et déjà qu'il ne sera pas possible de résoudre la perte d'hyperbolicité en changeant de formulation. En effet, la condition d'hyperbolicité du modèle 1-fluide coïncide exactement avec la stabilité linéaire, et donc la validité, du modèle quasi-neutre à courant non nul. Dans le cas test d'expansion de plasma, cette instabilité apparaît près de l'interface lorsque celle-ci est suffisamment avancée dans le domaine. Notons que plus l'interface est près de l'anode, plus le courant est important. En effet, la différence de potentiel se retrouve en quasi totalité dans l'espace interface-anode. Ainsi, plus cette distance est petite, plus le champ électrique est grand et donc plus l'émission électronique, et donc le courant, sont importants. Dans ces conditions les modes non quasi-neutres sont très certainement excités, ce qui ne peut pas être décrit par le modèle quasi-neutre.

Nous avons effectué des tests numériques sur les modèles non linéaires qui confirment ces résultats. Tout d'abord, afin de sélectionner la meilleure formulation du modèle quasi-neutre lorsqu'il est valide, nous comparons celles-ci pour un cas test de perturbation périodique correspondant à un cas stable pour tous les modèles. Les paramètres sont issus de la physique d'arcs dans les plasmas (voir [9], [37]). On pose  $\gamma_i = \gamma_e = 5/3$ ,  $C_i = C_e = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\sqrt{\lambda\eta} = 10^{-3}$  et  $u_D = 1$ . La perturbation initiale est choisie telle que  $k = 2\pi$  et  $\bar{U}(t=0) = (\bar{n}_i, \bar{n}_e, \bar{u}_i, \bar{u}_e, \bar{E})(t=0) = (0, 0, 10^{-2}, 10^{-2}, 0)$ . Il est important de noter que ces paramètres donnent les valeurs suivantes de la fréquence plasma  $\omega_p$  et de la vitesse du son  $v_s$  adimensionnées

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\lambda\eta}} = 10^5, \quad v_s = \left( \frac{\gamma_i T_i^0 + \gamma_e T_e^0}{1 + \varepsilon} \right)^{1/2} = 11.47.$$

Les valeurs  $\pm\omega_p$  et  $\pm kv_s$  correspondent aux racines  $\omega$ , calculées par une méthode QR, de la relation de dispersion du modèle biffuide Euler-Poisson linéarisé (3.33). Ces racines sont réelles, ce qui correspond à un régime stable. Notons enfin que les modes hautes fréquences sont liés à la fréquence plasma alors que les modes basses fréquences sont liés à la vitesse du son dans le plasma. Les racines de la relation de dispersion (3.34), du modèle quasi-neutre linéarisé se calculent explicitement et sont données par  $\omega \simeq \pm kv_s$ . Elles correspondent à un cas stable. On voit que le modèle quasi-neutre ne conservent que les modes basses fréquences associés à la vitesse du son et réduit donc de manière radicale la singularité du problème.

La discrétisation en espace est de type volumes finis. Le modèle 2-fluides contraints est délicat à discrétiser, en effet la quasi-neutralité n'est pas intrinsèquement inscrite dans le modèle et numériquement celle-ci ne peut avoir lieu qu'à une erreur près liée à l'ordre du schéma. Nous utilisons deux solveurs de type Roe différents : le solveur HLLE (voir [51]) et le solveur polynômial de degré 2 (voir [17]). On montre dans [A2] que le solveur HLLE a la particularité de conserver de manière exacte la quasi-neutralité si celle-ci est imposée initialement. Ce n'est pas le cas du solveur polynômial, nous avons donc tenté deux discrétisations pour ce solveur : une discrétisation avec une étape de reprojexion de la densité, imposant ainsi la quasi-neutralité exacte et une discrétisation sans l'étape de reprojexion avec seulement une approximation de la quasi-neutralité. Nous avons comparé ces différentes

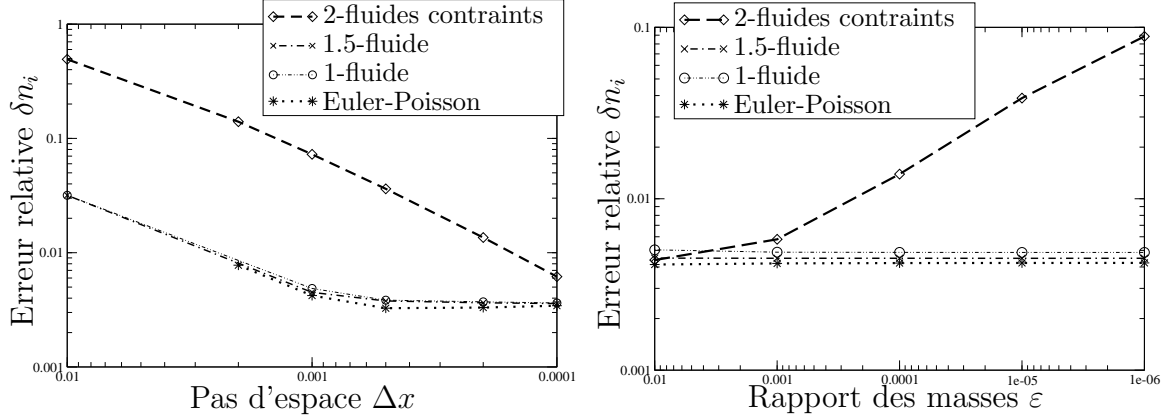


Figure 3.5: Erreur relative sur la densité des ions au temps adimensionné  $t = 0.12$ , à gauche en fonction du pas d'espace  $\Delta x$  et à droite en fonction du rapport des masses  $\varepsilon$  pour un pas d'espace fixé à  $\Delta x = 10^{-3}$ .

discrétisations du modèle quasi-neutre 2-fluides contraints et contre toute attente, les meilleurs résultats sont obtenus pour le solveur polynômial sans reprojection c'est-à-dire le seul n'assurant pas la quasi-neutralité exacte. Les résultats sont présentés dans [A1]. Nous utilisons donc ce solveur pour comparer les différentes formulations du modèle quasi-neutre au modèle bifluide Euler-Poisson. Les résultats sont donnés par la Figure 3.5. Nous calculons l'erreur relative entre la solution approchée d'une formulation donnée et la solution analytique exacte du système linéarisé. Sur la Figure 3.5 à gauche, on voit clairement que l'erreur diminue avec le pas d'espace avec une saturation à une valeur finie correspondant très certainement à la différence entre les systèmes linéaire et non linéaire. On peut toutefois utiliser ces résultats avant la saturation pour comparer les différentes formulations du modèle quasi-neutre. Il apparaît clairement que les discrétisations sont d'ordre 1 et que la formulation 2-fluides contraints donnent les moins bons résultats. La Figure 3.5 à droite montre que l'ordre de convergence de la discrétisation de la formulation 2-fluides contraints est en  $\mathcal{O}(\Delta x/\sqrt{\varepsilon})$  alors que celles des formulations 1.5 et 1-fluide(s) ainsi que celle du modèle Euler-Poisson sont en  $\mathcal{O}(\Delta x)$ . Ceci est lié au fait que  $\varepsilon$  multiplie les termes de dérivées en temps dans l'équation de conservation de quantité de mouvement des électrons. On a donc un mauvais conditionnement de cette équation. Dans les autres formulations,  $\varepsilon$  n'apparaît jamais seul, c'est le facteur  $1 + \varepsilon$  qui est présent, et ce problème de mauvais conditionnement n'existe pas.

Le deuxième cas test est celui de l'expansion de plasma entre deux électrodes. Les résultats des simulations sont donnés dans [A2]. Ils confirment les résultats obtenus d'une part par l'analyse modale : lorsque la formulation 1-fluide perd son hyperbolicité, les formulations 2-fluides contraints et 1.5-fluides développent très vite des instabilités numériques. D'autre part ces simulations confirment également que la formulation donnant les meilleurs résultats est la formulation 1.5-fluide.

Au vue de ce travail, il apparaît nécessaire de développer un modèle permettant de décrire les modes non quasi-neutres dans les situations où ceux-ci ne peuvent

être ignorés partout (gainés près du bord ou de l'interface). Pour cela, nous avons commencé à travailler sur un modèle de mélanges fictifs. Ces méthodes sont très utilisées en mécanique des fluides (voir [1, 43, 42], [45]). Se faisant nous avons trouvé une autre réponse. Elle consiste en un schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre et asymptotiquement stable pour le modèle bifluide Euler-Poisson, c'est ce que je décris dans le Chapitre 4.

Mais avant cela, je termine ce chapitre en présentant des extensions d'études au cas d'Euler complet ainsi qu'au cas de la dimension deux en espace.

### 3.5 Extension au cas d'Euler complet

Nous avons réalisé deux extensions aux cas d'Euler complet. La première concerne le modèle quasi-neutre à courant nul (3.16) présenté dans le paragraphe 3.3.2. Cette extension se fait sans grandes difficultés supplémentaires par rapport au cas isentropique. Ces travaux sont publiés dans des comptes rendus de conférences [CR2].

La deuxième extension concerne le modèle quasi-neutre à courant non nul. Ce cas nécessite plus de travail. Je décris ci-dessous cette étude qui est publiée dans [A5]. Dans les travaux décrits dans les paragraphes précédents, nous avons considéré le plasma injecté à la cathode et, l'émission se faisant de l'interface vers l'anode, on a alors un faisceau électronique. Ici, nous traitons également le cas d'une injection à l'anode et donc d'un faisceau ionique. Nous faisons l'analyse dans le cas du faisceau ionique et réalisons des simulations numériques dans les deux cas.

Le point de départ est le modèle bifluide Euler complet-Poisson. Je me place d'emblée avec des variables adimensionnées, je renvoie à [A5] pour l'adimensionnement. De plus, on redimensionne le potentiel comme dans le paragraphe précédent. Ceci présente l'avantage de faire apparaître de manière explicite la longueur de Debye adimensionnée dans le modèle. Celle-ci est notée  $\lambda$  contrairement aux paragraphes précédents où la longueur de Debye était donnée par  $\sqrt{\lambda\eta}$ . C'est aussi la notation utilisée dans le chapitre suivant. En notant  $\lambda_D$  la longueur de Debye, donnée par (3.6), et  $L$  l'échelle de longueur macroscopique, on a donc ici

$$\lambda = \lambda_D/L. \quad (3.35)$$

Les quantités sont respectivement indicées par  $i$  et  $e$  pour les ions et les électrons. Les densités, vitesses, pressions et énergies totales des particules sont notées  $n_{i,e}$ ,  $u_{i,e}$ ,  $p_{i,e}$  et  $w_{i,e}$ . Les lois d'états adimensionnées sont données par

$$w_i = \frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i |u_i|^2}{2}, \quad w_e = \frac{p_e}{\gamma_e - 1} + \frac{\varepsilon n_e |u_e|^2}{2}.$$

Le modèle bifluide Euler complet-Poisson adimensionné s'écrit

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, \quad \partial_t (n_i u_i) + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = -n_i \nabla \phi, \quad (3.36)$$

$$\partial_t w_i + \nabla \cdot ((w_i + p_i) u_i) = -n_i u_i \cdot \nabla \phi, \quad (3.37)$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, \quad \varepsilon \left( \partial_t (n_e u_e) + \nabla \cdot (n_e u_e \otimes u_e) \right) + \nabla p_e = n_e \nabla \phi, \quad (3.38)$$

$$\partial_t w_e + \nabla \cdot ((w_e + p_e) u_e) = n_e u_e \cdot \nabla \phi, \quad (3.39)$$

$$-\lambda^2 \Delta \phi = n_i - n_e. \quad (3.40)$$

Le paramètre  $\lambda$  est la longueur de Debye adimensionnée donnée par (3.35) et  $\varepsilon$  est, comme précédemment, le rapport des masses donné par  $\varepsilon = m_e/m_i$ , où  $m_i$  et  $m_e$  sont les masses des ions et des électrons. Comme dans le cas isentropique la limite quasi-neutre formelle,  $\lambda \rightarrow 0$ , peut être écrite en utilisant trois formulations. La formulation 2-fluides contraints qui est strictement hyperbolique, la formulation 1.5-fluides qui n'est qu'hyperbolique et la formulation 1-fluide qui est conditionnellement hyperbolique. Cette dernière formulation présente l'avantage de contenir toute l'information du modèle quasi-neutre dans l'opérateur hyperbolique. En effet, dans le cas isentropique on a vu que le domaine d'hyperbolicité coïncide avec le domaine de validité du modèle quasi-neutre. C'est donc cette formulation que nous étudions dans [A5]. La première différence essentielle avec le cas isentropique est que la formulation 1-fluide n'est pas conservative (c'est aussi le cas de la formulation 1.5-fluides). Les termes non conservatifs sont présents dans les équations d'énergies et liés au flux d'énergie dû à l'émission de particules dans le faisceau. Je rappelle qu'ici nous considérons une émission ionique mais les résultats sont identiques dans le cas d'une émission électronique. La présence de ces termes non conservatifs impose que ce modèle ne peut être utilisé que pour des solutions régulières. Ceci est le cas pour le problème d'expansion de plasma puisque dans la bulle de plasma les quantités sont régulières.

Comme dans le cas isentropique, cette formulation est conditionnellement hyperbolique. La zone d'hyperbolicité est caractérisée par

$$\gamma_e p_e + \gamma_i p_i \geq \frac{\varepsilon j^2}{(1 + \varepsilon)n}. \quad (3.41)$$

Dans cette zone, la formulation possède quatre valeurs propres  $u_e$ ,  $u_i = u_e + j/n$  et  $u_{\pm} = u_p \pm c$ . La vitesse  $u_p$  est la vitesse moyenne dans le plasma donnée par  $u_p = (\varepsilon u_e + u_i)/(1 + \varepsilon)$  et  $c$  est la vitesse du son dans le plasma tenant compte des termes de pression dus au courant non nul

$$c = \left( \frac{1}{(1 + \varepsilon)n} \left( \gamma_e p_e + \gamma_i p_i - \frac{\varepsilon j^2}{(1 + \varepsilon)n} \right) \right)^{1/2}.$$

Le plasma est caractérisé par la présence d'électrons. Ainsi, la vitesse de la bulle de plasma est ici donnée par celle des électrons. Puisque des ions sont émis de l'interface vers la cathode, le courant à l'interface,  $j = n_i u_i - n_e u_e$ , est positif. Ainsi, les valeurs propres  $u_i$  et  $u_+$  sont toutes deux plus grandes que la vitesse de l'interface  $u_e$ . De plus, on montre que si  $\gamma_e p_e + \gamma_i p_i \in [\varepsilon j^2/((1 + \varepsilon)n), j^2/n]$  on a  $u_- \geq u_e$ . Dans ce cas l'interface est supersonique et aucune condition aux limites pour le modèle quasi-neutre n'est nécessaire à l'interface. En revanche, si  $\gamma_e p_e + \gamma_i p_i > j^2/n$  alors  $u_- < u_e$  et il est nécessaire d'imposer une condition aux limites à l'interface. Cette condition aux limites est précisée lors de la connexion avec le modèle de faisceau.

Pour décrire le faisceau, on procède comme dans le cas isentropique. Dans cette région seuls les ions sont présents. On considère le modèle un fluide Euler-Poisson constitué des équations relatives aux ions de (3.36)-(3.40) avec  $n_e = 0$  dans l'équation de Poisson. On redimensionne la vitesse des particules émises, les ions, et on passe

à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . On obtient le modèle de Child-Langmuir avec équation d'énergie pour les ions. Ce modèle possède une solution analytique en dimension une d'espace. La résolution de l'équation d'énergie montre que la loi de pression des ions dans le faisceau est isentropique,  $p_i(n) = C_i n^{\gamma_i}$ . La constante  $C_i$  est à déterminer à l'aide de la connexion avec le modèle de plasma, on a  $C_i = p_i(X(t), t)/n_i^{\gamma_i}(X(t), t)$ . On est donc ramené au cas isentropique et la solution est donnée par la Proposition 3.1 dans le cas monodimensionnel.

La connexion des deux modèles se fait en introduisant un problème de transmission. Ce problème est obtenu à partir du modèle Euler-Poisson (3.36)-(3.40) en zoomant près de l'interface, c'est-à-dire en redimensionnant la composante normale à l'interface de la variable position. Le modèle limite obtenu lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  est un modèle à une dimension ne faisant intervenir que la composante normale à l'interface de la variable position. On peut donc n'étudier le problème qu'en une dimension d'espace. Le problème de transmission obtenu diffère de celui étudié dans le cas isentropique par l'adjonction des équations d'énergie ionique et électronique. Ces équations montrent que dans la couche limite près de l'interface les pressions sont isentropiques. Le problème de transmission est donc équivalent (formellement) au problème de transmission isentropique. On note  $j$ ,  $n_-$ ,  $u_{e-}$ ,  $p_{i-}$ ,  $p_{e-}$  la solution du modèle quasi-neutre en  $X(t)$  et  $j_i$  et  $C_i$  le courant et la constante de pression dans le faisceau. En utilisant l'analyse décrite dans [A1], on a alors les relations de raccord suivantes:

$$dX/dt = u_e(X(t), t), \quad j(t) = j_i(t), \quad C_i = \frac{p_{i-}}{n_-^{\gamma_i}}, \quad \frac{j^2}{n_-} \geq \gamma_e p_{e-} + \gamma_i p_{i-}.$$

La dernière relation est le critère de Bohm qui stipule que le plasma doit être supersonique à l'interface. Je rappelle qu'on transforme ce critère en condition aux limites lorsque l'interface quitte le régime supersonique, en imposant  $j(t)^2/n(X(t), t) = \gamma_e p_e(X(t), t) + \gamma_i p_i(X(t), t)$ .

Le problème de transmission ne donnant pas le courant (comme dans le cas isentropique) on le fixe en supposant un régime de courant maximal pour le modèle de Child-Langmuir correspondant à un champ électrique nul à l'interface.

On présente des simulations numériques en une dimension d'espace. La discrétisation en espace est uniforme ( $\Delta x = \text{constante}$ ) sauf au voisinage de l'interface où le maillage suit l'interface. En une dimension d'espace le modèle de Child-Langmuir se résout analytiquement et le courant est alors connu dans tout le domaine. La formulation 1-fluide non conservative du modèle quasi-neutre est discrétisée en utilisant le schéma décentré amont en décomposant la jacobienne en sa partie positive et sa partie négative. Pour approcher de manière précise la vitesse de l'interface on résout un problème de Riemann plasma-vide pour le système quasi-neutre à courant non nul. L'analyse de ce problème est non classique de part la présence de termes de pressions additionnels par rapport au système d'Euler complet classique. Ces termes sont liés à l'émission d'ions dans le faisceau. Je renvoie à [A5] pour les détails.

On présente deux cas tests, un avec un faisceau ionique et un avec un faisceau électronique. Je ne présente ici que les résultats du premier cas test. Dans ce cas test les valeurs des paramètres adimensionnés sont donnés par  $\varepsilon = 2.7 \times 10^{-4}$  et



$\lambda = 4.2 \times 10^{-4}$ . Le maillage du modèle bifluide Euler-Poisson est constitué de 7000 mailles alors que celui du modèle quasi-neutre ne contient que 2000 mailles. Il n'est pas possible d'utiliser un maillage plus grossier pour le modèle bifluide sinon des instabilités apparaissent à l'interface plasma-faisceau. De plus, les temps calculs sont de soixante dix secondes pour le modèle asymptotique alors qu'ils sont de l'ordre de douze heures pour le modèle bifluide. On voit déjà que le gain en temps est très important.

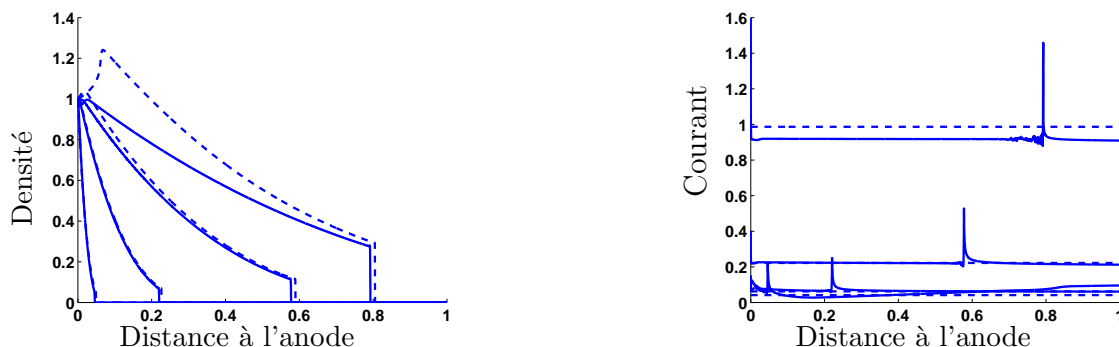


Figure 3.6: Les résultats sont donnés aux temps adimensionnés 0.01, 0.05, 0.15 et 0.3. À gauche : densité quasi-neutre dans le plasma donnée par le modèle Euler-Poisson (trait plein) et le modèle quasi-neutre (pointillés). À droite : courant dans le domaine donné par le modèle Euler-Poisson (trait plein) et le modèle de Child-Langmuir (pointillés).

La Figure 3.6 donne à gauche la densité dans le plasma et à droite le courant. Les résultats sont donnés par le modèle bifluide Euler-Poisson et le modèle asymptotique. On note une très bonne concordance des courbes au début de la simulation. En revanche, à la fin de la simulation, on observe des différences importantes. Tout d'abord, la position de l'interface calculée par le modèle quasi-neutre est légèrement en avance sur celle du modèle bifluide. De plus, la densité est trop importante au niveau de l'anode  $x = 0$ . Ces problèmes sont très certainement liés à la présence d'une couche limite à l'injection. Notons qu'ils étaient déjà présents dans le cas isentropique mais ils semblent amplifiés lorsque les équations de conservation d'énergie sont considérées. L'analyse de cette couche limite est détaillée dans le chapitre suivant.

Dans le deuxième cas test les résultats sont du même type mais la comparaison s'arrête beaucoup plus tôt car on perd l'hyperbolicité du modèle quasi-neutre. Dans le cas d'un faisceau d'électrons, la condition d'hyperbolicité et la connexion entre les deux modèles (critère de Bohm) imposent la condition suivante  $\gamma_e p_e + \gamma_i p_i \in [\varepsilon j^2 / ((1 + \varepsilon)n), \varepsilon j^2 / n]$ . La petitesse de  $\varepsilon$  donne donc un très petit intervalle de valeurs critiques. Ceci rend très instable la résolution numérique et explique pourquoi on perd l'hyperbolicité beaucoup plus tôt que dans le cas test précédent. Dans le paragraphe précédent, on a montré que la perte d'hyperbolicité correspond à une instabilité physique, appelée instabilité de Buneman. Cette instabilité apparaît lorsque l'interface se rapproche de l'anode et que le courant dans le plasma atteint des valeurs élevées. Dans ce cas, les modes non quasi-neutres sont excités et le modèle quasi-

neutre ne peut pas les décrire. Pour ces situations particulières, le problème peut être résolu en utilisant le modèle d'Euler-Poisson et en le discrétisant avec un schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre. Un tel schéma a été développé pour le cas isentropique, voir Chapitre 4. L'extension de ce schéma au cas d'Euler complet a été réalisée et est en cours de test et de rédaction.

### 3.6 Vers une modélisation bidimensionnelle

Je présente dans ce paragraphe les résultats publiés dans [A6]. Ils concernent une extension du modèle à courant nul en dimension deux d'espace.

En dimension deux d'espace, l'interface plasma-faisceau n'est plus un point mais une courbe. Il est donc plus difficile numériquement de la localiser précisément. Dans ce travail, l'objectif est de se focaliser sur le problème du suivi d'interface et non pas sur les problèmes de modélisation que nous avons étudiés en détails dans les précédents travaux. Le modèle à courant nul donne une moins bonne approximation du modèle bifluide Euler-Poisson comparé au modèle à courant non nul. En revanche, il est beaucoup plus facile à discrétiser essentiellement parce qu'il ne nécessite pas le calcul du courant dans le plasma. C'est pourquoi nous avons choisi d'étendre ce modèle en dimension deux.

Le modèle asymptotique est alors constitué des équations d'Euler isentropique dans la bulle de plasma. Elles portent sur la densité quasi-neutre  $n$  et la quantité de mouvement totale  $(m_i + m_e)u$ , où  $m_i$  et  $m_e$  sont les masses des ions et des électrons. Pour décrire le faisceau, on utilise un modèle simplifié de type Child-Langmuir. Il consiste à écrire que les électrons émis dans le faisceau, suivent une loi monodimensionnelle de Child-Langmuir le long de leur trajectoire. Nous approchons ces trajectoires par des arcs de cercles. Ces modèles sont reliés à l'interface plasma-faisceau par des termes de forces de pression modélisant la réaction du faisceau sur le plasma lors de l'émission électronique. De plus, la dynamique de l'interface est donnée par la vitesse ionique  $u$ .

On se concentre alors sur la méthode numérique du suivi de l'interface. On considère ce problème comme un problème d'interface entre deux fluides : le plasma et le vide de plasma. Nous utilisons une méthode de type V.O.F. (Volume Of Fluid). Cette méthode est Eulerienne, c'est-à-dire qu'on se donne un maillage fixe au départ et qu'on le conserve jusqu'au bout. Le principe des méthodes V.O.F. est le suivant, voir [27], [55]. On suit l'interface au travers de la fraction volumique de plasma dans chaque cellule du maillage. Pour chaque pas de temps et chaque cellule du maillage, les inconnues sont alors la fraction volumique de plasma et les quantités fluides (ici les densité et vitesse) moyennées sur la cellule.

On utilise de plus une méthode par direction alternée en décomposant le système pour séparer les transports dans les directions des abscisse  $x$  et ordonnée  $y$ . Ainsi, à chaque itération la méthode V.O.F. qu'on utilise, se décompose en deux fois deux étapes appliquées tour à tour dans les directions  $x$  et  $y$ . La première étape est l'advection des quantités fluides, moyennées, à l'aide d'un schéma Lagrangien. Au cours de la seconde étape on reprojette ces quantités sur la grille Eulerienne et on

remet à jour les fractions volumiques de plasma. Or, dans les mailles mixtes, i.e. celles contenant à la fois du plasma et du vide, cette remise à jour nécessite de connaître la quantité de plasma passant d'une maille à l'autre. On utilise pour cela l'algorithme S.L.I.C. (pour Simple Line Interface Calculation, [35]) qui permet de définir les priorités de transfert de plasma entre les cellules

L'une des difficultés liées à notre problème est la prise en compte au niveau discret de la force de pression à l'interface, exercée par le faisceau sur le plasma. Cette prise en compte nécessite de décomposer la force de pression dans les directions  $x$  et  $y$ . Il faut donc reconstruire une normale à l'interface, dans chaque maille concernée. Pour cela, nous utilisons alors la méthode de Young, [56] qui donne une représentation oblique de l'interface.

Nous présentons des résultats numériques sur deux cas test. Le premier consiste

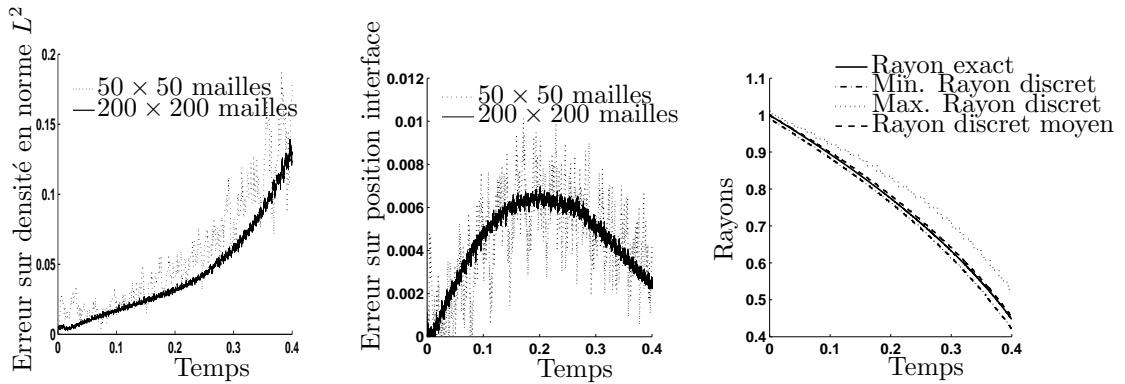


Figure 3.7: À gauche et au milieu : Erreurs relatives en norme  $L^2$  sur la densité du fluide (à gauche) et en valeur absolue sur la position de l'interface fluide-vide (au milieu) en fonction du temps pour différents maillages : en trait plein pour  $\Delta x = \Delta y = 2/200$  et en pointillés pour  $\Delta x = \Delta y = 2/50$ . À droite : rayons exact et approchés de la bulle de fluide en fonction du temps pour  $\Delta x = \Delta y = 2/100$ . Les valeurs approchées sont le minimum (points-tirets), le maximum (pointillés), la valeur moyenne (tirets).

en la compression d'un fluide sur le point  $(0,0)$ . La compression est due à une pression uniforme exercée sur le bord du domaine supposé initialement être une boule de centre  $(0,0)$ . Nous connaissons une solution analytique de ce problème, elle est donnée dans [4] et [A6]. Ceci nous permet de vérifier la précision de notre méthode ainsi que la bonne prise en compte des termes de pressions à l'interface. La Figure 3.7 donne, à gauche, l'erreur relative entre la solution exacte et la solution approchée par le schéma V.O.F. en norme  $L^2$ . La solution numérique converge vers la solution exacte lorsque le maillage est raffiné. La Figure 3.7 donne au milieu l'erreur relative entre les rayons exact et approché et à droite une comparaison entre le rayon exact et différentes valeurs du rayon approché : le rayon moyen utilisé dans la figure du milieu, le minimum et le maximum. La valeur moyenne donne une assez bonne représentation du rayon au cours temps, en revanche l'écart type augmente au cours de la simulation. L'approximation reste toutefois très bonne. En effet, même avec un maillage assez grossier ( $50 \times 50$  mailles) l'erreur relative sur le rayon est de l'ordre

de un pour cent. Cette propriété est très importante pour les simulations du cas test d'expansion de plasma car la bonne prédiction du courant dans le domaine est conditionnée par le bon positionnement de l'interface.

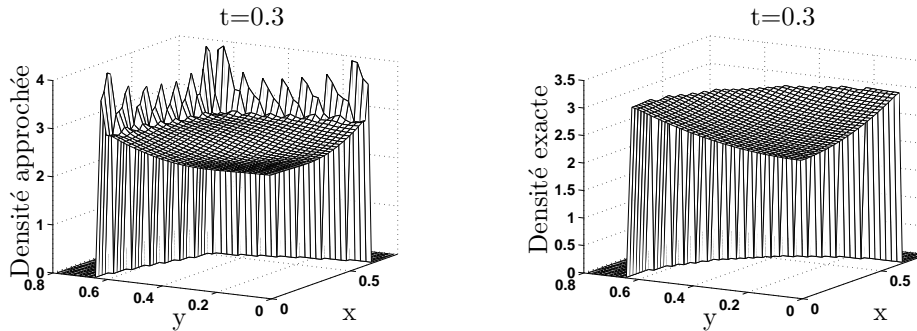


Figure 3.8: À gauche : densité approchée, donnée par le schéma V.O.F. au temps  $t=0.3$  pour  $\Delta x = \Delta y = 2/100$ . À droite : densité exacte donnée par la solution analytique et projetée sur le maillage au temps  $t=0.3$ .

La Figure 3.8 montre à gauche la densité approchée et à droite la densité exacte, au temps  $t = 0.3$ . Le temps final de compression est de 0.5. On est donc à plus de la moitié du processus de compression total. On peut voir que l'erreur est importante sur le bord du domaine mais très faible à l'intérieur. La Figure 3.9 présente la bulle de fluide à différents temps de la simulation. En haut les résultats sont donnés par la méthode V.O.F. pour  $\Delta x = \Delta y = 2/50$ , au milieu par la méthode V.O.F. pour  $\Delta x = \Delta y = 2/200$  et en bas par la solution exacte projetée sur un maillage intermédiaire  $\Delta x = \Delta y = 2/100$ . On voit que l'erreur sur le bord, précédemment notée sur la densité, est très certainement due à une représentation trop cartésienne de la bulle. En effet, les bulles approchées sont quasiment carrées alors que la bulle exacte est circulaire. Cette erreur est due à deux points particuliers dans la discrétisation qui privilégie les déformations cartésiennes. Tout d'abord le splitting du système décomposant les transports dans les directions  $x$  et  $y$  et ensuite l'algorithme S.L.I.C., utilisé pour l'étape de projection, donne une représentation cartésienne de l'interface. La convergence vers une bulle circulaire semble assez lente puisque le passage de  $\Delta x = \Delta y = 2/50$  à  $\Delta x = \Delta y = 2/200$ , correspondant à un nombre de cellules multiplié par 16, montre une amélioration peu importante. Ce point peut être amélioré en ne décomposant pas le transport dans les directions  $x$  et  $y$  et en utilisant dans l'étape de projection un algorithme donnant une représentation oblique de l'interface comme par exemple celui proposé dans [56] par D.L. Youngs. Il est toutefois important de noter que malgré ces erreurs, la Figure 3.9 montre que la solution numérique capte bien le comportement de la solution exacte et surtout le **bon temps de compression**. En effet, à exactement  $t = 0.5$ , la bulle numérique disparaît comme le fait la bulle exacte.

Le deuxième cas test est celui de l'expansion d'une bulle de plasma entre deux électrodes relié aux diodes à forts courants. Le domaine est supposé carré et les diodes planes sont situées en  $x = 0$  et  $x = 1$ . Le plasma est injecté sur une partie

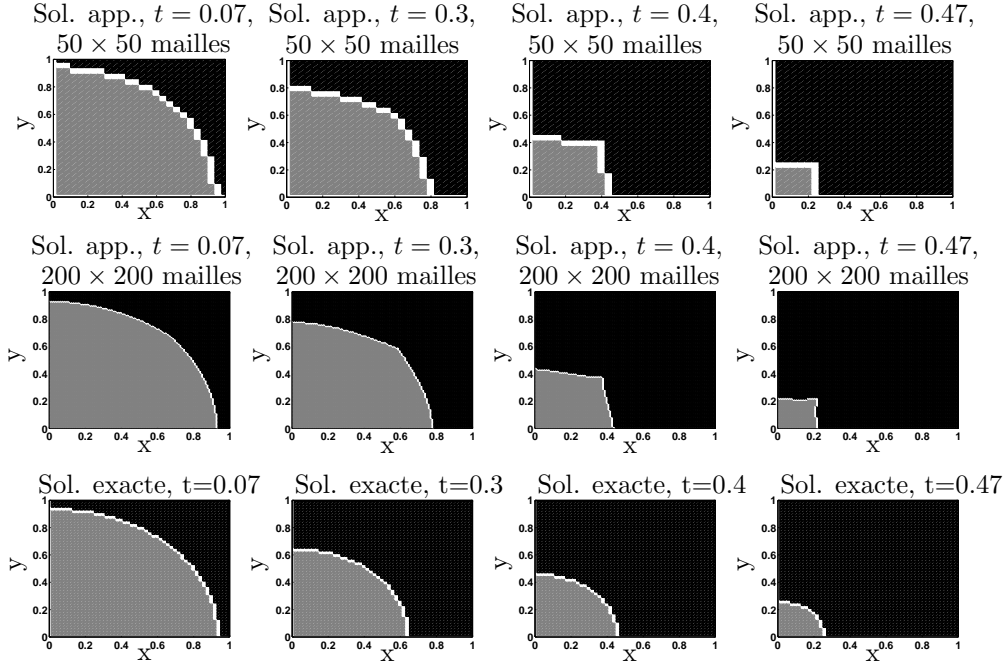


Figure 3.9: Bulle de fluide au temps  $t = 0.07, t = 0.3, t = 0.4$  et  $t = 0.47$ . On peut voir différents types de cellules : en gris, les mailles pleines de plasma, en blanc, les mailles mixtes contenant à la fois du plasma et du vide et en noir, les mailles vides de plasma. En haut et au milieu, les résultats sont calculés avec le schéma V.O.F. avec  $\Delta x = \Delta y = 2/50$  (en haut) et avec  $\Delta x = \Delta y = 2/200$  (au milieu). En bas : les résultats sont donnés par la solution exacte projetée sur le maillage avec  $\Delta x = \Delta y = 2/100$ .

de la cathode en  $x = 0$ . Le domaine est alors discrétisé avec un maillage carré de pas  $\Delta x = \Delta y = 1/100$ . La Figure 3.10 présente la densité dans la région du plasma aux temps adimensionnés  $t = 0.20$  et  $t = 0.40$ . La bulle de plasma se détend entre la cathode et l'anode. Elle est ralentie par la force de réaction exercée sur son interface due à l'émission électronique dans le faisceau. On observe que cette force oblige la bulle de plasma à rester bien connexe, aucune instabilité n'apparaît à l'interface. De plus, le front de plasma est assez raide et on retrouve comme dans le cas monodimensionnel le pic de densité non physique à l'interface dû au modèle à courant nul. Je rappelle que ce problème peut être corrigé en utilisant le modèle quasi-neutre à courant non nul.

### 3.7 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre j'ai présenté la modélisation mathématique et numérique de l'expansion d'une bulle de plasma quasi-neutre entre deux électrodes. Ce modèle a été étudié afin d'établir son domaine de validité et son caractère bien posé en dimension

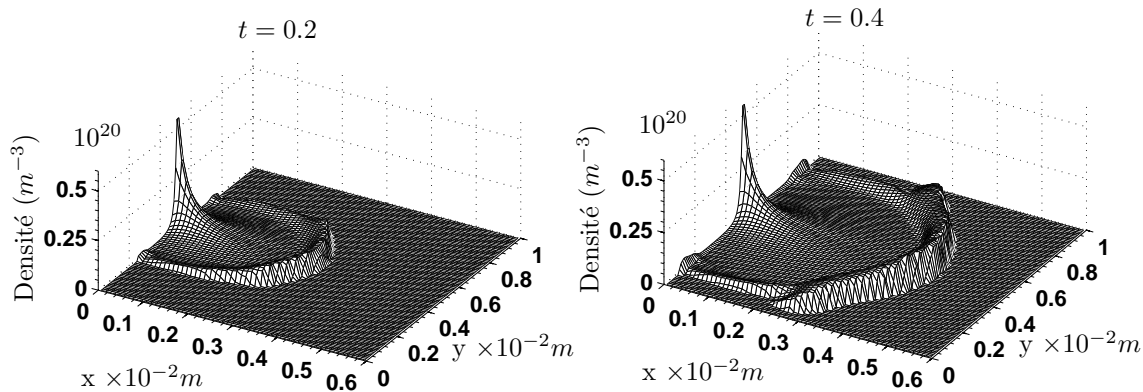


Figure 3.10: Densité dans le plasma aux temps adimensionnés  $t = 0.2$  et  $t = 0.4$ . La solution est calculée avec la méthode V.O.F. sur un maillage carré contenant  $100 \times 100$  mailles.

quelconque. Son extension au système d'Euler complet a été présentée. Un premier pas vers des simulations bidimensionnelles est décrit. Plusieurs perspectives sont envisageables à la suite de ce travail.

Tout d'abord la complexité des méthodes de suivi d'interface en dimension deux ou trois ainsi que le besoin de relaxer le modèle quasi-neutre au voisinage de l'interface nous ont guidés vers des techniques de mélange de modèles (voir par exemple [6] ou [42]). Ces techniques consistent à établir un modèle global de mélange à partir de deux modèles valides chacun dans des zones distinctes. Ce mélange de modèle est basé sur l'introduction d'une fonction indicatrice régularisée  $\alpha$  telle que  $\alpha = 1$  dans l'une des deux zones et  $\alpha = 0$  dans l'autre zone. L'interface est alors régularisée et correspond aux valeurs de  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ . Dans notre cas la première zone est le plasma et la deuxième le faisceau. Ainsi, on peut décomposer la solution du modèle Euler-Poisson en une composante plasma et une composante faisceau. La limite asymptotique quasi-neutre peut alors être appliquée pour la composante plasma, puis la solution est reconstruite. Cette technique de passage à la limite dans une seule partie du domaine a été introduite dans [16] pour des couplages cinétiques fluides. La difficulté pour ce type de méthode est la reconstruction de la solution dans la zone de "mélange" c'est-à-dire lorsque  $\alpha \in ]0, 1[$ . Notons toutefois que la voie du schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre pour Euler-Poisson décrit dans le chapitre suivant, réalise le même travail au niveau de la discrétisation.

Une autre perspective concerne les conditions aux limites au point d'injection. En effet, nous avons vu, dans les simulations numériques, que les conditions aux limites du modèle bifluide Euler-Poisson ne sont pas bien préparées au régime quasi-neutre. Celles-ci génèrent une couche limite dans le modèle asymptotique au point d'injection. Cette couche limite se révèle encore plus pénalisante lorsque le système d'Euler complet est considéré. Ce problème de couche limite est étudié en une dimension d'espace dans le chapitre suivant et des conditions aux limites bien préparées sont déterminées. Il serait intéressant d'utiliser ces conditions aux limites pour le modèle asymptotique présenté ici et de les étendre en dimensions supérieures.

## Chapitre 4

# Schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre et problème de couche limite

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, je décris les travaux publiés dans [N5], [A4], [A7] et [A8]. Ils ont été réalisés en collaboration avec Pierre Crispel, Pierre Degond, Jian-Guo Liu et Dominique Savelief. Ces travaux concernent l'établissement d'un schéma asymptotiquement stable et consistant dans la limite quasi-neutre pour un modèle fluide de plasma.

Bien que la méthodologie s'étende aisément à des modèles contenant plus de deux espèces, pour des raisons de clarté on ne considère ici un plasma constitué que d'une seule espèce d'ions et d'électrons. Le modèle consiste alors en un système d'Euler isentropique pour chaque espèce de particules couplés avec l'équation de Poisson.

Les schémas classiquement utilisés pour discrétiser ce système sont sujet à des contraintes numériques très sévères. Elles sont liées à deux grandeurs très connues en physique des plasmas (voir [7, 28]) qui sont la longueur de Debye et la période plasma. Bien que ces grandeurs aient déjà été présentées dans le paragraphe précédent, je rappelle ici leur définition ainsi que leur signification physique. La longueur de Debye, notée  $\lambda_D$  et la période plasma, notée  $\tau_p$  sont données par

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T_0}{e^2 n_0} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tau_p = \left( \frac{\epsilon_0 m_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T_0$  et  $n_0$  sont la température et la densité typiques dans le plasma,  $e > 0$  est la charge élémentaire et  $m_e$  est la masse des électrons. La longueur de Debye mesure l'échelle à laquelle les interactions électriques ont lieu dans le plasma. En effet, ces interactions sont telles qu'une charge donnée dans le plasma est écrantée par les autres charges dans le plasma au delà de la longueur de Debye. La deuxième grandeur est une échelle de temps. Elle est liée aux déséquilibres de charges dans le plasma. Les interactions électriques entre les particules entraînent des déséquilibres de charges locaux, à l'échelle de la longueur de Debye. Les forces électrostatiques cherchent alors à ramener les particules vers leur position d'équilibre. Les particules se mettent à osciller autour de cette position.

Les électrons étant beaucoup plus légers que les ions, leur période d'oscillations est plus petite et tient donc une place prédominante. C'est donc la période d'oscillations des électrons que l'on appelle la période plasma.

Dans [23], S. Fabre montre que les discrétisations classiques du système d'Euler-Poisson linéarisé doivent résoudre l'échelle de la période plasma pour éviter la formation d'instabilités numériques. Or, dans les zones quasi-neutres, où la longueur de Debye et la période plasma sont très petites, cette contrainte rend les simulations numériques très coûteuses.

Deux solutions sont envisageables pour s'affranchir de cette contrainte. La première consiste à utiliser un modèle quasi-neutre dans les zones où la longueur de Debye est petite. Cette approche est particulièrement adaptée aux problèmes où le domaine est entièrement quasi-neutre. En revanche, lorsque le domaine est constitué à la fois de zones quasi-neutres et non quasi-neutres il est nécessaire d'utiliser pour les zones non quasi-neutres un modèle différent. Il faut alors déterminer l'interface entre les deux modèles et connecter ces derniers à l'interface. Notons de plus, que très souvent l'interface est mobile, et il est donc nécessaire de déterminer la dynamique de l'interface. Cette approche a été développée dans le chapitre précédent pour un cas test d'expansion de plasma entre deux électrodes et nous avons constaté les difficultés rencontrées avec cette approche.

La deuxième solution consiste à trouver une discrétisation du modèle d'Euler-Poisson préservant l'asymptotique quasi-neutre tout en n'étant pas obligé de résoudre les petites échelles. Un schéma de ce type est présenté et testé numériquement dans [A4], nous l'appelons schéma AP pour "Asymptotic Preserving". Ces travaux sont présentés dans le paragraphe 4.2.

L'analyse de stabilité de ce schéma pour le système d'Euler-Poisson linéarisé autour d'une solution constante est réalisée dans [A7] et décrite dans le paragraphe 4.3. Cette analyse confirme la stabilité asymptotique du schéma.

Dans [A4], deux cas tests numériques en une dimension d'espace sont présentés. Le premier est un cas test de perturbation périodique d'une solution quasi-neutre constante. Le second cas test est celui de l'expansion d'une bulle de plasma entre deux électrodes présentés en détails dans le chapitre précédent. Les simulations sont réalisées en utilisant le solveur de Lax-Friedrichs modifié qui est bien connu pour être très diffusif mais qui est aussi très robuste et donc bien adapté à une étape de validation. Le passage à des solveurs de type Roe plus généraux donne des résultats identiques pour le premier cas test. Notons que pour ce cas test les conditions aux limites des quantités fluides sont périodiques. En revanche, dans le second cas test, le schéma AP ainsi que le schéma classique développent des instabilités numériques lorsque le pas d'espace de la discrétisation ne résout pas la longueur de Debye pour des solveurs plus généraux. Or, cette contrainte est tout aussi pénalisante que celle liée à la période plasma car la longueur de Debye est très petite dans les zones quasi-neutres. Dans le paragraphe 4.4, qui décrit les travaux soumis pour publication dans [A8], je montre numériquement que ces instabilités sont liées à la présence d'une couche limite au point d'injection. L'étude de cette couche limite permet de déterminer des conditions aux limites préparées au régime quasi-neutre. Je présente alors des simulations numériques qui montrent que ces conditions permettent de stabiliser les



schémas AP et classique pour des solveurs généraux sans résoudre la longueur de Debye.

## 4.2 Un schéma asymptotiquement consistant et stable dans la limite quasi-neutre pour le système d'Euler-Poisson

Je décris dans ce paragraphe les résultats publiés dans [N5] et [A4].

### 4.2.1 Le modèle d'Euler-Poisson et sa limite quasi-neutre

On considère un plasma constitué d'une seule espèce d'ions et d'électrons. On utilise un modèle fluide, ainsi, les particules sont décrites par leur densité,  $n_{i,e}(x, t)$  et leur quantité de mouvement,  $q_{e,i}(x, t)$  où  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  ou  $3$ , est la variable d'espace et  $t > 0$  est le temps. On se place d'emblée en variables adimensionnées, l'étape d'adimensionnement est décrite dans [A4] ainsi qu'au chapitre précédent. Le modèle d'Euler-Poisson adimensionné est donné par

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot q_i = 0, \quad \partial_t n_e + \nabla \cdot q_e = 0, \quad (4.2)$$

$$\partial_t q_i + \nabla f_i = -n_i \nabla \phi, \quad \partial_t q_e + \nabla f_e = n_e \nabla \phi / \varepsilon, \quad (4.3)$$

$$-\lambda^2 \Delta \phi = n_i - n_e, \quad (4.4)$$

où  $f_i$  et  $f_e$  sont les flux de quantités de mouvement adimensionnés définis par  $f_i = q_i \otimes q_i / n_i + p_i(n_i) \text{Id}$  et  $f_e = q_e \otimes q_e / n_e + \frac{1}{\varepsilon} p_e(n_e) \text{Id}$ , avec  $p_{e,i}(n) = C_{i,e} n^{\gamma_{i,e}}$ ,  $C_{i,e} > 0$ ,  $\gamma_{i,e} > 1$  les lois de pressions.

Les paramètres  $\varepsilon$  et  $\lambda$  sont respectivement le rapport des masses des particules  $\varepsilon = m_e / m_i$  et la longueur de Debye adimensionnée  $\lambda = \lambda_D / L$  où  $\lambda_D$  est la longueur de Debye en variables physiques, donnée par (4.1), et  $L$  est l'échelle de longueur macroscopique.

La théorie mathématique du système d'Euler-Poisson est étudiée dans [11] et [39] dans le cas isotherme et dans [32] dans le cas isentropique. Dans le chapitre précédent, on a étudié la limite formelle quasi-neutre  $\lambda \rightarrow 0$  de ce système en considérant un courant non nul dans le plasma. Les limites rigoureuses dans des cas simplifiés ont été étudiées dans [10], [38], [54] et [48]. Tous ces travaux considèrent un courant nul dans le plasma. Je résume brièvement les résultats pour le modèle bifluide Euler-Poisson avec un courant non nul.

La limite formelle  $\lambda \rightarrow 0$  dans le système bifluide Euler-Poisson consiste à remplacer l'équation de Poisson (4.4), par la contrainte de quasi-neutralité  $n_i = n_e$ . Le potentiel devient alors le multiplicateur de Lagrange de cette contrainte. Une équation elliptique peut être établie pour déterminer le potentiel. On soustrait les équations de conservation des masses (4.2), on obtient en utilisant la quasi-neutralité, la contrainte de divergence nulle pour le courant  $j = n_i u_i - n_e u_e$ . On prend alors la divergence de la différence des équations de quantités de mouvement (4.3). Enfin, on utilise la contrainte du courant à divergence nulle, on obtient

$$-\nabla \cdot \left( \left( n_i + \frac{n_e}{\varepsilon} \right) \nabla \phi \right) = \nabla^2 : (f_i - f_e), \quad (4.5)$$

où les symboles  $\nabla^2$  et  $:$  sont respectivement le tenseur des dérivées secondes et le produit contracté de deux tenseurs.

Le modèle quasi-neutre est donc formellement équivalents au système constitué des équations (4.2), (4.3) et de (4.5). Il est important de noter qu'une des singularités numériques de la limite quasi-neutre du système (4.2)-(4.4), provient du fait que l'équation de Poisson (4.4) dégénère d'un type elliptique vers un type algébrique. Il faut alors transformer le système pour obtenir l'équation sur le potentiel. Ainsi, pour construire un schéma asymptotiquement consistant, il faut pouvoir capter la limite quasi-neutre sans transformation. C'est l'un des points clefs du schéma AP présenté ici. Pour cela nous reformulons l'équation de Poisson en utilisant les mêmes manipulations que pour l'obtention de (4.5). On retourne donc au système d'Euler-Poisson, on commence par prendre la divergence de la différence des équations de conservation des quantités de mouvement (4.3), on obtient

$$\nabla \cdot \partial_t j + \nabla^2 : (f_i - f_e) = -\nabla \cdot \left( \left( n_i + \frac{n_e}{\varepsilon} \right) \nabla \phi \right). \quad (4.6)$$

Afin d'éliminer le courant de cette équation, on lui retranche la dérivée en temps de la différence des équations de conservation des masses (4.2) et on utilise l'équation de Poisson (4.4) pour exprimer la charge totale  $n_i - n_e$  en fonction du potentiel. On obtient ce que l'on appelle l'équation de Poisson reformulée :

$$\varepsilon \lambda^2 \partial_{tt}^2 (-\Delta \phi) - \nabla \cdot ((\varepsilon n_i + n_e) \nabla \phi) = \varepsilon \nabla^2 : (f_i - f_e), \quad (4.7)$$

Notons tout d'abord que cette équation est formellement équivalente à l'équation de Poisson si les quantités fluides satisfont les équations d'Euler et si l'équation de Poisson ainsi que sa dérivée en temps sont satisfaites initialement. La deuxième remarque importante est que cette formulation fait apparaître la singularité en temps du problème : les oscillations liées à la période plasma. En effet, en variables adimensionnées la période plasma est donnée par  $\tau = \sqrt{\varepsilon} \lambda$ , on a exactement  $\tau_p = t_0 \tau$  où  $t_0$  est l'échelle de temps macroscopique. Notons enfin, que cette limite est dispersive. En effet, en considérant (4.7) comme une équation sur la charge totale  $\rho = -\Delta \phi$  et en linéarisant cette équation autour d'une solution constante du système on obtient une équation de Klein-Gordon sur la charge totale. On montre alors que dans la limite  $\lambda \rightarrow 0$ , il subsiste des solutions d'amplitude d'ordre un qui oscillent avec une période d'ordre  $\tau = \sqrt{\varepsilon} \lambda$ . Ce point est développé dans le paragraphe 4.3.

#### 4.2.2 Les schémas classique et AP pour le modèle d'Euler-Poisson

Avant de présenter le schéma AP, je rappelle brièvement la discrétisation classique pour Euler-Poisson. On note  $\Delta t$  le pas de temps et  $g^m$  une approximation de la fonction  $x \mapsto g(x, t^m)$  où  $t^m = m\Delta t$ ,  $m \geq 0$ . La discrétisation classique du système bifluide Euler-Poisson (3.22)-(3.24) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{n_{i,e}^{m+1} - n_{i,e}^m}{\Delta t} + \nabla \cdot q_{i,e}^m &= 0, & \frac{q_i^{m+1} - q_i^m}{\Delta t} + \nabla f_i^m &= -n_i^{m+1} \nabla \phi^{m+1}, \\ \frac{q_e^{m+1} - q_e^m}{\Delta t} + \nabla f_e^m &= \frac{n_e^{m+1}}{\varepsilon} \nabla \phi^{m+1}, & -\lambda^2 \Delta \phi^{m+1} &= n_i^{m+1} - n_e^{m+1}. \end{aligned}$$

Les flux sont traités de manière explicite et les termes de forces électriques de manière implicite. Dans [23], il est montré, sur le système Euler-Poisson linéarisé, que si ces termes de forces sont traités de manière explicite, le schéma est inconditionnellement instable. On peut de plus, comme dans le cas continu, déterminer la discrétisation de l'équation de Poisson reformulée (4.6) associée à cette discrétisation. Elle est donnée par

$$-\varepsilon\lambda^2 \frac{(\Delta\phi^{m+1} - 2\Delta\phi^m + \Delta\phi^{m-1})}{\Delta t^2} - \nabla \cdot ((\varepsilon n_i^m + n_e^m)\nabla\phi^m) = \varepsilon\nabla^2 : (f_i^{m-1} - f_e^{m-1}).$$

On remarque que cette discrétisation est explicite. Or, l'équation de Poisson reformulée (4.6) est une équation du pendule sur la charge totale  $n_i - n_e = -\Delta\phi$ . Et, il est classique qu'une discrétisation explicite de cette équation est conditionnellement stable. Dans [23], il est établi pour le système d'Euler-Poisson linéarisé, que ce schéma est stable si et seulement s'il résout la période plasma. On doit donc avoir

$$\Delta t \leq \tau,$$

où  $\tau$  est la période plasma adimensionnée c'est-à-dire le rapport de la période plasma en variables physiques  $\tau_p$ , donnée par (4.1), et de l'échelle de temps macroscopique. Notons enfin que le coût du schéma classique est celui de la résolution d'une équation elliptique. En effet, la résolution est découplée, les équations de conservation de masse permettent d'avancer les densités de manière explicite. On résout alors l'équation de Poisson discrète pour trouver le potentiel et on termine avec la résolution explicite des équations de quantités de mouvement.

Décrivons maintenant la nouvelle approche du schéma AP. Ce schéma consiste à implicitiser les flux de masses et à traiter les termes de forces électriques de manière implicite pour le potentiel mais explicite pour la densité. On a alors

$$\frac{n_i^{m+1} - n_i^m}{\Delta t} + \nabla \cdot q_i^{m+1} = 0, \quad \frac{n_e^{m+1} - n_e^m}{\Delta t} + \nabla \cdot q_e^{m+1} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{q_i^{m+1} - q_i^m}{\Delta t} + \nabla f_i^m = -n_i^m \nabla\phi^{m+1}, \quad \frac{q_e^{m+1} - q_e^m}{\Delta t} + \nabla f_e^m = \frac{n_e^m}{\varepsilon} \nabla\phi^{m+1}, \quad (4.9)$$

$$-\lambda^2 \Delta\phi^{m+1} = n_i^{m+1} - n_e^{m+1}. \quad (4.10)$$

Maintenant la discrétisation de l'équation de Poisson reformulée (4.6) associée à cette discrétisation, est donnée par

$$-\varepsilon\lambda^2 \frac{(\Delta\phi^{m+1} - 2\Delta\phi^m + \Delta\phi^{m-1})}{\Delta t^2} - \nabla \cdot ((\varepsilon n_i^m + n_e^m)\nabla\phi^{m+1}) = \varepsilon\nabla^2 : (f_i^m - f_e^m). \quad (4.11)$$

On voit qu'on a gagné en implicitation et donc très certainement en stabilité. Notons de plus qu'en utilisant cette équation on obtient une formulation découplée du schéma AP ayant le même coût que les schémas classiques. En effet, en utilisant (4.11) on avance le potentiel. Notons que le coût de cette avancée est celui d'un opérateur elliptique, comme dans le cas classique. On est alors en mesure d'avancer les quantités

de mouvement en utilisant (4.9). On termine en calculant les densités avec (4.8). Le coût du schéma est donc le même que celui du schéma classique.

Je ne présente pas ici la discrétisation en espace, elle est détaillée dans [A4] pour le solveur de Lax-Friedrichs et dans [A8] pour des solveurs plus généraux.

### 4.2.3 Résultats numériques

Je présente des résultats numériques pour deux cas tests monodimensionnels ainsi qu'un cas test bidimensionnel.

Le premier cas test consiste en une perturbation périodique d'une solution quasi-neutre constante à courant non nul, donnée par  $(n_i^0 = n_e^0 = 1, q_i^0 = 0, q_e^0 = 1, E^0 = 0)$  où  $E = -\partial_x \phi$  est le champ électrique.

On perturbe initialement cette solution sur les quantités de mouvement

$$n_i(x, 0) = n_e(x, 0) = 1, \quad q_i(x, 0) = \delta \cos 2\pi x, \quad q_e(x, 0) = 1 + \delta \cos 2\pi x.$$

où  $\delta = 10^{-2}$  est l'amplitude de la perturbation. Ce cas test a déjà été étudié dans [N4] et [A2] où les solutions du système biffuide Euler-Poisson linéarisé sont données analytiquement. Pour des petites perturbations, ces solutions sont proches de celles du système non linéaire. Nous comparons donc les solutions approchées données par les schémas classique et AP à la solution analytique. Le solveur utilisé pour ce cas test est le solveur de Lax-Friedrichs modifié.

Les paramètres sont issus de la physique d'arcs dans les plasmas (voir [9], [5]). On choisit  $C_i = C_e = 1$ ,  $\gamma_i = \gamma_e = 5/3$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\lambda = 10^{-4}$  ce qui donne une période plasma adimensionnée  $\tau = 10^{-6}$ .

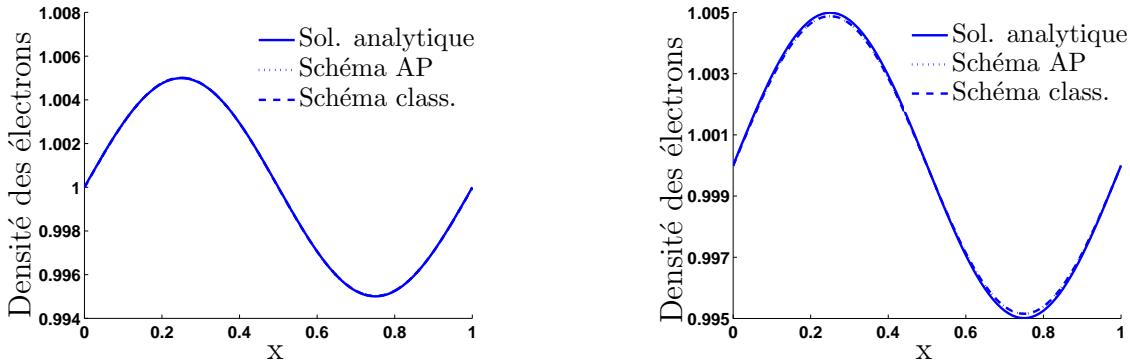


Figure 4.1: Densité électronique au temps adimensionné  $t = 0.1$  pour le cas test de perturbation périodique. Le schéma classique (tirets) et le schéma AP (pointillés) sont comparés à la solution analytique (trait plein). À gauche la période plasma et la longueur de Debye sont résolues  $\Delta t < \tau$  et  $\Delta x = \lambda$  et toutes les courbes sont identiques. À droite la période plasma est résolue mais pas la longueur de Debye  $\Delta t < \tau$  et  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda$ . Les courbes données par les schémas classique et AP sont confondues.

La Figure 4.1 présente la densité électronique au temps adimensionné  $t = 0.1$ . Les schémas classique et AP sont comparés à la solution exacte du système linéarisé. À gauche, les discrétisations en espace et en temps résolvent respectivement la longueur de Debye et la période plasma. On voit que dans ce cas toutes les courbes sont identiques, les deux schémas sont stables. Les courbes sur les autres quantités (données dans [A4]) montrent le même comportement. À droite, la période plasma est toujours résolue mais la longueur de Debye ne l'est plus. Là encore, les deux schémas sont stables, les résultats sont légèrement plus diffusifs ce qui est normal car on a divisé le nombre de mailles par cent. Les résultats sur les densité et vitesse ioniques et le potentiel donnent les mêmes résultats. En revanche, la courbe de vitesse électronique présente un déphasage avec la solution exacte, on montre numériquement dans [A4] que ce problème est lié à la faible masse des électrons. On est dans un régime bas Mach bien connu pour poser des problèmes numériques.

La Figure 4.2 présente la densité électronique au temps adimensionné  $t = 0.1$  dans le cas non résolu en espace et en temps. À gauche, la courbe donnée par le schéma classique montre qu'il est instable lorsqu'il ne résout ni la longueur de Debye, ni la période plasma. Alors qu'à droite le schéma AP est toujours stable même s'il ne résout ni la longueur de Debye, ni la période plasma.

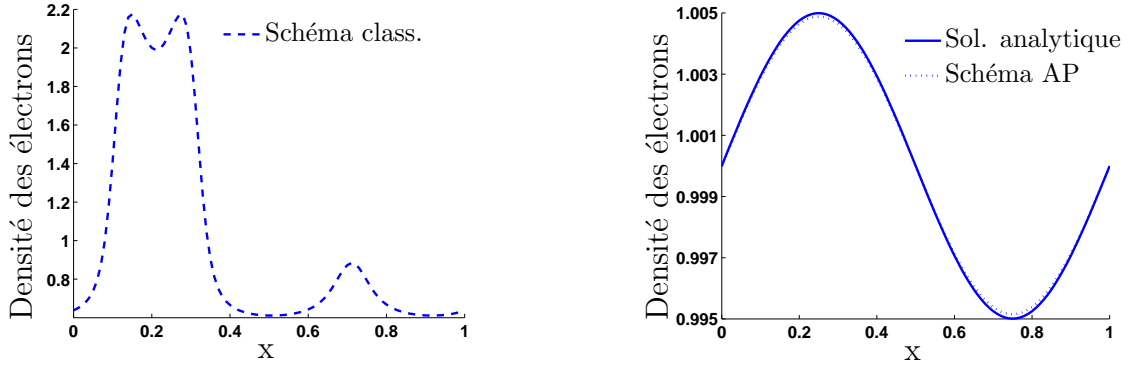


Figure 4.2: Densité électronique au temps adimensionné  $t = 0.1$  pour le cas test de perturbation périodique. Le schéma classique (tirets à gauche) et le schéma AP (pointillés à droite) sont comparés à la solution analytique (trait plein à droite). La période plasma et la longueur de Debye ne sont pas résolues  $\Delta t > \tau$  et  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda$ .

Le deuxième cas test monodimensionnel est celui du problème d'expansion d'un plasma quasi-neutre entre deux électrodes. Ce cas test est décrit de manière détaillée dans le chapitre précédent. Je rappelle qu'on injecte en  $x = 0$ , la cathode, un plasma quasi-neutre dans le domaine initialement vide. On choisit, ici,  $n_i(x = 0) = n_e(x = 0) = 1$  et  $q_i(x = 0) = q_e(x = 0) = 1$ . L'anode est située en  $x = 1$  et la différence de potentiel adimensionnée est de 100. Enfin, les paramètres sont les mêmes que précédemment on impose  $C_i = C_e = 1$ ,  $\gamma_i = \gamma_e = 5/3$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  et  $\lambda = 10^{-4}$  ce qui je le rappelle donne une période plasma adimensionnée  $\tau = 10^{-6}$ .

Les résultats que je présente ici ne sont pas dans [A4], en effet dans [A4] on utilise le solveur de Lax-Friedrichs modifié alors que les résultats donnés ici sont

calculés avec le solveur polynômial de degré 0. Ce solveur est un solveur de type Roe proposé dans [17]. Il présente plusieurs avantages, le premier est qu'il s'avère très robuste pour ce cas test, nous verrons dans le paragraphe 4.4, qu'il résiste bien au problème de couche limite. De plus, il est beaucoup moins diffusif que le schéma de Lax-Friedrichs modifié. La Figure 4.3 montre à gauche la densité électronique et à droite le potentiel. Je présente les courbes des schémas classique et AP dans le cas résolu (trait plein et croix) c'est-à-dire lorsque les pas d'espace et de temps sont respectivement plus petits que la longueur de Debye et la période plasma. Ces courbes sont confondues pour la densité ainsi que pour le potentiel. Enfin, les courbes en pointillés et avec des points montrent les mêmes schémas lorsque les discrétisations en espace et en temps ne résolvent ni la longueur de Debye, ni la période plasma. Il apparaît clairement que le schéma AP reste stable alors que le schéma classique donne des résultats complètement instables.

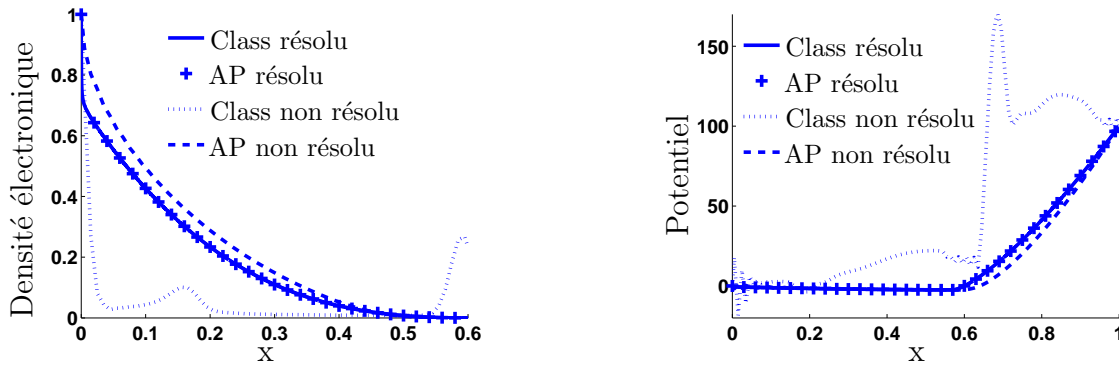


Figure 4.3: Densité électronique (à gauche) et potentiel électrique (à droite) au temps adimensionné  $t = 0.06$  pour le cas test d'expansion de plasma. Les résultats sont donnés dans le cas résolu en temps et en espace ( $\Delta t < \tau$  et  $\Delta x = \lambda$ ) pour le schéma classique (trait plein) et le schéma AP (croix) et dans le cas non résolu en temps et en espace ( $\Delta t > \tau$  et  $\Delta x = 10^{-1} > \lambda$ ) pour le schéma classique (pointillés) et le schéma AP (tirets).

Enfin, le dernier cas test concerne le problème d'expansion d'une bulle de plasma entre deux électrodes en deux dimensions d'espace. Les électrodes sont supposées planes et localisées en  $x = 0$  et  $x = 1$ . Le plasma est injecté à partir de la cathode  $x = 0$  avec un profil Gaussien en ordonnée  $y$ . Les valeurs des paramètres physiques sont choisis identiques au cas test précédent, c'est-à-dire  $C_i = C_e = 1$ ,  $\gamma_i = \gamma_e = 5/3$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  et  $\lambda = 10^{-4}$  ce qui donne une période plasma adimensionnée  $\tau = 10^{-6}$ . Le maillage est cartésien uniforme avec  $100 \times 100$  mailles. Les résultats présentés sur la Figure 4.4 sont obtenus avec le schéma AP en utilisant le solveur polynômial de degré 0. Ils confirment la stabilité du schéma AP dans le cas non résolu.

Les résultats numériques montrent donc le bon comportement asymptotique du schéma AP. Dans le paragraphe suivant on établit la stabilité asymptotique du schéma AP pour le système un fluide Euler-Poisson linéarisé autour d'un état constant.

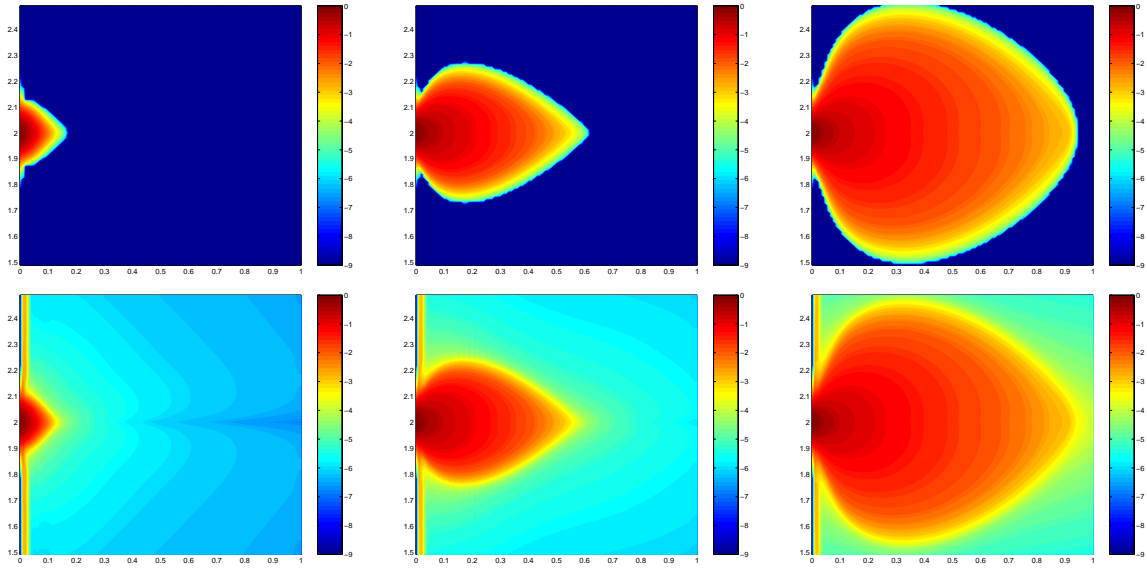


Figure 4.4: Densités ionique (en haut) et électronique (en bas) en échelle logarithmique, aux temps adimensionnés  $t = 0.01$  (à gauche),  $t = 0.1$  (au milieu) et  $t = 0.2$  (à droite) pour le cas test d’expansion de plasma en deux dimensions d’espace. Les résultats sont calculés avec le schéma AP dans le cas non résolu en temps et en espace.

### 4.3 Analyse numérique linéaire du schéma préservant l’asymptotique quasi-neutre

Je décris dans ce paragraphe les travaux soumis pour publication de [A7]. Dans cet article, on montre la stabilité asymptotique dans la limite quasi-neutre du schéma AP présenté dans le paragraphe précédent (ou [A4]). Dans [A7] la longueur de Debye est notée  $\varepsilon$  mais dans un souci d’homogénéité des notations de ce document je vais la noter  $\lambda$  comme dans les autres paragraphes de ce chapitre.

#### 4.3.1 Linéarisation et discrétisation du modèle un fluide Euler-Poisson

On considère ici un modèle simplifié. Ils consiste à ne s’intéresser qu’à la dynamique des électrons. On suppose la présence d’un fond d’ions neutralisant ce qui revient à dire que les ions plus lourds sont supposés immobiles et de densité constante, ici égale à 1. Le modèle en variables adimensionnées en une dimension d’espace est alors donné par

$$\partial_t n + \partial_x q = 0, \quad \partial_t q + \partial_x \left( \frac{q^2}{n} + p(n) \right) = n \partial_x \phi, \quad (4.12)$$

$$\lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi = n - 1. \quad (4.13)$$

où  $x \in \mathbb{R}$  est la variable position,  $t > 0$  est le temps,  $n = n(x, t)$  et  $q = q(x, t)$  sont respectivement la densité et la quantité de mouvement des électrons,  $p(n) = C n^\gamma$ ,  $C > 0$  et  $\gamma > 1$ , est la pression et  $\phi = \phi(x, t)$  est le potentiel.

Le paramètre  $\lambda$  est la longueur de Debye adimensionnée, c'est-à-dire le rapport entre la longueur de Debye en variables physiques  $\lambda_D$ , donnée par (4.1), et l'échelle de longueur macroscopique.

La limite quasi-neutre de ce système conduit aux équations d'Euler incompressible pour la quantité de mouvement. En effet, on fait tendre formellement  $\lambda$  vers 0 dans (4.12)-(4.13). On obtient (4.12) et la contrainte de quasi-neutralité  $n = 1$ . Ce qui se réécrit de manière équivalente sous la forme suivante

$$n = 1, \quad \partial_x q = 0, \quad \partial_t q + \partial_x q^2 - \partial_x \phi = 0.$$

Ainsi, en posant  $\pi = -\phi$ , on reconnaît les équations d'Euler incompressible et  $\phi$  est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte  $\partial_x q = 0$ .

Pour les analyses de stabilité conduites dans les paragraphes suivants, on travaille sur le système d'Euler-Poisson linéarisé autour d'un état constant. L'état autour duquel on linéarise, est donné par  $n = 1$ ,  $q = q_0$ ,  $E = (-\partial_x \phi) = 0$ . La constante  $q_0$  est réelle, dans un premier temps elle sera choisie égale à 0, ce qui correspond à la limite quasi-neutre avec un courant nul dans le plasma, puis elle sera choisie non nulle. Nous verrons qu'un courant non nul dans le plasma conduit à des conclusions différentes dans l'analyse de stabilité des schémas. Le système d'Euler-Poisson linéarisé autour de l'état constant  $(1, q_0, 0)$  est donné par

$$\partial_t n + \partial_x q = 0, \quad \partial_t q + 2q_0 \partial_x q + (c_s^2 - q_0^2) \partial_x n = \partial_x \phi, \quad \lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi = n. \quad (4.14)$$

La vitesse du son  $c_s$  est ici égale à 1 puisque  $c_s = \sqrt{p'(1)/1}$ , mais afin de connaître la dépendance en  $c_s$  des conclusions de l'analyse, la notation  $c_s$  est conservée.

Remarquons tout d'abord que  $u$  et  $\phi$  peuvent être éliminés. Lorsque  $|q_0| < |c_s|$ , l'équation ainsi obtenue est une équation de Klein-Gordon avec une masse égale à  $1/\lambda^2$ . Elle est donnée par

$$\partial_{tt}^2 n + 2q_0 \partial_{tx}^2 n - (c_s^2 - q_0^2) \partial_{xx}^2 n + \frac{1}{\lambda^2} n = 0. \quad (4.15)$$

En multipliant cette équation par  $\partial_t n$  et en supposant des conditions aux limites périodiques, on obtient une estimation d'énergie :

$$\partial_t \int_a^b \left( (\partial_t n)^2 + (c_s^2 - q_0^2) (\partial_x n)^2 + \frac{1}{\lambda^2} n^2 \right) dx = 0.$$

Cette estimation d'énergie montre que lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , de plus en plus d'énergie est accumulée dans le dernier terme provenant du terme de force lié au potentiel.

De plus, on retrouve la nature dispersive de la limite quasi-neutre, déjà évoqués dans le paragraphe précédent. En effet, on prend la transformée de Fourier en espace de l'équation (4.15). En notant  $\hat{n}(\xi, t)$  la transformée de  $n$ , on obtient

$$\partial_{tt}^2 \hat{n} + 2i q_0 \xi \partial_t \hat{n} + \left( c_s^2 - q_0^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \hat{n} = 0.$$



Les solutions de cette équation sont de la forme  $\hat{n}(\xi, t) = A(\xi) \exp(i\theta^\lambda(\xi)t) + B(\xi) \exp(-i\theta^\lambda(\xi)t)$ , où  $A$  et  $B$  ne dépendent que de la condition initiale et sont donc indépendants de  $\lambda$ . La fréquence des oscillations est donnée par

$$\theta^\lambda(\xi) = -2q_0\xi + \left( c_s^2 \xi^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{1/2}.$$

Les solutions sont donc d'amplitude d'ordre un et oscillent à la fréquence  $\theta^\lambda(\xi)$  d'ordre  $1/\lambda$  où  $\lambda$  est ici la période plasma puisque la masse des électrons est égale à 1 en variables adimensionnées.

Pour étudier la stabilité des discrétisations classiques et asymptotiquement stable, présentées dans le paragraphe précédent, on utilise une analyse de Fourier. La transformée de Fourier utilisée ne porte que sur la variable d'espace des systèmes discrétisés en temps. Ceci revient à considérer une discrétisation temps-espace avec un schéma en espace centré. C'est pourquoi, afin d'étudier l'influence d'un schéma décentré en espace on rajoute des termes de viscosité. On introduit donc le système Euler-Poisson linéarisé avec viscosité, suivant

$$\partial_t n + \partial_x q = \beta \partial_{xx}^2 n, \quad \partial_t q + 2q_0 \partial_x q + (c_s^2 - q_0^2) \partial_x n = \beta \partial_{xx}^2 q + \partial_x \phi, \quad \lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi = n, \quad (4.16)$$

où  $\beta > 0$ .

Pour se convaincre, il suffit de regarder le problème de transport le plus simple qui soit, c'est-à-dire

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad (4.17)$$

avec  $c > 0$  pour fixer les idées. Les discrétisations centrée et décentrée de cette équation sont respectivement données par

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2 \Delta x} = 0, \quad \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} = 0.$$

Or, la discrétisation décentrée peut encore s'écrire

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2 \Delta x} - \frac{c \Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2} = 0,$$

qui est une discrétisation centrée de l'équation

$$\partial_t u + c \partial_x u - \frac{c \Delta x}{2} \partial_{xx}^2 u = 0. \quad (4.18)$$

Il est classique qu'avec le schéma d'Euler en temps, le schéma centré en espace est inconditionnellement instable alors que le schéma décentré est stable sous condition de type C.F.L. (Courant-Friedrichs-Levy) donnée par  $\Delta t \leq \Delta x/c$ . Retrouvons rapidement ces résultats par l'analyse de Fourier en espace des équations (4.17) et (4.18) discrétisées en temps. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{u}^{m+1} &= \hat{u}^m (1 - c \Delta t i \xi), & \hat{u}^{m+1} &= \hat{u}^m \left( 1 - c \Delta t i \xi - \frac{c \Delta x}{2} \Delta t \xi^2 \right), \\ &= \hat{u}^0 (1 - c \Delta t i \xi)^m, & &= \hat{u}^0 \left( 1 - c \Delta t i \xi - \frac{c \Delta x}{2} \Delta t \xi^2 \right)^m. \end{aligned}$$

On a alors

$$|1 - c \Delta t i \xi|^2 = 1 + c^2 \Delta t^2 \xi^2 > 1,$$

et on retrouve donc bien que le schéma centré est inconditionnellement instable. Par contre,

$$\begin{aligned} \left| 1 - c \Delta t i \xi - \frac{c \Delta x}{2} \Delta t \xi^2 \right|^2 &= \left( 1 - \frac{c \Delta x}{2} \Delta t \xi^2 \right)^2 + c^2 \Delta t^2 \xi^2, \\ &= 1 - c \Delta x \Delta t \xi^2 + c^2 \Delta t^2 \xi^2 \left( \frac{\Delta x^2}{4} \xi^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

On obtient alors la condition suffisante de stabilité

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c \left( \frac{\Delta x^2}{4} \xi^2 + 1 \right)}.$$

En choisissant  $\xi$  d'ordre  $1/\Delta x$ , ce qui revient à dire qu'une discrétisation complète ne peut pas résoudre les grands nombres d'onde, on trouve une condition de type C.F.L. du même ordre que celle que l'on attendait. Notons enfin pour terminer, que dans le cas linéaire le schéma décentré en espace correspond exactement au solveur de Lax-Friedrichs modifié utilisé dans [A4].

### 4.3.2 Stabilité du modèle linéarisé

Présentons tout d'abord la discrétisation en temps classique du système d'Euler-Poisson linéarisé (4.16) ainsi que la discrétisation préservant l'asymptotique quasi-neutre (AP), proposée dans [A4]. Ces discrétisations traitent, toutes deux les termes de forces électriques de manière implicite. Elles diffèrent par le traitement explicite ou implicite des termes de flux dans l'équation de conservation de masse. Le schéma classique consiste à discrétiser ces termes de manière explicite alors que le schéma AP les traite de manière implicite. Dans la suite nous appelons le schéma classique, schéma EI et le schéma AP, schéma II, relativement aux termes de flux de masse traités Explicitement ou Implicitement et aux termes de forces électriques traités Implicitement. On note  $\Delta t$  le pas de temps et  $g^m$  une approximation de  $x \mapsto g(x, t^m)$  où  $t^m = m \Delta t$  pour  $m \geq 0$ . Le schéma EI (classique) est alors donné par

$$\frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \partial_x q^m = \beta \partial_{xx}^2 n^m, \quad \lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi^{m+1} = n^{m+1}, \quad (4.19)$$

$$\frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t} + 2 q_0 \partial_x q^m + (c_s^2 - q_0^2) \partial_x n^m = \beta \partial_{xx}^2 q^m + \partial_x \phi^{m+1}. \quad (4.20)$$

Le schéma II (AP) est donné par

$$\frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \partial_x q^{m+1} = \beta \partial_{xx}^2 n^m, \quad \lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi^{m+1} = n^{m+1}, \quad (4.21)$$

$$\frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t} + 2 q_0 \partial_x q^m + (c_s^2 - q_0^2) \partial_x n^m = \beta \partial_{xx}^2 q^m + \partial_x \phi^{m+1}. \quad (4.22)$$

On introduit de plus la discrétisation IE suivante, afin de vérifier que l'implication des termes de forces est nécessaire pour obtenir la stabilité asymptotique dans la limite quasi-neutre. Elle est donnée par

$$\frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \partial_x q^{m+1} = \beta \partial_{xx}^2 n^m, \quad \lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi^{m+1} = n^{m+1}, \quad (4.23)$$

$$\frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t} + 2q_0 \partial_x q^m + (c_s^2 - q_0^2) \partial_x n^m = \beta \partial_{xx}^2 q^m + \partial_x \phi^m. \quad (4.24)$$

Dans [23], S. Fabre étudie la stabilité d'une discrétisation complète du système Euler-Poisson linéarisé (4.14) avec  $q_0 = 0$ . Cette discrétisation consiste en le schéma classique en temps et le schéma décentré en espace ; Ce qui correspond ici au schéma EI (classique) donné par (4.19)-(4.20) avec  $q_0 = 0$  et  $\beta \neq 0$ . Dans [A7], on montre les résultats suivants

**Lemme 4.1** *On considère le système d'Euler-Poisson linéarisé avec viscosité (4.16) avec  $q_0 = 0$ . Alors*

1. *Si  $\beta = 0$ , la discrétisation II (AP) donnée par (4.21)-(4.22) est stable sous la condition*

$$\Delta t \leq \delta_{ii}^* = 2 \left( \frac{\Delta x}{\pi c_s} \right)^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \left( \frac{\pi c_s}{\Delta x} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

*La discrétisation IE donnée par (4.23)-(4.24) est stable sous la condition*

$$\Delta t \leq \delta_{ie}^* = \frac{2}{\left( \frac{1}{\lambda^2} + \left( \frac{\pi c_s}{\Delta x} \right)^2 \right)^{1/2}}.$$

2. *Si  $\beta \neq 0$ , la discrétisation II (AP) donnée par (4.21)-(4.22) est stable sous la condition*

$$\Delta t \leq \delta_{ii}^v = \frac{2\beta}{c_s^2} \min \left( \frac{1}{C^{*2}}, \sqrt{1 + C^*} - 1 \right), \quad (4.25)$$

où  $C^* = \beta \pi / (c_s \Delta x)$ .

*La discrétisation EI (classique) donnée par (4.19)-(4.20) est stable sous la condition*

$$\Delta t \leq \min(\delta_{ei}^v, \delta^*) = \min \left( \frac{2\beta}{c_s^2} \frac{1}{1 + C^{*2}}, \frac{2}{\sqrt{1 + C^{*2}}} \lambda \right),$$

*pour tout  $\lambda \in [0, \frac{\beta}{c_s^2 \sqrt{1 + C^{*2}}}]$  et si  $2\lambda < \Delta t \leq \delta^*$ , le schéma est instable.*

Le point 1. de ce résultat montre clairement la stabilité asymptotique du schéma II (AP) dans la limite quasi-neutre. En effet,  $\delta_{ii}^* \rightarrow +\infty$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . Le schéma IE est quand à lui fortement contraint dans les zones quasi-neutres puisque  $\delta_{ie}^* \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . L'implication des termes de forces électriques est donc nécessaire pour obtenir une stabilité asymptotique. Notons, enfin, que lorsque  $1/\lambda$  est petit,

c'est-à-dire lorsqu'on est dans les zones non quasi-neutres, on retrouve la condition de C.F.L. classique c'est-à-dire  $\Delta t$  de l'ordre de  $\Delta x/c_s$ .

Le point 2. confirme la stabilité asymptotique du schéma AP. En effet,  $\delta_{ii}^v$  ne dépend pas de  $\lambda$ , de plus la condition de stabilité est en fait la condition de C.F.L. hydrodynamique. En effet, je rappelle que pour le schéma décentré la viscosité  $\beta$  est donnée par  $c_s \Delta x/2$ . Ainsi,  $C^*$  est une constante ne dépendant pas de  $\Delta x$  et la condition (4.25) est équivalente à  $\Delta t \leq C \Delta x/c_s$ . Enfin, le dernier résultat montre que le domaine de stabilité du schéma classique (EI) est un intervalle de taille  $\mathcal{O}(\lambda)$ . On retrouve le résultat déjà établi par S. Fabre.

Dans le cas d'un courant non nul, on montre le résultat suivant

**Lemme 4.2** *On considère le système d'Euler-Poisson linéarisé avec viscosité (4.16) avec  $q_0 \neq 0$ . Alors*

1. *Si  $\beta = 0$ , pour toute constante  $0 < K < 1$ , il existe  $\Delta t^* > 0$  tel que la discrétisation II (AP) donnée par (4.21)-(4.22) est stable sous les conditions*

$$\Delta t \leq \Delta t^* \quad \text{et} \quad \lambda < K \Delta t,$$

*avec  $\delta^* \rightarrow 0$  lorsque  $K \rightarrow 1$ .*

2. *Si  $\beta \neq 0$  est telle qu'il existe  $B > B^*$ , où  $B^*$  ne dépend que de  $q_0$  et  $c_s$ , telle que  $\beta = B \Delta t$  alors il existe  $\Delta t^*$  ne dépendant que de  $q_0$  et  $c_s$  tel que la discrétisation II (AP) donnée par (4.21)-(4.22) est stable pour tout  $\lambda > 0$ , sous la condition*

$$\Delta t \leq \Delta t^*.$$

Le point 1. donne un résultat de stabilité mais pour  $\lambda$  suffisamment petit. Le schéma centré AP n'est donc pas stable dans les régimes non quasi-neutres. Par contre le point 2. montre que le schéma AP est stable uniformément pour toutes valeurs de  $\lambda$ . La constante de viscosité est supposée proportionnelle au pas de temps, alors qu'en pratique pour le schéma décentré elle est proportionnelle au pas d'espace. Le résultat est certainement encore vrai dans ce cas mais ce choix de la viscosité simplifie la démonstration qui est malgré tout très technique. Le résultat est quand même intéressant puisqu'il montre que même avec une viscosité petite, de l'ordre de  $\Delta t$ , le schéma AP est stable uniformément en  $\lambda$  dans les régimes quasi-neutre et non quasi-neutre.

#### 4.4 Un problème de couche limite lié à la quasi-neutralité

Dans ce paragraphe, je présente les travaux soumis pour publication de [A8]. Ils concernent l'étude d'une couche limite dans le cas test d'expansion de plasma entre deux électrodes, présenté dans le paragraphe 4.2.

#### 4.4.1 Le modèle bifluide Euler-Poisson

Le modèle considéré est le modèle bifluide Euler-Poisson adimensionné, que je rappelle ci-dessous en précisant les conditions aux limites. On note  $n_i(x, t)$  et  $n_e(x, t)$  les densités des ions et des électrons,  $q_i(x, t)$  et  $q_e(x, t)$  leur quantités de mouvement et  $\phi(x, t)$  le potentiel électrique, où  $x \in \mathbb{R}$  est la variable d'espace et  $t > 0$  est le temps. Ces quantités sont solutions du système suivant

$$\partial_t n_i^\lambda + \partial_x q_i^\lambda = 0, \quad \partial_t q_i^\lambda + \partial_x f_i(n_i^\lambda, q_i^\lambda) = -n_i^\lambda \partial_x \phi^\lambda, \quad (4.26)$$

$$\partial_t n_e^\lambda + \partial_x q_e^\lambda = 0, \quad \varepsilon \partial_t q_e^\lambda + \varepsilon \partial_x f_e(n_e^\lambda, q_e^\lambda) = n_e^\lambda \partial_x \phi^\lambda, \quad (4.27)$$

$$-\lambda^2 \partial_{xx}^2 \phi^\lambda = n_i^\lambda - n_e^\lambda, \quad (4.28)$$

pour  $x \in ]0, 1[$  et  $t > 0$ , et où les flux de quantités de mouvement sont donnés par  $f_i(n, q) = q^2/n + p_i(n)$  et  $f_e(n, q) = q^2/n + p_e(n)/\varepsilon$ . Les lois de pressions isentropiques sont définies par  $p_{i,e}(n) = C_{i,e} n^{\gamma_{i,e}}$ , avec  $C_{i,e} > 0$  et  $\gamma_{i,e} > 1$ .

Je rappelle que les paramètres adimensionnés  $\varepsilon$  et  $\lambda$  sont respectivement le rapport des masses des électrons et des ions  $\varepsilon = m_e/m_i$  et la longueur de Debye adimensionnée  $\lambda = \lambda_D/L$  où  $\lambda_D$  est la longueur de Debye en variables physiques, donnée par (4.1) et  $L$  est l'échelle d'espace macroscopique. Ces paramètres donnent une période plasma adimensionnée donnée par  $\tau = \sqrt{\varepsilon} \lambda$ .

Le domaine est initialement vide de plasma et les systèmes hyperboliques sont supposés supersoniques au point  $x = 1$ . Ainsi, aucune condition aux limites n'est nécessaire en  $x = 1$  pour les quantités fluides. La cathode et l'anode sont respectivement localisées en  $x = 0$  et  $x = 1$  et un plasma quasi-neutre est présent en dehors du domaine pour  $x < 0$ . On pose donc

$$\phi^\lambda(0, t) = 0, \quad \phi^\lambda(1, t) = \phi_A(t) > 0, \quad (4.29)$$

$$(n_i^\lambda, q_i^\lambda)(0, t) = (n_{i0}^\lambda, q_{i0}^\lambda)(t), \quad (n_e^\lambda, q_e^\lambda)(0, t) = (n_{e0}^\lambda, q_{e0}^\lambda)(t), \quad (4.30)$$

pour tout  $t > 0$  et où  $(n_{i0}^\lambda, q_{i0}^\lambda)$  et  $(n_{e0}^\lambda, q_{e0}^\lambda)$  sont les solutions respectives, au point  $x = 0$ , des problèmes de Riemann suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_i + \partial_x q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \partial_x f_i(n_i, q_i) = 0, \\ \left( \begin{array}{l} n_i \\ q_i \end{array} \right) (x, 0) = \begin{cases} \left( \begin{array}{l} n_0 \\ q_0 \end{array} \right) (t), & x < 0, \\ \left( \begin{array}{l} n_i^\lambda \\ q_i^\lambda \end{array} \right) (0^+, t), & x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_e + \partial_x q_e = 0, \\ \partial_t q_e + \partial_x f_e(n_e, q_e) = 0, \\ \left( \begin{array}{l} n_e \\ q_e \end{array} \right) (x, 0) = \begin{cases} \left( \begin{array}{l} n_0 \\ q_0 \end{array} \right) (t), & x < 0, \\ \left( \begin{array}{l} n_e^\lambda \\ q_e^\lambda \end{array} \right) (0^+, t), & x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

où  $(n_{i,e}^\lambda, q_{i,e}^\lambda)(0^+, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (n_{i,e}^\lambda, q_{i,e}^\lambda)(x, t)$  et où  $(n_0, q_0)$  est l'état présent en dehors du domaine, il est supposé subsonique, i.e. tel que  $q_0/n_0 + \sqrt{p'_i(n_0)} > 0$ ,  $q_0/n_0 + \sqrt{p'_e(n_0)/\varepsilon} > 0$ ,  $q_0/n_0 - \sqrt{p'_i(n_0)} < 0$  et  $q_0/n_0 - \sqrt{p'_e(n_0)/\varepsilon} < 0$ .

#### 4.4.2 Problèmes numériques reliés à la couche limite

Dans [A4], résumé dans le paragraphe 4.2, deux cas test monodimensionnels sont présentés. Le premier cas test est une perturbation d'un plasma stationnaire et uniforme à courant non nul. Pour ce cas test, les conditions aux limites sur les quantités fluides sont périodiques et non pas données par (4.30). On compare alors les discrétisations classique et préservant l'asymptotique quasineutre (AP). On observe numériquement que le schéma AP reste stable pour des pas de temps plus grands que la période plasma alors que le schéma classique développe des instabilités. Dans ces simulations, le solveur de Lax-Friedrichs modifié est utilisé (voir [22]). Ce solveur est bien connu pour être très diffusif mais aussi pour être très robuste. Il était donc bien adapté à la phase de validation du schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre. Nous avons depuis étendu ces résultats à des solveurs d'ordre 1 plus généraux comme les solveurs polynomiaux de degré 0 ou 2 (voir [17]), HLLE, HLLC ainsi qu'au solveur d'ordre 2 de Lax-Wendroff (voir [51]). Nous obtenons les mêmes résultats. Le deuxième cas test considéré dans [A4], est celui de l'expansion d'un plasma quasi-neutre entre deux électrodes. Ce cas test est particulièrement bien adapté au schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre (AP) puisqu'une transition d'une zone quasi-neutre (le plasma) vers une zone non quasi-neutre (le faisceau) est présente. Les simulations numériques de ce cas test, présentées dans [A4], sont encore réalisées avec le solveur de Lax-Friedrichs modifié. Ces simulations numériques montrent que le schéma AP reste stable lorsque le pas de temps est plus grand que la période plasma alors que le schéma classique est instable. Je présente ici, des résultats numériques pour ce cas test, obtenus en utilisant des solveurs d'ordre 1 plus généraux : les solveurs polynômiaux de degrés 0 ou 2 (voir [17]).

Les paramètres sont issus de la physique d'arcs dans les plasmas (voir [9]). On a  $\gamma_i = \gamma_e = 5/3$ ,  $C_i = C_e = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\lambda = 10^{-4}$ ,  $\phi_A = 100$ . De plus, le plasma quasi-neutre présent en dehors du domaine est choisi tel que  $(n_0, q_0) = (1, 1)$ . Les résultats sont donnés par les Figures 4.5 et 4.6 à gauche.

La solution de référence est celle donnée par le schéma classique avec le solveur de Riemann exact dans le cas résolu c'est-à-dire lorsque le pas d'espace  $\Delta x$  et le pas de temps  $\Delta t$  satisfont  $\Delta x \leq \lambda$  et  $\Delta t \leq \tau$ . On compare cette solution de référence aux schémas classique et AP pour les solveurs polynômiaux de degré 0 et 2. Le solveur polynômial de degré 0 ( $P0$ ) présente une particularité commune avec le solveur de Lax-Friedrichs modifié. Ils ont tous deux des matrices de viscosité numérique diagonales. Le solveur polynômial de degré 2 ( $P2$ ) s'apparente plutôt aux solveurs de type Roe généraux dont les matrices de viscosité numérique sont non diagonales.

La Figure 4.5 présente à gauche, les résultats dans le cas résolu pour toutes les discrétisations. On peut remarquer que les schémas classique et AP donnent des résultats identiques pour un même solveur. De plus, les différents solveurs conduisent aux mêmes courbes dans le cœur du plasma, par contre les courbes diffèrent dans un voisinage de  $x = 0$ . Ces différences traduisent la présence d'une couche limite qui n'est pas résolue de la même manière par les différents solveurs. Les Figures 4.5 à droite et 4.6 à gauche, présentent les mêmes résultats dans le cas où la longueur de Debye n'est pas résolue, c'est-à-dire lorsque  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda = 10^{-4}$ . Le schéma

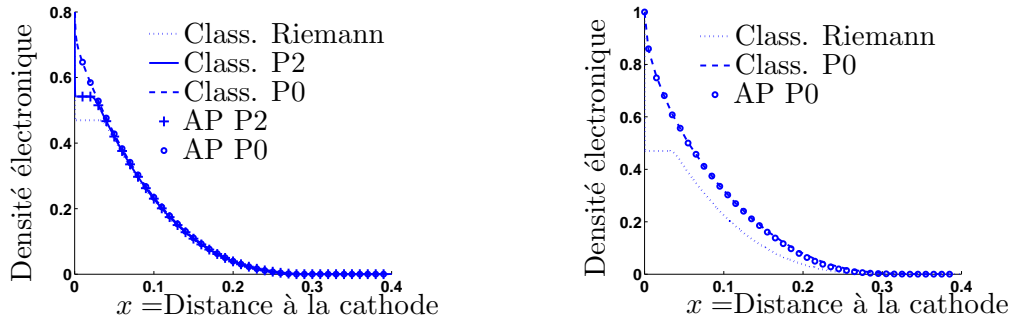


Figure 4.5: Densité électronique en fonction de  $x$ , au temps adimensionné  $t = 0.05$ . Les résultats sont obtenus avec le schéma classique pour le solveur de Riemann (pointillés, à gauche et à droite) dans le cas résolu :  $\Delta x = 10^{-4} = \lambda$  et  $\Delta t \leq \tau = 10^{-6}$ , avec le solveur polynômial de degré 0 pour le schéma classique (tirets) dans le cas résolu à gauche et partiellement résolu à droite :  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda$  et  $\Delta t \leq \tau$ , avec le solveur polynômial de degré 0 pour le schéma AP (marqueurs ronds) dans le cas résolu à gauche et non résolu à droite :  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda$  et  $\Delta t > \tau$  et enfin pour le solveur polynômial de degré 2 avec le schéma classique (trait plein à gauche) et le schéma AP (marqueurs croix à gauche) dans le cas résolu.

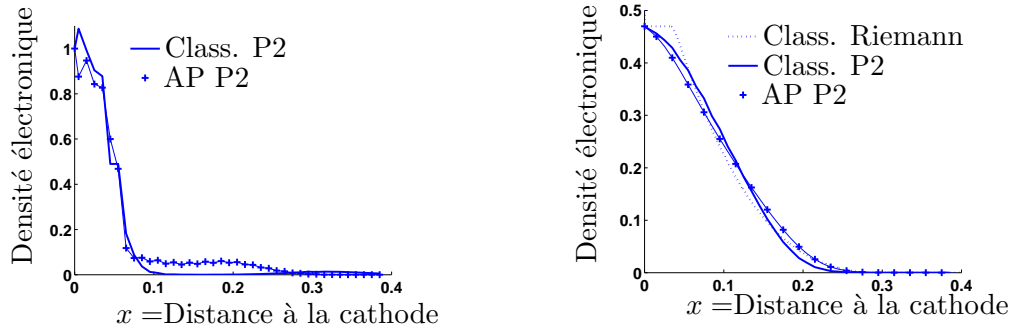


Figure 4.6: Densité électronique en fonction de  $x$ , au temps adimensionné  $t = 0.05$ . Les résultats sont donnés par le schéma classique (trait plein) et le schéma AP (marqueurs croix) pour le solveur polynômial de degré 2 dans le cas non résolu en espace  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda = 10^{-4}$ . Le schéma classique résout la période plasma :  $\Delta t \leq \tau$  et le schéma AP ne la résout pas :  $\Delta t > \tau$ . À gauche les conditions aux limites sont données par (4.30). À droite on utilise les valeurs données en sortie de couche limite par la courbe de référence, c'est-à-dire celle obtenue avec le schéma classique, le solveur de Riemann et les conditions aux limites données par (4.30) dans le cas résolu. Cette courbe est représentée à droite en pointillés.

classique résout la période plasma ( $\Delta t \leq \tau$ ) et le schéma AP ne la résout pas ( $\Delta t > \tau$ ). Nous comparons ces résultats à la courbe de référence (schéma classique, solveur de Riemann, cas résolu en espace et en temps). Il apparaît que, lorsque la longueur de Debye  $\lambda_D$  n'est pas résolue, le solveur  $P0$  est stable pour les deux schémas, par contre le solveur  $P2$  est complètement instable.

Cette instabilité est due à la couche limite précédemment évoquée, qui n'est pas résolue correctement. En effet, lorsqu'on choisit comme conditions aux limites les valeurs données par la courbe de référence en sortie de couche limite, le solveur  $P2$  donne des résultats stables pour les deux schémas comme le montre la Figure 4.6 à droite.

#### 4.4.3 Résolution du problème de couche limite

Pour déterminer des données au bord bien préparées au régime quasi-neutre, on introduit un problème de couche limite. Il est obtenu en écrivant le développement asymptotique suivant

$$(n_{i,e}^\lambda, q_{i,e}^\lambda, \phi^\lambda)(x, t) = (\bar{n}_{i,e}, \bar{q}_{i,e}, \bar{\phi})(x, t) + (\tilde{n}_{i,e}, \tilde{q}_{i,e}, \phi)(x/\lambda, t) + \lambda (\hat{n}_{i,e}^\lambda, \hat{q}_{i,e}^\lambda, \hat{\phi})(x, t),$$

où  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda (\hat{n}_{i,e}^\lambda, \hat{q}_{i,e}^\lambda, \hat{\phi}^\lambda) = (0, 0, 0)$  et  $(\bar{n}_{i,e}, \bar{q}_{i,e}, \bar{\phi})$  est la solution du modèle quasi-neutre obtenu lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  dans le système (4.26)-(4.28).

En insérant ce développement dans le système bifluide Euler-Poisson, on obtient le résultat suivant

**Lemme 4.3 (Formel)** *La couche limite  $(\tilde{n}_{i,e}, \tilde{q}_{i,e}, \phi)$  est solution du système*

$$n_{i,e}(y, t) = \tilde{n}_{i,e}(y, t) + \bar{n}_{i,e}(0, t), \quad q_{i,e}(y, t) = \tilde{q}_{i,e}(y, t) + \bar{q}_{i,e}(0, t), \quad (4.32)$$

$$\partial_y q_i = 0, \quad \partial_y (q_i^2/n_i + p_i(n_i)) = -n_i \partial_y \phi, \quad (4.33)$$

$$\partial_y q_e = 0, \quad \partial_y (\varepsilon q_e^2/n_e + p_e(n_e)) = n_e \partial_y \phi, \quad (4.34)$$

$$-\partial_{yy}^2 \phi = n_i - n_e, \quad (4.35)$$

pour tout  $y > 0$  et tout  $t > 0$ . Les conditions aux limites sont données par

$$\phi(0, t) = -\bar{\phi}_0, \quad \phi(+\infty, t) = 0, \quad (4.36)$$

$$(n_i, q_i)(0, t) = (n_{i0}, q_{i0})(t), \quad (n_i(+\infty), q_i(+\infty)) = (\bar{n}_0, \bar{q}_{i0}), \quad (4.37)$$

$$(n_e, q_e)(0, t) = (n_{e0}, q_{e0})(t), \quad (n_e(+\infty), q_e(+\infty)) = (\bar{n}_0, \bar{q}_{e0}), \quad (4.38)$$

avec  $(\bar{\phi}_0, \bar{n}_0, \bar{q}_{i0}, \bar{q}_{e0}) = (\bar{\phi}, \bar{n}, \bar{q}_i, \bar{q}_e)|_{(0,t)}$  et où  $(n_{i0}, q_{i0})$  et  $(n_{e0}, q_{e0})$  sont les solutions respectives au point  $x = 0$  des problèmes de Riemann suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_i + \partial_x q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \partial_x ((q_i)^2/n_i + p_i(n_i)) = 0, \\ (n_i, q_i)(x, 0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n_0 \\ q_0 \end{pmatrix}, & \text{si } x < 0, \\ \begin{pmatrix} n_i^+ \\ q_i^+ \end{pmatrix}, & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_e + \partial_x q_e = 0, \\ \varepsilon \partial_t q_e + \partial_x (\varepsilon (q_e)^2/n_e + p_e(n_e)) = 0, \\ (n_e, q_e)(x, 0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n_0 \\ q_0 \end{pmatrix}, & \text{si } x < 0, \\ \begin{pmatrix} n_e^+ \\ q_e^+ \end{pmatrix}, & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.39)$$



où  $(n_{i,e}^+, q_{i,e}^+) = \lim_{y \rightarrow 0} (n_{i,e}(y, t), q_{i,e}(y, t))$  pour tout  $t > 0$ .

Le but de ce paragraphe est de trouver  $\bar{n}_0, \bar{q}_{i0}, \bar{q}_{e0}$  et  $\bar{\phi}_0$ , tels que le problème de couche limite admette une solution. Il est important de noter que les conditions aux limites sont implicitement définies par la couche limite elle-même puisque les états  $(n_{i,e}^+, q_{i,e}^+)$  sont donnés par la solution du problème de couche limite. Ceci rend le problème fortement non linéaire.

Pour résoudre ce problème, on doit introduire les enthalpies totales des systèmes ionique et électronique. Elles sont données comme des fonctions de la densité puisque les quantités de mouvement sont constantes dans la couche limite :

$$k_i(n) = \frac{(\bar{q}_{i0})^2}{2n^2} + \frac{C_i \gamma_i}{\gamma_i - 1} n^{\gamma_i - 1}, \quad k_e(n) = \frac{\varepsilon (\bar{q}_{e0})^2}{2n^2} + \frac{C_e \gamma_e}{\gamma_e - 1} n^{\gamma_e - 1}. \quad (4.40)$$

Ces fonctions  $k_i$  et  $k_e$  sont non monotones. Elles sont décroissantes respectivement sur  $(0, n_{iS})$  et  $(0, n_{eS})$ , et croissantes respectivement sur  $(n_{iS}, +\infty)$  et  $(n_{eS}, +\infty)$ , où  $n_{iS}$  et  $n_{eS}$  sont les points soniques des ions et des électrons définis par

$$n_{iS} = \left( \frac{(\bar{q}_{i0})^2}{C_i \gamma_i} \right)^{1/(\gamma_i + 1)}, \quad n_{eS} = \left( \frac{\varepsilon (\bar{q}_{e0})^2}{C_e \gamma_e} \right)^{1/(\gamma_e + 1)}. \quad (4.41)$$

Notons qu'un état  $(n, \bar{q}_{i0})$  est supersonique pour  $n < n_{iS}$  et subsonique pour  $n > n_{iS}$ , d'où l'appellation de point sonique pour  $n_{iS}$ . Il en est de même pour les électrons. On suppose que  $n_{iS} > n_{eS}$ . Ceci est le cas si  $\varepsilon$  est petit, si  $\bar{q}_{i0}$  et  $\bar{q}_{e0}$  sont du même ordre et si  $C_e, C_i, \gamma_i$  et  $\gamma_e$  sont des paramètres d'ordre 1. De même, on définit l'enthalpie totale du plasma par  $k(n) = k_i(n) + k_e(n)$  pour tout  $n > 0$ . Cette fonction a le même comportement que  $k_i$  et  $k_e$ , on note  $n_S$  le point sonique du plasma. L'hypothèse  $n_{iS} > n_{eS}$  implique alors que  $n_{iS} > n_S > n_{eS}$ .

On montre le résultat suivant en considérant tous les cas possibles dans la résolution des problèmes de Riemann (4.39).

**Théorème 4.1** *On considère le problème de couche limite (4.32)-(4.39), où  $(n_0, q_0)$  est un état subsonique pour les ions et pour les électrons. De plus, on suppose que  $q_{i0}, q_{e0} > 0$  (ce qui revient à supposer que le plasma entre dans le domaine). Alors*

1. Si  $\bar{n}_0 > n_{iS} > n_{eS}$  on a

1.1 Si  $(n_{i0}, q_{i0})$  est donné par  $n_{i0} = n_{ic} \leq n_0$ , avec  $n_{ic}$  défini par

$$n_{ic} = \left( \left( \frac{q_0}{n_0} + \frac{2\sqrt{k_l \gamma_l}}{\gamma_l - 1} n_0^{(\gamma_l - 1)/2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{k_l \gamma_l} + \frac{2\sqrt{k_l \gamma_l}}{\gamma_l - 1}} \right) \right)^{2/(\gamma_l - 1)}, \quad (4.42)$$

pour  $l = i$  ou  $e$  et avec  $k_i = C_i$  et  $k_e = C_e/\varepsilon$ , si de plus  $q_{i0} = \sqrt{C_i \gamma_i} n_{i0}^{(\gamma_i + 1)/2}$  et si  $(n_{e0}, q_{e0})$  satisfait

$$n_0 \geq n_{e0} > n_{ec}, \quad q_{e0} = n_{e0} \left( \frac{q_0}{n_0} + \frac{2\sqrt{\gamma_e C_e/\varepsilon}}{\gamma_e - 1} \left( n_0^{\frac{\gamma_e - 1}{2}} - n_{e0}^{\frac{\gamma_e - 1}{2}} \right) \right), \quad (4.43)$$

ou si  $(n_{e0}, q_{e0})$  satisfait

$$n_{e0} > n_0, \quad q_{e0} = n_{e0} \left( \frac{q_0}{n_0} - (n_{e0} - n_0) \sqrt{\frac{p_e(n_{e0}) - p_e(n_0)}{\varepsilon (n_{e0} - n_0) n_{e0} n_0}} \right), \quad (4.44)$$

le problème (4.32)-(4.39) admet une solution. Trois cas sont alors possibles

- La solution existe si  $n_{i0}$  et  $n_{e0}$  satisfont

$$k_i(n_{i0}) + k_e(n_{e0}) \geq k_i(n_S) + k_e(n_S), \quad (4.45)$$

où  $n_S$  est le point sonique du plasma. Cette solution est continue avec un potentiel,  $\phi$ , et une densité électronique,  $n_e$ , croissants et une densité ionique,  $n_i$ , décroissante. Elle satisfait

$$\bar{\phi}_0 = k_i(n_{i0}) - k_i(\bar{n}_0), \quad \bar{q}_{i0} = q_{i0}, \quad \bar{q}_{e0} = q_{e0}, \quad (4.46)$$

$$k_i(n_{i0}) + k_e(n_{e0}) = k_i(\bar{n}_0) + k_e(\bar{n}_0). \quad (4.47)$$

- La solution existe si  $n_{i0}$  et  $n_{e0}$  satisfont (4.45). Elle est continue avec un potentiel,  $\phi$ , et une densité électronique,  $n_e$ , décroissants et une densité ionique,  $n_i$ , croissante. De plus, elle satisfait (4.46), (4.47).

- La solution est non régulière avec un saut de  $n_i$  d'un état gauche  $n_i^{*, -}$  à un état droit  $n_i^{*, +}$ . La densité des ions  $n_i$ , est non monotone, le potentiel,  $\phi$ , et la densité électronique,  $n_e$ , sont décroissants. Cette solution existe si la condition suivante est satisfaite

$$k_e(n_{e0}) > k_e(n_S) + k_i(n_S) - k_i(n_i^{*, +}) + k_i(n_i^{*, -}) - k_i(n_{iS}), \quad (4.48)$$

## 1.2 Si $(n_{i0}, q_{i0})$ satisfait

$$n_0 \geq n_{i0} > n_{ic}, \quad q_{i0} = n_{i0} \left( \frac{q_0}{n_0} + \frac{2\sqrt{C_i} \gamma_i}{\gamma_i - 1} \left( n_0^{(\gamma_i-1)/2} - n_{i0}^{(\gamma_i-1)/2} \right) \right),$$

ou si  $(n_{i0}, q_{i0})$  satisfait

$$n_{i0} > n_0, \quad q_{i0} = n_{i0} \left( \frac{q_0}{n_0} - (n_{i0} - n_0) \sqrt{\frac{p_i(n_{i0}) - p_i(n_0)}{(n_{i0} - n_0) n_{i0} n_0}} \right).$$

1.2.1 Si  $(n_{e0}, q_{e0})$  est donné par  $n_{e0} = n_{ec} \leq n_0$ , avec  $n_{ec}$  défini par (4.42), et  $q_{e0} = \sqrt{\gamma_e C_e / \varepsilon} n_{e0}^{(\gamma_e+1)/2}$ , le problème (4.32)-(4.39) admet une solution. Deux cas sont alors possibles

- La solution existe si  $n_{i0}$  et  $n_{e0}$  satisfont (4.45). Elle est continue avec un potentiel,  $\phi$ , et une densité électronique,  $n_e$ , croissants, et une densité ionique,  $n_i$ , décroissante. Elle satisfait (4.46), (4.47).

- La solution est non régulière avec un saut de  $n_e$  d'un état gauche  $n_e^{*, 1, -}$  vers un état droit  $n_e^{*, 1, +}$ . La densité électronique,  $n_e$ , est non

monotone et le potentiel,  $\phi$ , et la densité ionique,  $n_i$ , sont respectivement croissant et décroissant. Cette solution existe si

$$k_i(n_{i0}) > k_i(n_S) + k_e(n_S) - k_e(n_e^{*,1,+}) + k_e(n_e^{*,1,-}) - k_e(n_{eS}).$$

1.2.2 Si  $(n_{e0}, q_{e0})$  satisfait (4.43) ou (4.44), le problème (4.32)-(4.39) admet une solution. Deux cas sont alors possibles

- La solution existe si  $n_{e0} \leq \bar{n}_0$  et si de plus  $n_{i0}$  et  $n_{e0}$  satisfont (4.45). Elle est continue avec un potentiel,  $\phi$ , et une densité électronique,  $n_e$ , croissants et une densité ionique,  $n_i$ , décroissante. Elle satisfait (4.46), (4.47).

- La solution est non régulière avec un saut de  $n_i$  d'un état gauche  $n_i^{*, -}$  vers un état droit  $n_i^{*, +}$ . La densité ionique est non monotone, le potentiel,  $\phi$ , et la densité électronique,  $n_e$ , sont tous deux décroissants. Cette solution existe si (4.48) est satisfaite.

2. Si  $n_{iS} > n_S > \bar{n}_0 > n_{eS}$ , si  $(n_{i0}, q_{i0})$  est donné par  $n_{i0} = n_{ic} \leq n_0$  et  $q_{i0} = \sqrt{C_i \gamma_i} n_{i0}^{(\gamma_i+1)/2}$ , et si  $(n_{e0}, q_{e0})$  satisfait (4.43) ou (4.44) alors, le problème de couche limite (4.32)-(4.39) admet une solution. Cette solution existe si (4.45) est satisfaite. Elle est continue, avec un potentiel,  $\phi$ , et des densités ionique et électronique,  $n_i$  et  $n_e$ , décroissants. De plus, elle satisfait (4.46), (4.47).

#### 4.4.4 Résultats numériques avec des conditions aux limites préparées au régime quasi-neutre

On utilise la résolution du problème de couche limite pour déterminer des conditions aux limites bien préparées au régime quasi-neutre. Notons que le Théorème 4.1 montre que plusieurs conditions aux limites (dépendant de l'information contenue dans le domaine) donne une solution au problème de couche limite. Il faut sélectionner la bonne, pour cela, on se base sur les simulations numériques réalisées dans le cas résolu. On cherche une solution du problème de couche limite avec des densités électronique et ionique décroissantes. Or, une seule solution répond à ces critères, celle du point 2. dans le Théorème 4.1. Pour cette solution, l'état ionique en  $x = 0$  dans le problème de couche limite, noté  $(n_{i0}, q_{i0})$ , est complètement déterminé par l'information venant de la gauche c'est-à-dire de l'extérieur du domaine. Par contre, ce même état pour les électrons ne l'est pas. Mais ceci n'est pas surprenant, en effet,  $\varepsilon$  étant petit, l'état en sortie de couche limite est subsonique pour les électrons (une valeur propre négative et une positive). Ainsi, il ne peut être déterminé complètement par l'information venant de la gauche, c'est-à-dire de l'extérieur du domaine. Il est nécessaire d'utiliser l'information venant de la droite, c'est-à-dire du cœur du plasma, pour déterminer les conditions aux limites.

On peut toutefois, en négligeant  $\varepsilon$ , déterminer complètement la densité quasi-neutre  $\bar{n}_0$ , la quantité de mouvement ionique  $\bar{q}_{i0}$  ainsi que le potentiel  $\bar{\phi}_0$ , en sortie de couche limite. Pour cela, on utilise (4.46), (4.47) en remarquant que la limite de l'enthalpie totale électronique  $k_e$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  est l'enthalpie  $h_e(n) = C_e \gamma_e / (\gamma_e -$

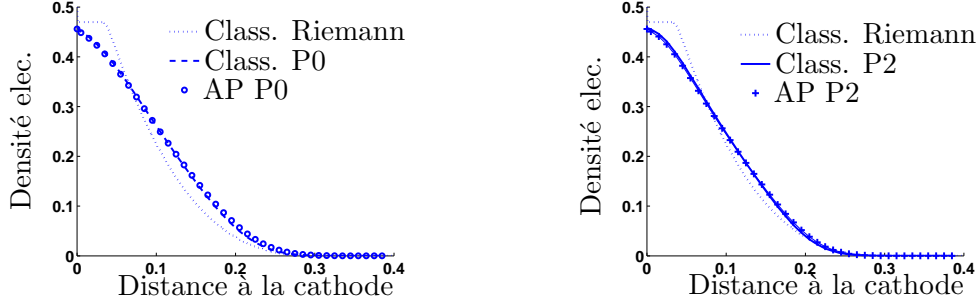


Figure 4.7: Densité électronique en fonction de  $x$  au temps adimensionné  $t = 0.05$ , dans le cas non résolu en espace,  $\Delta x = 10^{-2} > \lambda = 10^{-4}$ . Le schéma classique résout la période plasma,  $\Delta t \leq \tau$ , et le schéma AP ne la résout pas,  $\Delta t > \tau$ . Les solveurs  $P0$  et  $P2$  sont utilisés avec les conditions aux limites préparées au régime quasi-neutre, données par  $n_e = n_i = \bar{n}_0$ ,  $q_e = \bar{q}_{e0}$ ,  $q_i = \bar{q}_{i0}$  et  $\phi = \bar{\phi}_0$ . Ces courbes sont comparées à la courbe de référence obtenue avec le schéma classique, le solveur de Riemann, les conditions aux limites non préparées,  $n_e = n_i = n_0$ ,  $q_e = q_i = q_0$  et  $\phi = 0$ , dans le cas résolu  $\Delta x = \lambda$  et  $\Delta t \leq \tau$ .

1)  $n^{\gamma_e-1}$  ne dépendant pas de  $\bar{q}_{e0}$ . Pour la quantité de mouvement électronique on pose  $\bar{q}_{e0} = \lim_{x \rightarrow 0} \bar{q}_e(x, t)$  où  $\bar{q}_e$  est la solution quasi-neutre, puisque dans la couche limite  $q_e$  est constante. On utilise ces conditions aux limites pour réaliser des simulations numériques du cas test précédemment présenté. Les résultats sont donnés par la Figure 4.7.

On utilise la même courbe de référence que précédemment, c'est-à-dire celle donnée par le schéma classique avec le solveur de Riemann dans le cas résolu ( $\Delta x = \lambda$  et  $\Delta t \leq \tau$ ) et en n'utilisant pas les conditions aux limites bien préparées. On compare les schémas classique et AP avec les solveurs  $P0$  et  $P2$  dans le cas non résolu en espace, ( $\Delta x = 10^{-2} > \lambda = 10^{-4}$ ) et avec les conditions aux limites bien préparées. Le schéma classique résout la période plasma,  $\Delta t \leq \tau$ , et le schéma AP ne la résout pas,  $\Delta t > \tau$ . On peut voir que tous les schémas donnent des résultats proches de la courbe de référence. Seul le plateau en sortie de couche limite est mal décrit. Toutefois il est important de remarquer que le solveur  $P2$  est maintenant stable, je rappelle qu'il ne l'était pas avec des conditions aux limites non préparées. Ces conditions aux limites permettent donc d'utiliser des solveurs généraux sans résoudre la longueur de Debye.

## 4.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, j'ai présenté un schéma préservant l'asymptotique quasi-neutre pour le modèle bifluide Euler-Poisson. Des simulations numériques ainsi qu'une analyse de stabilité ont montré le bon comportement de ce schéma par rapport au schéma classiquement utilisé. Il permet de réduire le coût des simulations numériques de manière très importante. De plus, l'analyse d'un problème de couche limite au point

d'injection nous a permis de déterminer des conditions aux limites bien préparées au régime quasi-neutre. Ainsi, la généralisation du schéma AP à des solveurs généraux est possible sans résoudre la longueur de Debye.

Beaucoup de perspectives s'offrent à la suite de ce travail. Tout d'abord des perspectives concernant le schéma AP pour Euler-Poisson. Le schéma AP peut être utilisé avec des maillages grossiers. Sur ces maillages, il reste stable mais bien sûr on perd en précision. Le passage à des schémas d'ordre plus élevé est nécessaire pour augmenter la précision. Pour augmenter l'ordre du schéma, on peut utiliser les techniques de Galerkin-Discontinu, ce que j'ai commencé à faire en collaboration Pierre Degond et Shi Wang Shu.

On étudie de plus l'extension à d'autres systèmes. Le passage à Euler complet se fait assez aisément, un travail est en cours sur ce sujet incluant l'étude du problème de couche limite. De plus, je travaille à l'extension du schéma AP au cas d'Euler-Maxwell en collaboration avec Pierre Degond, Fabrice Deluzet et Dominique Savelief.

En collaboration avec Annalisa Ambroso, Pierre Degond, Fabrice Deluzet, Nadia Lemarchant, Pascal Omnès et Jacques Segré, je travaille sur un schéma AP dans la limite bas Mach pour le système d'Euler.

Enfin, pour terminer le problème de couche limite garde encore quelques secrets. Tout d'abord l'approximation  $\varepsilon$  petit peut certainement être levée en résolvant de manière exacte, au moins numériquement, le problème de couche limite. Ceci permettrait peut être de reproduire le plateau en sortie de couche limite. J'aimerais également comprendre le miracle des solveurs à matrices de viscosité numérique diagonales (solveurs de Lax-Friedrichs modifié et polynomial de degré 0) qui réussissent à rester stable sans que le maillage résolve la couche limite.



## Chapitre 5

# Modèles cinétiques pour le transport de particules

Dans ce chapitre on s'intéresse à des modèles de type cinétique décrivant le transport de particules. Ces travaux sont publiés dans [N1], [A3], [CR1] et [CR3]. Ils ont été réalisés en collaboration avec Pierre Degond, Komla Domelevo, Céline Parzani et Rachid Talaalout.

Le premier paragraphe concerne le transport de particules chargées ou non, confinées contre une paroi par un potentiel extérieur.

Dans le deuxième paragraphe on étudie un modèle diphasique simplifié décrivant le transport de gouttelettes dans un fluide.

### 5.1 Confinement de particules dans un puits de potentiel

Dans ce paragraphe, je décris les travaux publiés dans [CR1], [CR3] ainsi que les travaux publiés dans [A3].

On s'intéresse ici à la modélisation de particules soumises à un potentiel extérieur dans un demi-espace. Le potentiel appliqué confine les particules contre la surface délimitant le demi-espace. Le point de départ de la modélisation est l'équation de Vlasov décrivant le transport des particules. Il est classique en modélisation mathématique, de dériver un modèle asymptotique contenant un plus petit nombre de variables que la description cinétique. Ceci est possible lorsque les conditions physiques le permettent, par exemple lorsque les particules sont soumises à un grand nombre de collisions. Le modèle limite dépend alors de la nature des collisions considérées. Dans le problème considéré ici, les particules étant confinées contre la paroi, elles entrent en collision de manière répétée avec la paroi. Ceci va nous permettre de dériver différents modèles asymptotiques suivant la nature des collisions.

Nous nous sommes intéressés à ce problème en liaison avec une application industrielle proposée par Jean-Pierre Catani et Denis Payan du CNES. Ce problème concerne les phénomènes d'arcs électriques sur les panneaux solaires des satellites déjà décrit dans le paragraphe 3.2. Je rappelle brièvement le contexte physique. Les satellites sont alimentés en énergie par des panneaux solaires constitués de chaînes de cellules photo-voltaïques, montées en parallèle. Lorsque la tension délivrée par chaque chaîne dépasse la valeur seuil de cinquante Volts des phénomènes d'arcs électriques apparaissent et conduisent parfois au court-circuitage de toute la chaîne concernée.

Le scénario retenu par les physiciens se décompose en trois phases, voir [5], [8] et [9]. Tout d’abord une décharge primaire a lieu créant un plasma haute densité. Ce plasma se détend dans le vide entre deux cellules. Lorsque le plasma a rempli tout l’espace entre les cellules, l’arc électrique peut s’établir. Ici, on veut décrire la décharge primaire.

Dans [8], les mécanismes physiques entrant en jeu dans la décharge primaire sont décrits de la manière suivante. Cette décharge primaire a lieu dans l’espace séparant deux cellules solaires, au pied d’une des deux cellules. Au démarrage du phénomène, une différence de potentiel entre le diélectrique constituant les cellules et les inter-connecteurs métalliques est à l’origine d’une émission électronique. L’effet de ce champ est renforcé par la présence d’irrégularités sur la surface émettrice. Les électrons émis sont accélérés vers le sommet de la cellule par la différence de potentiel entre le pied et le sommet de la cellule. Au cours de leur trajet, ils sont attirés contre la surface de la cellule par un champ électrique transverse dû à la différence de potentiel entre les deux cellules. Ils vont alors rebondir contre la paroi de manière très répétée pendant leur trajet jusqu’au sommet de la cellule. En rebondissant contre la paroi, les électrons arrachent parfois des molécules de neutres ou des électrons. Ces processus s’appellent la “désorption de neutre par impact électronique” et l’“émission secondaire électronique”. Les électrons secondaires sont alors accélérés et entrent à leur tour en collision avec la paroi. Un phénomène d’avalanche a donc lieu créant un plasma de plus en plus dense.

Je commence par décrire brièvement les travaux publiés dans [CR1], [CR3]. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec P. Degond et R. Talaalout. Ce premier travail a permis de dégager les mécanismes physiques prédominants dans la formation du plasma pour l’application décrite ci-dessus.

Dans le paragraphe 5.1.2, je présente les travaux publiés dans [A3]. Dans cette étude, on se place dans un cadre plus général que celui de l’application précédente. On considère des particules piégées le long d’une surface par un potentiel confinant. À partir d’une description cinétique, on dérive un modèle bidimensionnel sur la surface de manière rigoureuse dans le cas où le potentiel est donné et de manière formelle lorsque l’équation de transport est couplée à l’équation de Poisson.

### 5.1.1 Modèle asymptotique de type énergie-transport

Dans [CR1], [CR3], on veut établir un modèle permettant de décrire la création du plasma haute densité le long de la paroi de la cellule solaire. Nous supposons que les collisions des électrons avec la surface sont diffusives. On note  $x = (\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$  la variable d’espace décomposée en la variable parallèle à la paroi  $\underline{x}$  et la variable transverse à la paroi  $z$ . On suppose alors que le potentiel appliqué se décompose sous la forme  $\phi(\underline{x}, z) = \phi_0(\underline{x}) + \psi(z)$  avec  $\psi(z) = -E_T z$  où  $E_T > 0$  est donné. Le potentiel  $\psi$  est appelé le potentiel confinant. Dans [13], P. Degond considérant le même problème, dérive un modèle de diffusion (aussi appelé modèle SHE pour Spherical Harmonics Expansion, voir [53]) à partir d’un modèle cinétique. Ce modèle consiste en une équation de diffusion pour la fonction de distribution des particules  $F$ . Cette distribution est une moyenne en espace dans la direction



transverse à la paroi ( $z$ ) ainsi qu'en vitesse pour une énergie donnée ( $\varepsilon$ ). Ici, on suppose de plus que les particules sont dans un équilibre local et ainsi leur distribution  $F(\underline{x}, \varepsilon, t)$  est une Maxwellienne

$$F(\underline{x}, \varepsilon, t) = \exp\left(\frac{\mu(\underline{x}, t) - \varepsilon}{T_e(\underline{x}, t)}\right),$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $T_e > 0$  sont le potentiel chimique et la température des électrons. En intégrant le modèle SHE sur toutes les énergies, on obtient un modèle de type énergie-transport sur les densités surfaciques de particules ( $n_e$ ) et d'énergie ( $W_e$ ) :

$$\begin{aligned}\partial_t n_e + \nabla_{\underline{x}} \cdot J_n &= Q_n, \\ \partial_t W_e + \nabla_{\underline{x}} \cdot J_w - J_n \cdot \nabla_{\underline{x}} \phi_0 &= Q_w.\end{aligned}$$

Ces quantités sont reliées au potentiel chimique et à la température par les relations  $n_e = (2\pi e/m_e)^{3/2} T_e^{5/2}/E_T \exp(\mu/T_e)$  et  $W_e = 5n_e T_e/2$ , où  $e > 0$  est la charge élémentaire et  $m_e$  est la masse des électrons. De plus, les courants de particules et d'énergie sont donnés par

$$\begin{aligned}J_n &= -D_{11} (\nabla_{\underline{x}}(\mu/T_e) - \nabla_{\underline{x}}\phi_0/T_e) - D_{12} \nabla_{\underline{x}}(-1/T_e), \\ J_w &= -D_{21} (\nabla_{\underline{x}}(\mu/T_e) - \nabla_{\underline{x}}\phi_0/T_e) - D_{22} \nabla_{\underline{x}}(-1/T_e),\end{aligned}$$

où les  $D_{i,j}$  sont les coefficients de la matrice de diffusion  $D$  donnée en fonction de  $n_e$ ,  $T_e$  et  $E_T$ , voir [CR1].

Ce modèle est enrichi de physique au travers des termes sources  $Q_n$  et  $Q_w$ . Ils permettent de prendre en compte les collisions inélastiques à la paroi (i.e. celles ne conservant pas l'énergie) comme la désorption de neutres, l'émission secondaire électronique ou l'attachement à la paroi. Lorsqu'un électron entre en collision avec la surface, s'il possède assez d'énergie, il arrache à la paroi une molécule neutre adsorbée ou des électrons. Dans le dernier cas, la surface se trouve alors chargée positivement, ce qui lui permet de recapturer des électrons de faible énergie.

Pour tenir compte de l'évolution du potentiel électrique, on résout une équation de Poisson bidimensionnelle

$$-\Delta_{\underline{x}} \phi_0 = \frac{e}{d} \left( \frac{n_s}{\epsilon_d} - \frac{n_e}{\epsilon_0} \right),$$

où  $d$  est une approximation de l'épaisseur du nuage électronique, dans la direction transverse à la paroi,  $\epsilon_d$  et  $\epsilon_0$  sont les permittivités du diélectrique constituant la paroi, et du vide. Enfin,  $n_s$  est la densité des charges positives laissées à nue sur la surface après une émission secondaire. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette équation de Poisson bidimensionnelle n'est pas la bonne équation à considérer. En effet, la dérivation (formelle) du modèle bidimensionnel montre qu'on doit résoudre une équation de Poisson tridimensionnelle avec une densité concentrée (par un Dirac) sur la surface. Mais à ce stade de l'étude nous n'avons pas encore réalisé cette analyse.

On fixe les conditions initiales et aux limites du modèle, en supposant qu'initialement le domaine est vide de particules et en supposant une injection d'électrons dans

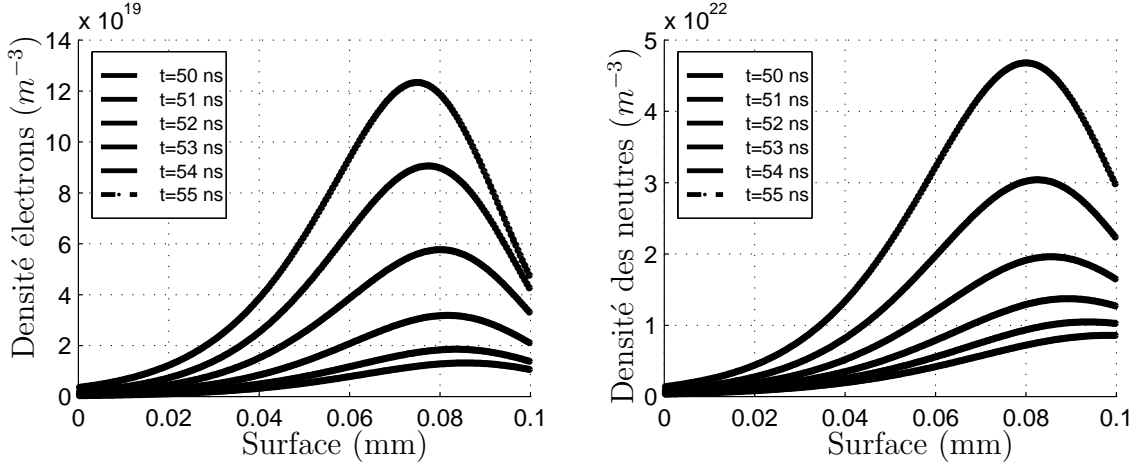


Figure 5.1: À gauche : densité volumique des électrons le long de la paroi de la cellule à différents instants. Elle est obtenue à partir de la densité surfacique  $n_e$  donnée par le modèle, divisée par l'approximation de l'épaisseur du nuage  $d$ . À droite : densité des neutres désorbés de la surface par impact électronique.

le domaine, au pied de la cellule, due à une émission par effet de champ renforcé (comme dans le cas des diodes à fort courant avec les cathodes à pointes décrites dans le paragraphe 3.2 du Chapitre 3).

Nous avons réalisé des simulations numériques en une dimension d'espace. Sur la Figure 5.1, on voit la densité des électrons et la densité des neutres désorbés par impact électronique. On voit clairement que le phénomène d'avalanche attendu apparaît permettant ainsi la création du plasma. Notons que la formation du plasma se fait au sommet de la cellule, là où les électrons ont suffisamment acquis d'énergie pour arracher des neutres ou des électrons à la paroi.

### 5.1.2 Dérivation d'un modèle de type Boltzmann pour des particules confinées contre une paroi

Dans [A3], on s'intéresse à la modélisation de particules confinées contre une paroi par un potentiel extérieur. Le modèle de départ est le suivant. On considère le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0)$  et on suppose qu'une paroi est située sur le bord de  $\Omega$  :  $\partial\Omega = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . On note  $x = (\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ ,  $v = (\underline{v}, v_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  les vecteurs positions et vitesses. De part leur relation géométrique avec la paroi,  $\underline{x}$  et  $\underline{v}$  sont appelées les composantes parallèles des vecteurs position et vitesse, et  $z$  et  $v_z$  sont appelées les composantes transverses de ces vecteurs.

Soit  $f$  la fonction de distribution des particules. Elle satisfait l'équation de Vlasov

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{E}{m} \cdot \nabla_v f = 0, \quad (5.1)$$

pour tout  $(x, v, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ , où  $m$  est la masse des particules et  $E$  est la résultante des forces exercées sur les particules supposée, ici, dérivant d'un potentiel.

On traite deux cas possibles pour  $E$ . Tout d'abord, le cas de particules non chargées avec  $E = -\nabla_x \phi$  où  $\phi$  est un potentiel donné. Enfin, on s'intéresse au cas de particules chargées et  $E = -q\nabla_x(\phi + \phi_s)$  où  $q$  est la charge des particules,  $\phi$  le potentiel extérieur appliqué et donc donné, et  $\phi_s$  est le potentiel auto-consistant donné par l'équation de Poisson

$$-\epsilon_0 \Delta_x \phi_s = q \int_{\mathbb{R}^3} f(v) dv, \quad (5.2)$$

pour  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$  et où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide.

Afin d'établir un modèle asymptotique, on commence par adimensionner le problème. Je me place dans le cas des particules chargées, l'autre cas se déduit aisément de celui-ci. Le but de ce travail est d'obtenir un modèle asymptotique dans la situation où le potentiel extérieur confine les particules contre la surface  $\partial\Omega$ . On note  $L_{\parallel}$  et  $L_{\perp}$  les longueurs caractéristiques dans les directions respectivement parallèle et transverse. On suppose que  $\alpha = L_{\perp}/L_{\parallel}$  est un petit paramètre (sans dimension). On note  $\phi_c$  tel que  $\text{signe}(\phi_c) = \text{signe}(q)$ ,  $v_c = \sqrt{q\phi_c/m}$ , et  $f_c$  les échelles caractéristiques des potentiel, vitesse et distribution. On introduit alors le changement de variables  $\underline{x} = L_{\parallel} \hat{x}$ ,  $z = L_{\perp} \hat{z} = \alpha L_{\parallel} \hat{z}$ ,  $v = v_c \hat{v}$  et  $t = L_{\parallel}/v_c \hat{t}$ . En espace, ceci revient à zoomer dans la direction transverse à la surface. On suppose qu'il existe  $\hat{\phi}$ , indépendant de  $\alpha$  et tel que  $\phi(x, t) = \phi_c \hat{\phi}(\hat{x}, \hat{t})$ , pour tout  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ . De plus, on définit  $f^\alpha$  et  $\phi_s^\alpha$  par

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= f_c f^\alpha(\hat{x}, \hat{v}, \hat{t}) \quad \text{for } (x, v, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ \phi_s(x, t) &= \phi_c \phi_s^\alpha(\hat{x}, \alpha \hat{z}, \hat{t}) \quad \text{for } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Il est important de noter qu'on ne localise pas le potentiel auto-consistant dans la variable transverse. Ceci est dû au fait que le Laplacien est un opérateur non local. En effet, il est bien connu qu'une variation de la densité de particules localement contre la surface modifie le potentiel auto-consistant dans tout le demi-espace.

Cet adimensionnement conduit à l'introduction d'un paramètre sans dimension défini par  $(f_c v_c) \times (q L_{\parallel}^2 / \epsilon_0 \phi_c)$ . On le choisit égal à  $1/\alpha$ . Cette hypothèse revient à supposer que puisque toutes les particules sont confinées contre la paroi, le nombre de particules  $y$  est très élevé. En effet, on alors  $f_c v_c = (\epsilon_0 \phi_c / q L_{\parallel}^2) / \alpha$ .

En insérant cet adimensionnement dans (5.1), (5.2), on obtient pour tout  $(\underline{x}, z) \times (\underline{v}, v_z) \times t \in \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$  :

$$\partial_t f^\alpha(z) + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} f^\alpha(z) - \left( \nabla_{\underline{x}} \phi(z) + \nabla_{\underline{x}} \phi_s^\alpha(\alpha z) \right) \cdot \nabla_{\underline{v}} f^\alpha(z) \quad (5.3)$$

$$- \partial_z \phi_s^\alpha(\alpha z) \partial_{v_z} f^\alpha(z) + \frac{1}{\alpha} \left( v_z \partial_z f^\alpha(z) - \partial_z \psi(z) \partial_{v_z} f^\alpha(z) \right) = 0,$$

$$- \Delta_{\underline{x}} \phi_s^\alpha(\underline{x}, \alpha z, t) - \partial_{zz}^2 \phi_s^\alpha(\underline{x}, \alpha z, t) = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f^\alpha(\underline{x}, z, v, t) dv, \quad (5.4)$$

où  $\psi$  est la partie transverse du potentiel extérieur définie par

$$\psi(\underline{x}, z, t) = \phi(\underline{x}, z, t) - \phi_0(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \phi_0(\underline{x}, t) = \phi(\underline{x}, 0, t). \quad (5.5)$$

Dans le cas non couplé avec Poisson, l'équation de Vlasov adimensionnée est donnée, dans  $\Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ , par

$$\partial_t f^\alpha + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} f^\alpha - \nabla_{\underline{x}}(\phi_0 + \psi) \cdot \nabla_{\underline{v}} f^\alpha + \frac{1}{\alpha} \left( v_z \partial_z f^\alpha - \partial_z \psi \partial_{v_z} f^\alpha \right) = 0. \quad (5.6)$$

On complète ces équations par une condition initiale  $f^\alpha(t=0) = f_0$ , et des conditions aux limites. Pour cela, on introduit les traces de  $f$  entrante et sortante du domaine en  $\partial\Omega$ . Elles sont respectivement notées  $\gamma^-(f)(\underline{x}, (\underline{v}, v_z), t)$  pour tout  $v_z < 0$  et  $\gamma^+(f)(\underline{x}, (\underline{v}, v_z), t)$  pour tout  $v_z > 0$ . On pose alors

$$\gamma^-(f^\alpha)(v_z) = \beta \mathcal{S} \gamma^+(f^\alpha)(v_z) + (1 - \beta) \mathcal{K} \gamma^+(f^\alpha)(v_z) \quad \text{pour tout } v_z < 0, \quad (5.7)$$

où  $\mathcal{S}$  est l'opérateur de réflexion spéculaire sur  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{K}$  est un opérateur général de collisions sur cette même surface, enfin  $\beta$  est la probabilité pour une particule arrivant sur la paroi, d'être réémise de manière spéculaire. Cette constante sera choisie égale à 1 ou  $1 - \alpha$  ce qui revient à dire que soit on ne considère que des réflexions spéculaires soit elles sont le processus de collisions dominant à la paroi. Les opérateurs  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{K}$  sont donnés par

$$\mathcal{S} \gamma^+(f)(v_z) = \gamma^+(f)(-v_z), \quad \text{et} \quad \mathcal{K} \gamma^+(f)(v_z) = \int_{\{v'=(\underline{v}', v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} K(v', v) \gamma^+(f)(v'_z) v'_z dv',$$

où  $K(v', v) |v_z| dv$  est le nombre de particules réémises dans  $[v, v + dv]$  pour une particule arrivant sur la surface  $\partial\Omega$ , avec une vitesse  $v'$ .

Dans le cas couplé avec l'équation de Poisson, on impose les conditions aux limites suivantes sur le potentiel

$$\partial_z \phi_s^\alpha(z=0) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi_s^\alpha(x, \cdot) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+. \quad (5.8)$$

Dans [A3], on se place dans le cas d'un potentiel attractif pour les particules. On suppose donc

**Hypothèse 5.1** *Pour tout  $(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , la fonction  $z \in \mathbb{R}^- \mapsto \psi(\underline{x}, z, t) \in \mathbb{R}$  est décroissante, continue et satisfait  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \psi(\underline{x}, z, t) = +\infty$ .*

On montre alors le résultat suivant pour les particules non chargées

**Théorème 5.1** *Soit  $\alpha > 0$ ,  $f_0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$  à support compact dans  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3$  et  $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ , on suppose  $\beta = 0$  et que  $\phi_0$  et  $\psi$ , les parties parallèle et transverse du potentiel extérieur  $\phi$ , définies par (5.5), satisfont l'hypothèse 5.1. On note  $f^\alpha \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]) \cap C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$  pour tout  $T > 0$ , la solution faible de (5.6) et (5.7). Alors, il existe  $f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$  pour tout  $T > 0$ , telle que*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f^\alpha = f \quad \text{dans } L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]) \text{ pour la topologie faible } \star.$$

De plus, il existe  $F \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times [0, T])$  pour tout  $T > 0$  telle que

$$f(\underline{x}, z, \underline{v}, v_z, t) = F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t),$$

pour presque tout  $(\underline{x}, z, \underline{v}, v_z, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ , où  $\varepsilon_z = |v_z|^2/2 + \psi(\underline{x}, z, t)$ . La fonction  $F$  satisfait

$$\begin{aligned} \left[ \partial_t + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} - \left( \nabla_{\underline{x}} \phi_0 + \langle \nabla_{\underline{x}} \psi \rangle \right) \cdot \nabla_{\underline{v}} \right] (N_z F) \\ + \partial_{\varepsilon_z} \left[ \left( \langle \partial_t \psi \rangle + \underline{v} \cdot \langle \nabla_{\underline{x}} \psi \rangle \right) (N_z F) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \times (0, +\infty))$ , où pour toute fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^-$  dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ),  $\langle g \rangle$  est la valeur moyenne de  $g$  dans la direction transverse et donnée par

$$\langle g \rangle = \frac{2}{N_z(\underline{x}, \varepsilon_z, t)} \int_{\mathcal{Z}(\underline{x}, \varepsilon_z, t)}^0 \frac{g(z)}{v_z(\underline{x}, z, \varepsilon_z, t)} dz,$$

où  $v_z(\underline{x}, z, \varepsilon_z, t) = \sqrt{2(\varepsilon_z - \psi(\underline{x}, z, t))}$ , et  $\varepsilon_z \mapsto \mathcal{Z}(\underline{x}, \varepsilon_z, t)$  est l'inverse de la bijection  $z \mapsto \psi(\underline{x}, z, t)$  de  $\mathbb{R}^-$  dans  $\mathbb{R}^+$ . La densité d'état,  $N_z$  est donnée par

$$N_z(\underline{x}, \varepsilon_z, t) = 2 \int_{\mathcal{Z}(\underline{x}, \varepsilon_z, t)}^0 \frac{1}{v_z(\underline{x}, z, \varepsilon_z, t)} dz.$$

Plusieurs remarques permettent de mieux comprendre le modèle limite.

Tout d'abord notons que  $\varepsilon_z(v_z, z) = |v_z|^2/2 + \psi(z)$  est l'énergie totale dans la direction transverse. Lorsqu'une particule part de la paroi avec une énergie totale transverse donnée, elle gagne de l'énergie potentielle et perd donc de l'énergie cinétique. Sa vitesse devient nulle lorsque toute l'énergie cinétique à été convertie en énergie potentiel, elle ne peut alors que faire demi-tour contre la paroi. La particule ne peut donc pas parcourir toutes les valeurs de  $z$  dans  $] -\infty, 0]$ . On retrouve ce résultat mathématiquement. En effet, pour une énergie positive et une vitesse transverse donnée, on a  $\varepsilon_z = \psi(z) + |v_z|^2/2 \geq 0$  et donc  $0 \leq \psi(z) = \varepsilon_z - |v_z|^2/2 \leq \varepsilon_z$ . Mais,  $\psi$  étant décroissante, son inverse l'est aussi et  $0 \geq z \geq \mathcal{Z}(\varepsilon_z)$ .

Le modèle asymptotique sur  $F$  est obtenu en intégrant l'équation limite dans la direction transverse et en moyennant en vitesse transverse pour une énergie transverse donnée. C'est-à-dire que formellement on multiplie l'équation limite sur  $f$  par  $\delta(\varepsilon_z(z, v_z) - \bar{\varepsilon}_z)$  où  $\bar{\varepsilon}_z$  est une énergie fixée et on intègre en  $z$  et en  $v_z$ . La remarque précédente permet de comprendre pourquoi on obtient des quantités finies même en intégrant sur  $] -\infty, 0]$  en  $z$ .

Un rapide calcul montre que  $N_z(\underline{x}, \varepsilon_0, t) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-} \delta(\varepsilon_z - \varepsilon_0) dz dv_z$ . Ainsi,  $N_z$  est le temps moyen qui s'écoule entre deux collisions avec la paroi pour une particule donnée. De plus,  $N_z(\underline{x}, \varepsilon_z, t) F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) d\underline{x} d\underline{v} d\varepsilon_z$  est le nombre de particules avec une position parallèle dans  $[\underline{x}, \underline{x} + d\underline{x}]$ , une vitesse parallèle dans  $[\underline{v}, \underline{v} + d\underline{v}]$ , une énergie totale transverse dans  $[\varepsilon_z, \varepsilon_z + d\varepsilon_z]$  et une position transverse dans  $[\mathcal{Z}(\underline{x}, \varepsilon_z, t), 0]$ .

Dans le cas couplé avec l'équation de Poisson (5.4), on obtient le résultat suivant

**Théorème 5.2 (Formel)** *Soit  $\alpha > 0$ ,  $f_0$  et  $\phi$  données, on suppose  $\beta = 1 - \alpha$  et que  $\phi_0$  et  $\psi$ , les parties parallèle et transverse du potentiel extérieur  $\phi$ , définies par (5.5), satisfont l'hypothèse (5.1). Soit  $f^\alpha$ ,  $\phi_s^\alpha$  une solution de (5.3), (5.4), (5.7). Alors, la limite formelle  $\alpha \rightarrow 0$  donne  $f^\alpha \rightarrow f$  et  $\phi_s^\alpha \rightarrow \phi_s$  avec*

$$f(x, v, t) = F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t),$$

où  $\varepsilon_z = |v_z|^2/2 + \psi(\underline{x}, z, t)$  et où  $F$  satisfait,

$$\begin{aligned} \partial_t(N_z F) + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}}(N_z F) - \left( \nabla_{\underline{x}} \tilde{\phi}_s + \nabla_{\underline{x}} \phi_0 + \langle \nabla_{\underline{x}} \psi \rangle \right) \cdot \nabla_{\underline{v}}(N_z F) \\ \partial_{\varepsilon_z} \left( \left( \langle \partial_t \psi \rangle + \underline{v} \cdot \langle \nabla_{\underline{x}} \psi \rangle \right) N_z F \right) = \mathcal{K}(F) - F, \end{aligned} \quad (5.10)$$

Les quantités  $N_z$  et  $\langle \cdot \rangle$  sont définies dans le Théorème 5.1. La fonction  $\tilde{\phi}_s$  est la trace du potentiel auto-consistant  $\phi_s$  sur la surface  $\partial\Omega$ . On a donc  $\tilde{\phi}_s = \phi_s(z=0)$  avec  $\phi_s$  donné par

$$\begin{cases} -\Delta_{\underline{x},z} \phi_s = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0), \\ \lim_{|(\underline{x},z)| \rightarrow +\infty} \phi_s(\underline{x}, z, t) = 0, \\ \partial_z \phi_s(z=0) = \rho = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+} N_z F d\varepsilon_z d\underline{v}, & \text{sur } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.11)$$

Enfin, l'opérateur  $\mathcal{K}$  est un opérateur de collisions tenant compte des collisions non spéculaires à la surface. Il est donné en fonction de  $K$  dans [A3].

Notons tout d'abord que pour les particules, la partie non spéculaire des collisions se retrouve, dans le modèle asymptotique, traité comme un opérateur de collisions en volume. Enfin, l'équation de Poisson limite est une équation sur tout le domaine avec une densité concentrée sur l'interface. On montre dans [A3] que la solution de cette équation est en fait la restriction à  $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$  de la solution de l'équation de Poisson sur tout l'espace avec au second membre la densité concentrée en  $z=0$  donnée par  $\rho(\underline{x}, t) \delta(z)$ . On retrouve la non localité des forces électriques. Enfin, un résultat similaire est établi rigoureusement dans [3] dans le cas quantique et dans tout l'espace.

Dans [A3], on utilise ce modèle pour réaliser des simulations numériques de la décharge primaire décrite dans l'introduction.

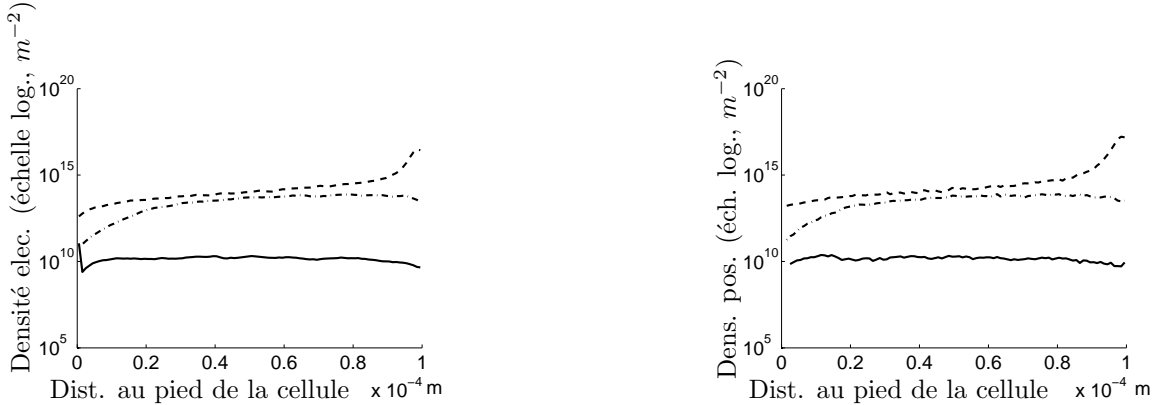


Figure 5.2: Densité électronique surfacique (à gauche) et densité surfacique des charges positives (à droite) en échelle logarithmique aux temps  $t = 5 \times 10^{-11}$ s (trait plein),  $t = 15 \times 10^{-11}$ s (tirets-pointillés) et  $t = 20 \times 10^{-11}$ s (pointillés).

On simplifie le modèle en se plaçant en une dimension d'espace et en supposant que le potentiel extérieur transverse ne dépend que de la variable transverse  $z$ .

Ces simplifications font que l'énergie transverse  $\varepsilon_z$  n'est plus qu'un paramètre de l'équation de transport (5.10). Comme dans le paragraphe 5.1.1, on prend en compte les phénomènes d'émission secondaire électronique et d'injection par effet de champ renforcé dans le terme de collisions  $\mathcal{K}$  et les conditions aux limites. On discrétise le système (5.10), (5.11) par une méthode P.I.C. (Particles in Cells, voir [12], [15], [34]) basée sur une discrétisation particulière de l'équation de Boltzmann et une approximation par Fourier de l'équation de Poisson. L'émission secondaire électronique entraîne la création d'un grand nombre de particules numériques, nous utilisons un procédé de coalescence pour le réduire et éviter ainsi des problèmes de calculs. Sur la Figure 5.2, on montre à gauche la densité électronique et à droite la densité des charges positives sur la surface de la cellule solaire. Ces courbes montrent le phénomène d'avalanche attendu avec la création d'un nuage d'électrons de plus en plus dense. L'augmentation en simultané du nombre de charges positives sur la surface montre que ces électrons proviennent de l'émission secondaire et non pas de l'injection. Cela confirme le rôle prédominant de ce processus de collisions dans la création du plasma.

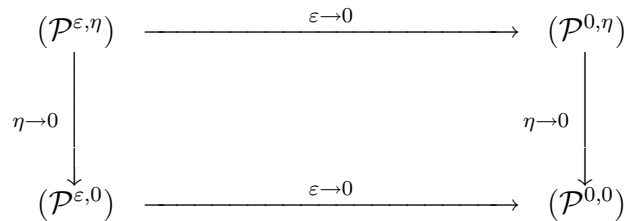
### 5.2 Transport de gouttes dans un gaz

Je termine ce chapitre par la description d'un travail un peu en marge du reste. Je l'ai réalisé en collaboration avec Komla Domelevo lorsque je suis arrivée à Toulouse. Ce travail a été publié dans [N1].

On s'intéresse à la modélisation simplifiée d'écoulements de gouttelettes dans un gaz. Le gaz est décrit par sa densité constante normalisée à 1 et sa vitesse  $u$  satisfaisant l'équation de Burgers avec viscosité. L'inconnue pour les particules est leur fonction de distribution  $f$  solution d'une équation cinétique de type Fokker-Planck. Ces équations sont couplées par des termes de forces modélisant la traînée de Stokes dans un écoulement gazeux turbulent. Le modèle est donné par

$$(\mathcal{P}^{\varepsilon,\eta}) \quad \begin{cases} \partial_t u^{\varepsilon,\eta} + u^{\varepsilon,\eta} \partial_x u^{\varepsilon,\eta} - \varepsilon \partial_{xx}^2 u^{\varepsilon,\eta} = \int_{v \in \mathbb{R}} f^{\varepsilon,\eta} (v - u^{\varepsilon,\eta}) dv, \\ \partial_t f^{\varepsilon,\eta} + v \partial_x f^{\varepsilon,\eta} + \partial_v (f^{\varepsilon,\eta} (u^{\varepsilon,\eta} - v)) - \eta \partial_{vv}^2 f^{\varepsilon,\eta} = 0, \end{cases}$$

avec  $\varepsilon \geq 0$  et  $\eta \geq 0$  sont donnés. Nous avons étudié les différentes limites et problèmes associés résumés par le graphique suivant :



On rappelle le résultat suivant montré dans [20]

**Théorème 5.3 (Cas  $\varepsilon > 0, \eta = 0$ )** Soit  $T > 0$ , on se donne  $u_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_x)$  et  $f_0$  dans  $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$  une mesure bornée à support compact.

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , le problème  $(\mathcal{P}^{\varepsilon,0})$  admet une unique solution faible entropique  $(u^{\varepsilon,0}, f^{\varepsilon,0})$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_x)) \cap L^1([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x)) \times \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{M}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ .

On établit les deux résultats suivants

**Théorème 5.4 (Cas  $\varepsilon > 0, \eta > 0$ )** *Soit  $T > 0$ , on se donne  $u_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_x)$  et  $f_0$  dans  $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$  une mesure bornée à support compact.*

*Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $\eta > 0$ , le problème  $(\mathcal{P}^{\varepsilon,\eta})$  admet une unique solution faible  $(u^{\varepsilon,\eta}, f^{\varepsilon,\eta})$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_x)) \cap L^1([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x)) \times \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{M}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ .*

**Théorème 5.5 (Cas  $\varepsilon = 0, \eta > 0$ )** *Soit  $T > 0$ , on se donne  $u_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_x)$  et  $f_0$  dans  $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$  à support compact.*

*Alors, pour tout  $\eta > 0$ , le problème  $(\mathcal{P}^{0,\eta})$  admet une unique solution faible entropique  $(u^{0,\eta}, f^{0,\eta})$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_x)) \cap L^1([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x)) \times \mathcal{C}([0, T]; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ .*

Enfin, nous nous intéressons à l'existence de solutions pour le problème  $(\mathcal{P}^{0,0})$ . Dans toute cette partie on se restreint au cas  $f_0$  dans  $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$  à support compact.

**Théorème 5.6 (Existence pour  $(\mathcal{P}^{0,0})$ )** *Soient  $(\varepsilon, \eta) > (0, 0)$ , on se donne  $u_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_x)$  et  $f_0$  dans  $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$  à support compact. On note  $(u, f)^{\varepsilon,\eta}$ , les solutions correspondantes du problème  $(\mathcal{P}^{\varepsilon,\eta})$ . Alors,  $(u, f)^{\varepsilon,\eta}$  tend faiblement vers  $(\tilde{u}, \tilde{f})$ , à une sous suite près, dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}_x) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x)) \times L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ , et  $(\tilde{u}, \tilde{f})$  est une solution faible de  $(\mathcal{P}^{0,0})$ .*

### 5.3 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre j'ai d'abord présenté la modélisation mathématique et numérique du transport de particules confinées contre une paroi par un potentiel extérieur. Un premier modèle fluide, de type énergie-transport, a été proposé et testé. De plus, un modèle de type Boltzmann a été dérivé de manière rigoureuse dans le cas de particules non chargées et de manière formelle dans le cas de particules chargées. La perspective de recherche naturelle faisant suite à ce travail concerne la dérivation rigoureuse du modèle dans le cas non linéaire couplé avec Poisson. De plus, il serait intéressant de réaliser des simulations numériques de la décharge primaire, plus réaliste en particulier, en tenant compte de l'énergie transverse dans le modèle.

Dans une dernière partie, j'ai présenté des travaux concernant le transport de gouttes dans un gaz. Cette dernière partie a été réalisée au tout début de mon arrivée à Toulouse. Je n'ai pas depuis poursuivi ce travail, je n'ai donc pas de perspective de recherche concernant cette partie. Toutefois l'unicité du système limite sans viscosité est un problème des plus intéressants, mais le caractère "système hyperbolique" rend cette étude bien connue pour être difficile.



## Bibliographie

- [1] R. Abgrall, R. Saurel, Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures, *J. Comput. Phys.* **186** (2003) no. 2, 361–396.
- [2] N. Ben Abdallah, S. Mas-Gallic, P.A. Raviart, Analysis and asymptotics of a one-dimensional ion extraction model, *Asymptotic analysis* **10** (1995) 1–28.
- [3] N. BEN ABDALLAH, F. MEHATS, O. PINAUD, *Adiabatic approximation of the Shrödinger-Poisson system with a partial confinement*, *SIAM J. Math. Anal.*, **36** (2005), pp. 986–1013.
- [4] S. Bouquet, Une solution analytique décrivant la compression d’un milieu soumis à une pression extérieure uniforme, CEA, communication privée.
- [5] J.P. Catani, D. Payan, Electrostatic behaviour of materials in a charging space environment, Proceedings of the 9th International Symposium on Materials in a Space Environment, 16-20 June 2003, Noordwijk, The Netherlands (ESA Publications Division 2003), p. 3.
- [6] G. Chanteperdrix, P. Villedieu, J.P. Vila, *Un modèle bifluide compressible pour la simulation numérique d’écoulements diphasiques à phases séparées*, Rapport interne, ONERA (CT), mars **2002**.
- [7] F.F. Chen, Introduction to plasma physics (Plenum, New-York, 1974).
- [8] M. Cho, Arcing on High Voltage Solar Arrays in Low Earth Orbit: Theory and Computer Particle Simulation, Phd thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1992.
- [9] M. Cho, D.E. Hastings, Dielectric charging process and arcing rates of high voltage solar arrays, *J. Spacecraft and Rockets* **28** (1990) 698–706.
- [10] S. Cordier and E. Grenier, Quasineutral limit of Euler-Poisson system arising from plasma physics, *Comm. Partial Differential Equations* **25** (2000) 1099–1113.
- [11] S. Cordier, Y.J. Peng, Système Euler-Poisson non linéaire. Existence globale de solutions faibles entropiques, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **32** (1998) no. 1, 1–23.

- [12] G.H. Cottet, P.A. Raviart, Particle methods for the one-dimensionnal Vlasov-Poisson equation, *Siam J. Numer. Anal.* **21** (1984) no. 1, 52–76.
- [13] P. Degond, Transport of trapped particles in a surface potential, *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XIV* (Paris, 1997/1998), 273–296, *Stud. Math. Appl.*, **31** (2002), North-Holland, Amsterdam.
- [14] P. Degond, The Child-Langmuir Law in the Kinetic Theory of Charged-Particles. Part 1, Electron Flows in vacuum, *Advances in Kinetic Theory* (B. Perthame, ed), World Scientific, Singapore (1994) 3–44.
- [15] P. Degond, F. Guyot-Delaurens, Particle simulations of the semiconductor Boltzmann equation for one-dimensional inhomogeneous structures, *J. Comput. Phys.*, **90** (1990) no. 1, 65–97.
- [16] P. Degond, S. Jin, L. Mieussens, A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations, *J. Comput. Phys.* **209** (2005) no. 2, 665–694.
- [17] P. Degond, P.F. Peyrard, G. Russo and Ph. Villedieu, Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **328** (1999) 479–483.
- [18] P. Degond, P.A. Raviart, An Asymptotic Analysis of the One-Dimensional Vlasov-Poisson System : the Child-Langmuir Law, *Asymptotic Analysis* **4** (1991) 187–214.
- [19] P. Degond, P.A. Raviart, On a penalization of the Child-Langmuir emission condition for the one-dimensional Vlasov-Poisson equation, *Asymptotic Analysis* **6** (1992) 1–27.
- [20] K. Domelevo, Long time behaviour for a kinetic modelling of two-phase flows with thin polydisperse sprays, *Rapport Interne n°99-21.*, Laboratoire MIP, Université Paul Sabatier, Toulouse, FRANCE, (1999).
- [21] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation, *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **16** (1995) no. 1, 1–14.
- [22] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin, Finite Volume methods, in: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. VII, (North-Holland, 2000), p. 713.
- [23] Sylvie Fabre, Stability analysis of the Euler-poisson equations, *J. Comp. Phys.* **101** (1992) no. 2, 445–451.
- [24] R.N. Franklin, J.R. Ockendon, Asymptotic matching of plasma and sheath in an active low pressure discharge, *Journal of plasma physics* **4** (1970) 3521–3528.

- [25] S.Y. Ha, M. Slemrod, Global existence of plasma ion sheaths and their dynamics, *Comm. Math. Phys.* **238** (2003) no. 1-2, 149–186.
- [26] R. Herbin, An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion convection problem on a triangular mesh, *Numerical Methods in Partial Differential Equations* **11** (1995) no. 2, 165–173.
- [27] C.W. Hirt, J.L. Cook, T.D. Butler, A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface, *J. Comput. Phys.* **5** (1970) 103–124.
- [28] N.A. Krall, A.W. Trivelpiece, *Principles of plasma physics* (San Francisco Press, 1986).
- [29] Ya.E. Krasik, A. Dunaevsky, A. Krokhmal, J. Felsteiner, Emission properties of different cathodes at  $E \leq 10^5 V/cm$ , *Journal of Applied Physics*, **89** (2001) no. 4, 2379–2399.
- [30] S.N. Kruskov, First order quasilinear equations with several space variables, *Math. USSR. Sb.* **10** (1970) 217–243.
- [31] I. Langmuir, K.T. Compton, Electrical discharges in gases, part II, fundamental phenomena in electrical discharges, *Rev. Modern Phys.* **3** (1931) 191–257.
- [32] P. Marcati, R. Natalini, Weak solutions to a hydrodynamic model for semiconductors: the Cauchy problem, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **125** (1995) no. 1, 115–131.
- [33] G.A. Mesyats, *Explosive electron emission*, URO-Press, Ekaterinburg, 1998.
- [34] R.L. Morse, Multidimensional Plasma Simulation by the Particle-in-Cell Method, *Methods Comput. Phys.* **9** (1970) 213–239.
- [35] W.F. Noh, P. Woodward, SLIC Simple Line Interface Calculation, proceedings of the fifth international conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, *Lecture Notes in Physics*, Springer, **59** (1976) 330–340.
- [36] S.E. Parker, R.J. Procassini, C.K. Birdsall, A suitable boundary condition for bounded plasma simulation without sheath resolution, *J. Comput. Phys.* **104** (1993) 41–49.
- [37] D. Payan, A model of inverted voltage gradient discharge inducing a secondary arc between cells on a solar array, CNES, European Round Table on modelling of S/C-plasma Interactions, 24-25 February 2000, ESA-ESTEC.
- [38] Y.J. Peng and Y.G. Wang, Boundary layers and quasi-neutral limit in steady state Euler-Poisson equations for potential flows, *Nonlinearity* **3** (2004) no. 17, 835–849.

- [39] F. Poupaud, M. Rascle, J. P. Vila, Global solutions to the isothermal Euler-Poisson system with arbitrary large data, *J. Diff. Equ.* **123** (1995) 93–121.
- [40] K.U. Riemann, The Bohm criterion and sheath formation, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **24** (1991) 493–518.
- [41] K.U. Riemann, Th. Daube, Analytical model of the relaxation of a collisionless ion matrix sheath, *J. Appl. Phys.* **86** (1999) 1201–1207.
- [42] R. Saurel, R. Abgrall, A simple method for compressible multifluid flows, *SIAM J. Sci. Comput.* **21** (1999) no. 3, 1115–1145.
- [43] R. Saurel, R. Abgrall, A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, *J. Comput. Phys.* **150** (1999) no. 2, 425–467.
- [44] D. Shiffer, M. Ruebush, D. Zagar, M. LaCour, M. Sena, K. Golby, M. Haworth, R. Umstattd, Cathode and anode plasma in short-pulse explosive field emission cathodes, *Journal of Applied Physics* **91** (2002) no. 9, 5599–5603.
- [45] K.M. Shyue, A fluid-mixture type algorithm for compressible multicomponent flow with van der Waals equation of state, *J. Comput. Phys.* **156** (1999) no. 1, 43–88.
- [46] M. Slemrod, Shadowing and the plasma-sheath transition layer, *J. Nonlinear Sci.* **11** (2001) 193–209.
- [47] M. Slemrod, The radio frequency driven plasma sheath: asymptotics and analysis, *SIAM J. Applied Mathematics* **63** (2003) no. 5, 1737–1763.
- [48] M. Slemrod, N. Sternberg, Quasi-neutral limit for Euler-Poisson system, *J. Nonlinear Sci.* **11** (2001) 193–209.
- [49] N. Sternberg, V.A. Godyak, Solving the mathematical model of the electrode sheath in symmetrically driven rf discharges, *J. Comput. Phys.* **111** (1994) 347–353.
- [50] H. Sze, J. Benford, W. Woo, B. Harteneck, Dynamics of a virtual cathode oscillator driven by a pinched diode, *Phys. Fluids* **29** (1986) 3873–3880.
- [51] E.F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A practical introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [52] B. Van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second order sequel to Godunov’s method, *J. Comp. Phys.* **32** (1979) 101–136.
- [53] D. Ventura, A. Gnudi, G. Baccarani, F. Odeh, Multidimensional spherical harmonics expansion of Boltzmann equation for transport in semiconductors, *Appl. Math. Letters* **5** (1992) 85–90.
- [54] S. Wang, Quasineutral limit of Euler-Poisson system with and without viscosity, *Comm. Partial Differential Equations* **29** (2004) 419–456.

- [55] D.L. Youngs, Time dependent multi-material flow with large fluid distortion, Numerical Methods for Fluid Dynamics, Ed. K. W. Morton & M. J. Baines, Academic Press, London, New-York, (1982) p. 273.
- [56] D.L. Youngs, An interface tracking method for a 3D eulerian hydrodynamics code, report of Atomic Weapons Research Establishment, (1994).