Table des Matières

1. Résolution d'équations non linéaires

1.1 Présentation du problème et premières idées

Soit f une application continue de $I\!R \to I\!R$. On cherche à approcher une solution de l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

à condition qu'une telle solution existe.

Si f est continue, une condition pour que f s'annule en au moins un point d'un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, est que

$$f(a)\, f(b) \leq 0$$

Remarque 1.1 *Rien ne permet d'affirmer qu'il n'y a pas plusieurs solutions.*

Dans ce cas une méthode pour détecter un zéro de f est la méthode de dichotomie

1.1.1 Méthode de dichotomie

On peut la décomposer en différentes étapes

Etape 0

Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ alors on a trouvé un zéro de f et on s'arrète.
Sinon $f(a)\, f(b) < 0$.

Etape 1

On note $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$, alors si $f(c_1) = 0$, on a trouvé un zéro de f et on s'arrète.
Sinon $f(c_1) \neq 0$ et alors soit $f(c_1)\, f(b) < 0$ soit $f(a)\, f(c_1) < 0$.
On note alors $[a_1, b_1]$ l'intervalle $[a, c_1]$ ou $[c_1, b]$ tel que $f(a_1)\, f(b_1) < 0$.
C'est à dire:

$$\begin{array}{lll} \text{si } f(a)\, f(c_1) < 0 & \text{alors} & a_1 = a \text{ et } b_1 = c_1 \\ \text{sinon } f(c_1)\, f(b) < 0 & \text{alors} & a_1 = c_1 \text{ et } b_1 = b \end{array}$$

Etape 2

On note $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ ...

$\vdots$

Etape k

On note $c_k = \dfrac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, alors si $f(c_k) = 0$, on a trouvé un zéro de f et on s'arrète.
Sinon $f(c_k) \neq 0$ et alors soit $f(c_k)\, f(b_{k-1}) < 0$ soit $f(a_{k-1})\, f(c_k) < 0$.
On note alors $[a_k, b_k]$ l'intervalle $[a_{k-1}, c_k]$ ou $[c_k, b_{k-1}]$ tel que $f(a_k)\, f(b_k) < 0$.
$\vdots$
En N pas de dichotomie, on localise au moins un zéro de f avec une précision de $\dfrac{b-a}{2^N}$.
C'est une méthode qui marche bien mais qui n'est pas suffisament rapide pour une précision donnée.

1.1.2 Théorème du point fixe

Les méthodes que l'on va voir sont basées sur le principe suivant.
Soit $\lambda \in I\!R^\star$, on définit alors $g\ :\ I\!R \to I\!R$ par

$$g(x) = x - \lambda\, f(x) \qquad \forall\ x \in I\!R.$$

Alors trouver $x_0 \in I\!R$ tel que $f(x_0) = 0$ est équivalent à trouver $x_0 \in I\!R$ tel que $g(x_0) = x_0$. En effet dans ce cas, on a

$$x_0 = x_0 - \lambda\, f(x_0) \Leftrightarrow \lambda\, f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \quad \text{car } \lambda \neq 0.$$

On dit dans ce cas que x_0 est un point fixe de g.
On va donner un résultat d'existence et d'unicité de ce point fixe.

Définition 1.1 *Soit $E \subset I\!R$, on dit que $g\ :\ I\!R \to I\!R$ est une contraction stricte sur E (ou que g est une application strictement contractante sur E) s'il existe $K < 1$ telle que*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad |g(x) - g(y)| \leq K\, |x - y|$$

Exemple 1.1 *Soit $g\ :\ [a, b] \to I\!R$, et $g \in C^1([a, b])$. Alors, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$*

$$|g(x) - g(y)| = \left| \int_x^y g'(z)\, dz \right| \leq \left| \int_x^y |g'(z)|\ dz \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |g'(t)|\ |x - y|$$

donc, si $\sup_{t\in[a,b]} |g'(t)| < 1$, g est strictement contractante.

Le théorème du point fixe sur $I\!R$ s'ennonce comme suit

Théorème 1.1 *Soit $E \subset I\!R$ fermé (donc $E = I\!R$ ou $]-\infty, a]$ ou $[b, +\infty[$ ou $[a, b]$). Soit g une contraction stricte sur E. Alors*

1. *Il existe un unique point fixe sur E de g, c'est à dire $x \in E$ tel que $g(x) = x$.*
2. *Pour tout $y^0 \in E$, la suite $(y^n)_{n\in I\!N}$, définie par :*

   $$y^{n+1} = g(y^n) \qquad \text{pour tout } n \geq 0$$

   converge vers x lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque 1.2 *Soit* $f : [a,b] \to I\!R$, *pour que* $f(x) = 0$ *admette une solution sur* $[a,b]$ *on a vu que l'on devait avoir* $f(a)\,f(b) \leq 0$.
Posons $g(x) = x - \lambda\, f(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *et avec* $\lambda \in I\!R^\star$ *donné.*
Dire que $g : [a,b] \to [a,b]$ *impose que* $\forall\ x \in [a,b]$

$$a \leq g(x) \leq b \Leftrightarrow a - x \leq -\lambda\, f(x) \leq b - x \Leftrightarrow x - b \leq \lambda\, f(x) \leq x - a$$

En choisissant

$$\begin{array}{lcl} x = b & \Rightarrow & \lambda\, f(b) \geq 0, \\ x = a & \Rightarrow & \lambda\, f(a) \leq 0. \end{array}$$

On retrouve donc bien $f(a)\,f(b) \leq 0$.

1.2 Méthode de Newton

Soit $f : [a,b] \to I\!R$, on cherche à déterminer un zéro de f, c'est à dire $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

1.2.1 Idée

On pose $g(x) = x - \lambda\, f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, et on cherche un point fixe de g. Supposons que f soit C^1 alors g l'est aussi, pour que g admette un unique point fixe, il faut qu'elle soit contractante, d'après la section précédente. Ainsi, on doit avoir

$$|g'(x)| \leq K < 1 \Leftrightarrow |1 - \lambda\, f'(x)| \leq K < 1.$$

On voit qu'en choisissant $\lambda = \dfrac{1}{f'(x)}$ on minimise la constante K.
Donc, on construit une suite $(y^n)_{n \in I\!N}$ de la façon suivante :

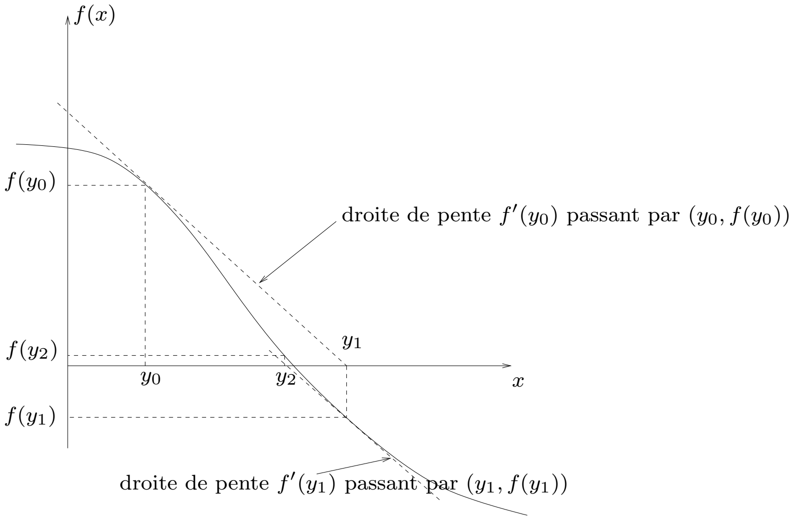
$$\left\{ \begin{array}{l} y^0 \in [a,b] \\ y^{n+1} = y^n - \dfrac{f(y^n)}{f'(y^n)} \quad \forall\ n \geq 0 \end{array} \right.$$

On a remplacé λ par $\dfrac{1}{f'(y^n)}$ à chaque itération.

1.2.2 Interprétation géométrique

L'équation de la droite passant par $(y^n, f(y^n))$ et ayant pour pente $f'(y^n)$ est $z = f'(y^n)\,(x - y^n) + f(y^n)$.
Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $z = 0$, c'est à dire

$$0 = f'(y^n)\,(x - y^n) + f(y^n) \Leftrightarrow x = y^n - \frac{f(y^n)}{f'(y^n)} = y^{n+1}$$



1.2.3 Résultat de convergence

Théorème 1.2 *Soit f une fonction de classe C^2 d'un intervalle $[a, b]$ dans $I\!R$, avec $a < b$.*
On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y^0 \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, la suite des itérés de Newton, definie par

$$y^{n+1} = y^n - \frac{f(y^n)}{f'(y^n)} \quad n \geq 0$$

a bien un sens, reste dans l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et converge vers x lorsque n tend vers $+\infty$.

1.3 Méthode de la sécante

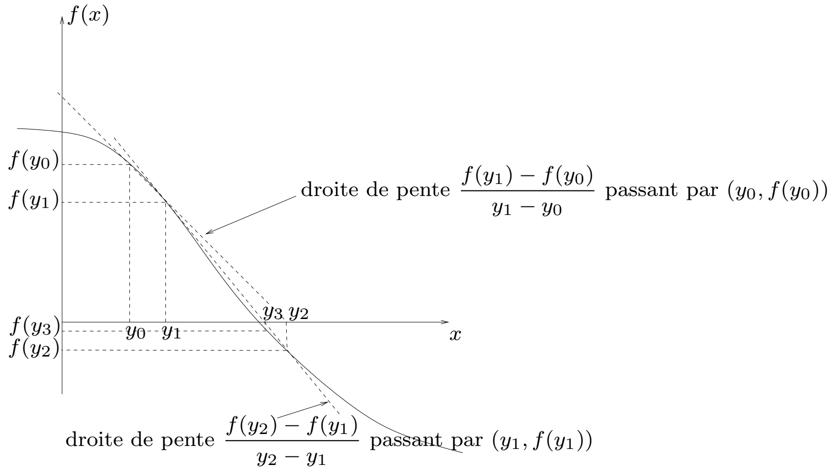
Le calcul d'une dérivée peut etre très difficile (ex : si la fonction est définie de manière implicite).
On remplace donc, dans la méthode de Newton, la dérivée $f'(y^n)$ par une différence finie, c'est à dire

$$\frac{f(y^n) - f(y^{n-1})}{y^n - y^{n-1}}.$$

On obtient donc

$$y^{n+1} = y^n - f(y^n) \times \frac{y^n - y^{n-1}}{f(y^n) - f(y^{n-1})}$$

On a à présent une méthode, dite à deux pas, qu'il faut initialiser par la donnée de y^0 et y^1.



1.3.1 Interprétation géométrique

On remplace la droite de pente $f'(y^n)$ par celle de pente $\dfrac{f(y^n)-f(y^{n-1})}{y^n-y^{n-1}}$

1.3.2 Résultat de convergence

Théorème 1.3 *Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$, avec $a<b$. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x)=0$ et $f'(x) \neq 0$.*
Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $y^0 \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, les itérations de la méthode de la sécante sont toutes bien définies, restent dans $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ et convergent vers x lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Approximation polynomiale des fonctions numériques

2.1 Introduction

Le problème que l'on considère est le suivant, on se donne $f : [a,b] \to I\!R$ continue, avec $a < b$ dans $I\!R$.
Le but de ce paragraphe est d'approcher f par un polynôme, parce que les polynômes sont les fonctions les plus simples à calculer.

Pour cela, on introduit $(n+1)$ points, $n \geq 1$, $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ deux à deux distincts et tels que $x_i \in [a,b]$ pour $i = 0, \cdots, n$. On se pose alors les questions suivantes :

1. Peut on trouver un polynôme P tel que
$$P(x_i) = f(x_i) \qquad \text{pour } i = 0, \cdots, n.$$
2. Quelle erreur commet-on si on remplace $f(x)$ par $P(x)$ aux points x de $[a,b]$ tels que $x \neq x_i$ pour $i = 0, \cdots, n$.

2.2 Le problème de l'interpolation de Lagrange

On cherche donc un polynôme P tel que
$$P(x_i) = f(x_i) \qquad \text{pour } i = 0, \cdots, n,$$
où f et les x_i sont donnés.

2.2.1 Quel est le degré de P

On a $n+1$ points donc pour que P soit complètement déterminé il faut que
$$\text{degré}(P) = n.$$

Exemple
Supposons, que $f(x) = ln(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $n = 1$. On a donc deux points x_0 et x_1, choisissons $x_0 = 1$ et $x_1 = exp(1) = e$.

On cherche alors à déterminer un polynôme P de degré 1 tel que $P(1) = ln(1) = 0$ et $P(e) = ln(e) = 1$. On note $P(x) = a_1\, x + a_0$. On a deux inconnues a_0 et a_1 et deux équations données par :

$$\begin{array}{c} P(1) = a_1 + a_0 = f(1) = 0 \\ P(e) = a_1\, e + a_0 = f(e) = 1 \end{array}$$

On obtient donc

$$\begin{array}{c} a_1 = -a_0 \\ -a_0\, e + a_0 = 1 \end{array}$$

C'est à dire $a_0 = \dfrac{1}{1-e}$ et $a_1 = -\dfrac{1}{1-e}$.
Ainsi pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$P(x) = \frac{1}{1-e}\Big(-x+1\Big).$$

Revenons au cas général. Si on a $(n+1)$ points $x_0, \cdots, x_n$ et si on cherche à déterminer P de degré n tel que $P(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \cdots, n$, on a alors

$$P(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$$

On a donc $n+1$ inconnues $(a_0, \cdots, a_n)$.
Combien a-t-on d'équations :

$$\begin{array}{c} P(x_0) = f(x_0) = a_0 + a_1\, x_0 + \cdots + a_n\, (x_0)^n \\ \vdots \\ P(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1\, x_i + \cdots + a_n\, (x_i)^n \\ \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) = a_0 + a_1\, x_n + \cdots + a_n\, (x_n)^n \end{array}$$

C'est à dire $n+1$ équations.

2.2.2 Détermination de P

Pour déterminer P, on introduit les polynômes de degré n, que l'on déterminera plus tard, tels que :

$$\Phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

pour $j = 0, \cdots, n$
Dans ce cas, on a

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \Phi_j(x)$$

en effet, soit $i \in \{0, \cdots, n\}$, alors on aura bien

$$P(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \Phi_j(x_i) = f(x_i)\, \Phi_i(x_i) = f(x_i)$$

par définition des Φ_j.

Détermination de Φ_j
Φ_j est de degré n et a n racines qui sont x_i avec $i \neq j$. Donc

$$\Phi_j(x) = C \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x - x_i)$$

où C est une constante à déterminer et où

$$\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x - x_j) = \begin{cases} (x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n) & \text{si } j = 1,\cdots,n-1 \\ (x-x_1)\cdots(x-x_n) & \text{si } j = 0 \\ (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) & \text{si } j = n \end{cases}$$

Pour déterminer C il suffit d'écrire que

$$\Phi_j(x_j) = 1 = C \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)$$

ainsi

$$C = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)}$$

et donc

$$\Phi_j(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x - x_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

On obtient pour P

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \right]$$

P s'appelle alors le **polynôme d'interpolation de Lagrange.**
Cette formule donne effectivement P, mais ce qui est gênant c'est que dès que l'on veut rajouter un point x_{n+1} et trouver le polynôme tel que $P(x_i) = f(x_i)$ cette fois pour $i = 0, \cdots, \underline{n+1}$, il faut refaire tous les calculs. On va voir dans le paragraphe suivant que l'on peut procéder différemment afin d'éviter ce problème.

2.3 Formule de Newton

• Avec un seul point d'interpolation, x_0, le polynôme P^0 qui interpole f est de degré 0 et donc

$$P^0(x) = C_0$$

Pour déterminer C_0 on écrit que

$$C_0 = P^0(x_0) = f(x_0)$$

• Avec deux points d'interpolation, x_0 et x_1, le polynôme P^1 qui interpole f est de degré 1 et on ecrit

$$P^1(x) = P^0(x) + R^1(x)$$

puisqu'on veut rajouter commodémment des points.
P^0 est de degré 0 et P^1 est de degré 1 donc R^1 est de degré 1. De plus, on veut que

$$P^0(x_0) + R^1(x_0) = P^1(x_0) = f(x_0) = P^0(x_0)$$

donc $R^1(x_0) = 0$, et ainsi

$$R^1(x) = C_1(x - x_0)$$

Pour déterminer C_1, on écrit que

$$f(x_1) = P^1(x_1) = P^0(x_1) + R^1(x_1) = f(x_0) + C_1\,(x_1 - x_0)$$

Ainsi

$$C_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

etc... on fait la même chose pour rajouter x_2, puis x_3...

Théorème 2.1 *Soient $f : [a,b] \to I\!R$ continue, avec $a < b$ dans $I\!R$. Soient $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ deux à deux distincts et tels que $x_i \in [a,b]$ pour $i = 0, \cdots, n$. Alors le polynôme P^n qui interpole f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ est donné par*

$$P^n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

où, pour $j \geq 0$ et $p \geq 0$

$$f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+p}] = \frac{f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+p-1}] - f[x_{j+1}, \cdots, x_{j+p}]}{x_j - x_{j+p}}$$

et pour tout $j \geq 0$

$$f[x_j] = f(x_j).$$

2.3.1 Qualité des résultats

On va voir, sur un exemple, que même si f est très régulière, il n'est pas toujours possible de montrer la convergence de la suite des polynômes de Lagrange $(P^n)_{n \in I\!N}$ vers f.
On se place sur l'intervalle $[-5, 5]$ et on choisit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

La fonction f que l'on cherche a approcher est donc très régulière puisque $f \in C^{\infty}([-5,5])$.
Choisissons de plus, $x_0 = -5$, $x_1 = 5$, $x_2 = \dfrac{x_0 + x_2}{2} = 0$, $x_3 = \dfrac{x_0 + x_2}{2} = -2.5$, $x_4 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2.5$, $x_5 = \dfrac{x_0 + x_4}{2} = -1.25$, $x_6 = \dfrac{x_3 + x_1}{2} = 1.25$, ...

Les figures qui suivent donnent les polynômes P_2, P_4 et P_6, on constate que les résultats ne sont pas satisfaisants.
Même en augmentant le nombre de points, l'approximation serait toujours catastrophique...

2.4 Conclusion

Il existe d'autres méthodes pour approcher une fonction par des polynômes. L'une d'entre elles s'appelle l'approximation au sens des moindres carrés. Elle consiste à minimiser

$$\int_a^b \Big(f(x) - P(x)\Big)^2 \, dx$$

où f est la fonction à approcher et P le polynôme que l'on cherche.
Cette méthode donne des résultats bien plus satisfaisants.

3. Intégration numérique

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de calculer de façon approchée

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

où $a < b$ dans $I\!R$ et f est une fonction continue donnée.

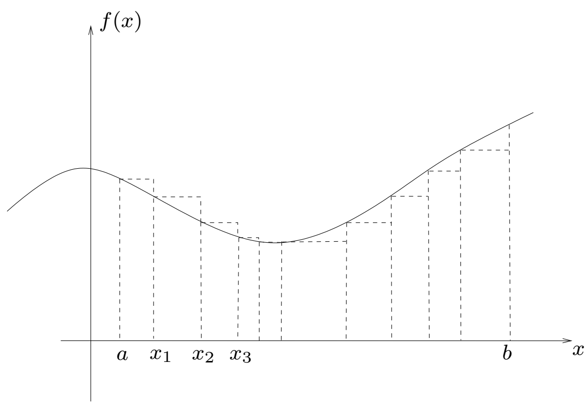
Exemple Formule des rectangles à gauche
On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ de $[a,b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
On approche alors $f(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ par $f(x_i)$. Ceci donne la **formule de quadrature** des rectangles à gauche :

$$I_n^G(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,(x_{j+1} - x_j) \tag{3.1}$$

Plus généralement, une formule de quadrature est la donnée suivante

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(x_j)$$

Nous allons voir dans ce chapitre, comment établir d'autres formules de quadrature, et étudier la qualité de ces approximations.



3.2 Différents exemples de formules de quadratures élémentaires

Soit un intervalle borné $[a, b]$, on cherche alors à approcher

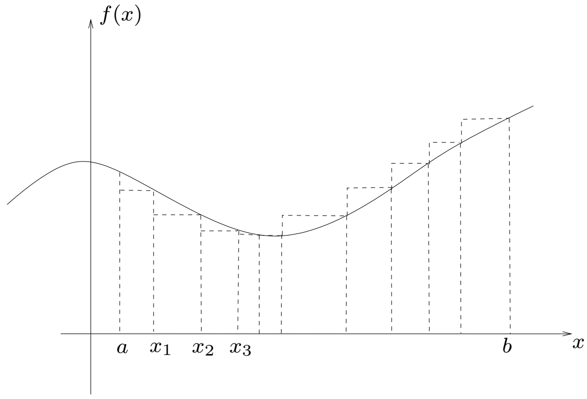
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Une méthode consiste,comme on l'a déja vu dans l'introduction, à décomposer l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, n-1$. Ensuite, on remplace f par un polynôme d'interpolation de Lagrange sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

• Dans la formule des rectangles à gauche, sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace f par le polynôme de Lagrange P^0 de degré 0 tel que $P^0(x_i) = f(x_i)$.

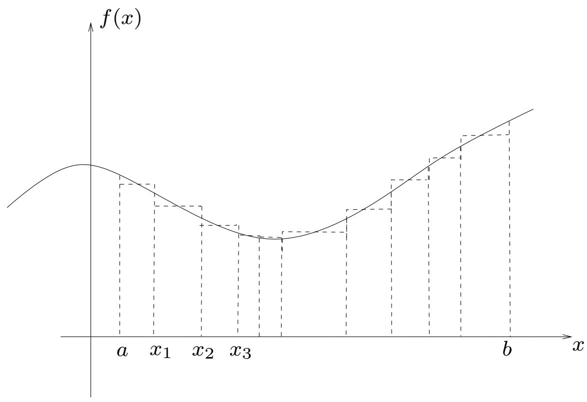
• On peut de la même façon approcher f, sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, par le polynôme, P^0, de degré 0 tel que $P^0(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Ceci donne la formule de quadrature des rectangles à droite :

$$I_n^D = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i) \tag{3.2}$$



• On peut aussi approcher f, sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, par le polynôme, P^0, de degré 0 tel que $P^0\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$. Ceci donne la formule de quadrature du point milieu :

$$I_n^M = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) \tag{3.3}$$



• Enfin, on peut approcher f, sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, par le polynôme, P^1, de degré 1 tel que $P^1(x_i) = f(x_i)$ et $P^1(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, on obtient la formule des trapèzes :

$$I_n^T = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big(f(x_i) + f(x_{i+1})\Big) \tag{3.4}$$

Les formules (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) s'appellent des formules de quadratures **élémentaires**.

Théorème 3.1 *Soit $f \in C([a,b])$, avec $a < b$ dans $I\!R$. Soient $n \in I\!N$, $n \geq 1$, et $n+1$ points $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ de $[a,b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*

Alors I_n^G, I_n^D, I_n^M et I_n^T convergent vers $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $\max_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)$ tend vers 0.

Démonstration :
On se limite au cas $f \in C^1([a,b])$, si $f \notin C^1([a,b])$ la démonstration est admise (on utilise dans ce cas l'uniforme continuité de f).
Commençons par établir ce résultat pour I_n^G, I_n^D et I_n^M.
On a alors

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\alpha_i) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\Big[f(\alpha_i)-f(x)\Big]\,dx\right|$$

où $\alpha_i = x_i$ si on utilise I_n^G, $\alpha_i = x_{i+1}$ si on utilise I_n^D et où $\alpha_i = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ si on utilise I_n^M.
Alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\alpha_i) - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\int_{\alpha_i}^{x} f'(s)\,ds\right|\,dx \\
&\leq \max_{z\in[a,b]}\Big|f'(z)\Big|\ \max_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) \\
&\leq \max_{z\in[a,b]}\Big|f'(z)\Big|\ \max_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\ (b-a)
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que I_n^G, I_n^D et I_n^M tendent vers $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $\max_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)$ tend vers 0.

Pour établir ce résultat pour I_n^T, il suffit de remarquer que

$$I_n^T = \frac{I_n^G + I_n^D}{2}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\left|I_n^T - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \frac{1}{2}\left|I_n^G - \int_a^b f(x)\,dx + I_n^D - \int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\left|I_n^G - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|I_n^D - \int_a^b f(x)\,dx\right|\right]
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1.

Afin de pouvoir apprécier de la qualité d'une formule de quadrature, on introduit la définition suivante :

Définition 3.1 *On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre m si m est le plus grand entier tel que la formule de quadrature est exacte pour les polynôme de degré au plus égale à m.*

Exemple :
Les formules des rectangles à gauche et à droite sont d'ordre 0, c'est à dire exactes pour les polynômes d'ordre 0 mais non exactes pour les polynômes d'ordre 1 ou plus.
La formule du point milieu ainsi que celle des trapèzes sont d'ordre 1.
(cf Travaux Dirigés pour la démonstration de ces résultats)

3.3 Construction des méthodes d'intégration numérique composées

Soit un intervalle borné $[a, b]$, on rappelle que l'on cherche à approcher

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Pour cela on commence comme dans la section suivante, on décompose l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, n-1$.
On cherche alors à approcher

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \tag{3.5}$$

Pour $i = 0, \cdots, n-1$, notons $h_i = x_{i+1} - x_i$ la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et effectuons dans (3.5) le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{lcl} [x_i, x_{i+1}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & s = \dfrac{2\,x - x_i - x_{i+1}}{h_i} \end{array}$$

On obtient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h_i}{2} \int_{-1}^{1} \varphi_i(s)\,ds$$

où

$$\varphi_i(s) = f(x) = f\left(\frac{x_i - x_{i+1} + s\,h_i}{2}\right) \tag{3.6}$$

Ce qui nous ramène à approcher des intégrales sur l'intervalle fixe $[-1, 1]$.

Pour calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)\,ds$, on introduit alors $l+1$ points $y_0, y_1, \cdots, y_l$ deux à deux distincts et tels que $-1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_l = 1$. Enfin on approche φ_i par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $y_0, y_1, \cdots, y_l$ que l'on notera P_φ^l, ainsi

$$\varphi_i(s) \approx P_\varphi^l(s) = \sum_{j=0}^{l} \varphi_i(y_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{l} \frac{s - y_k}{y_j - y_k}$$

et donc

$$\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)\, ds \approx 2 \sum_{j=0}^{l} w_j\, \varphi_i(y_j) \tag{3.7}$$

où

$$w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{l} \frac{s - y_k}{y_j - y_k}\, ds$$

En utilisant (3.6), on obtient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx h_i \sum_{j=0}^{l} w_j\, f(x_{ij})$$

où

$$x_{ij} = \frac{x_i + x_{i+1} + y_i\, h_i}{2}$$

Revenons maintenant à l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx T_{nl}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(h_i \sum_{j=0}^{l} w_j\, f(x_{ij}) \right) \tag{3.8}$$

$T_{nl}(f)$ est une formule de quadrature **composées**.
On montre alors le théorème suivant

Théorème 3.2 *Soit $f \in C([a, b])$, avec $a < b$ dans $I\!R$. Soient $n \in I\!N$, $n \geq 1$, et $n+1$ points $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ de $[a, b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Soit $l \in I\!N$, et $l+1$ points $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n$ de $[-1, 1]$ tels que $-1 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$.*
Alors la formule de quadrature composée $I_{nl}(f)$ donnée par (3.8) converge vers

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

lorsque $\max\limits_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)$ tend vers 0.

Démonstration :
On se limite au cas $f \in C^1([a, b])$, si $f \notin C^1([a, b])$ la démonstration est admise (on utilise dans ce cas l'uniforme continuité de f).
Remarquons tout d'abord que la formule (3.7) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égale à l, en particulier exacte pour le polynôme constant égal à 1, d'où

$$2 = \int_{-1}^{1} ds = 2 \sum_{j=0}^{l} w_j$$

donc

$$\sum_{j=0}^{l} w_j = 1 \tag{3.9}$$

De plus notons que

$$I_{nl}(f) = \sum_{j=0}^{l} w_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} h_i \, f(x_{ij}) \right) = \sum_{j=0}^{l} w_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{ij}) \, dx \right)$$

Alors en utilisant le résultat précédent ainsi que (3.9), il vient

$$\left| I_{nl}(f) - \int_a^b f(x) \, dx \right| = \left| \sum_{j=0}^{l} w_j \; \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big[f(x_{ij}) - f(x) \Big] \, dx \right) \right|$$

En utilisant la régularité de f, on procède comme dans le théorème 3.1, on obtient

$$\left| I_{nl}(f) - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \max_{z \in [a,b]} \Big| f'(z) \Big| \; \max_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \; (b-a) \sum_{j=0}^{l} w_j$$

et donc d'après (3.9), on a

$$\left| I_{nl}(f) - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \max_{z \in [a,b]} \Big| f'(z) \Big| \; \max_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \; (b-a)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 3.2.