MH Vignal

Chapitre 3: Problèmes paraboliques linéaires.

I L'équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on note $\partial\Omega$ sa frontière, on se donne $T > 0$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : \Omega \times]0,T[\to \mathbb{R}$ dont la régularité sera précisée plus tard.

On considère alors le problème suivant

$$(3.1) \quad \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times]0,T[,$$

$$(3.2) \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times]0,T[,$$

$$(3.3) \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

1°) Formulation variationnelle.

Dans l'équation (3.1), les variables x et t jouent des rôles très différents c'est pour cela que nous allons "séparer ces variables" en multipliant par une fonction test à variables séparées $\varphi(x,t) = \psi(t)\, v(x)$, nous verrons quelle régularité choisir pour ψ et v

$$\int_0^T \psi(t) \left(\int_\Omega \partial_t u(x,t)\, v(x)\, dx \right) dt$$

$$- \int_0^T \psi(t) \left(\int_\Omega \Delta u(x,t)\, v(x)\, dx \right) dt$$

$$= \int_0^T \psi(t) \left(\int_\Omega f(x,t) . v(x)\, dx \right) dt,$$

Afin de diminuer la régularité demandée sur u, comme dans le cas des opérateurs elliptique, on est amenés à considérer $v \in H^1(\Omega)$. De plus, afin de vérifier la condition de Dirichlet homogène, on cherche u telle que la fonction $x \longmapsto u(x,t)$ soit dans $H^1_0(\Omega)$ pour tout t ou pour presque tout t dans $]0,T[$ et bien-sûr on considère $v \in H^1_0(\Omega)$.

Ainsi, l'égalité précédente s'écrit (en utilisant la formule de Green)

$$\int_0^T \psi(t)\, \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u(x,t)\,v(x)\,dx\right) dt + \int_0^T \psi(t)\left(\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x)\,dx\right) dt = \int_0^T \psi(t)\left(\int_\Omega f(x,t)\cdot v(x)\,dx\right) dt,$$

Si on choisit $\psi \in C_c^\infty(]0,T[)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\,v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,v(x)\,dx,$$

(3.4) $$\forall v \in H^1_0(\Omega), \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

<u>Remarques:</u> 1°) Il reste à prendre en compte la condition initiale et à dire dans quel espace on va chercher u.

2°) On voit que (3.4) nous amène naturellement à séparer les variables x et t sur la solution u. On va introduire les espaces à valeurs vectorielles.

<u>Définition 3.1:</u> Soit $T>0$ et X un espace de Banach de norme $\|.\|_X$, on considère $v : [0,T] \longrightarrow X$, $t \longmapsto v(t)$, pour $m \geq 0$. On

désigne par $C^m([0,T];X)$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur $[0,T]$ à valeurs dans X; Cet espace est un espace de Banach pour la norme:

$$\|v\|_{C^m([0,T];X)} = \sum_{k=0}^{m}\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{d^m v}{dt^m}(t)\right\|_X\right).$$

Définition 3.2: Soit $T>0$ et X un espace de Banach de norme $\|.\|_X$, on considère $v: \,]0,T[\, \longrightarrow X$, $t \longmapsto v(t)$, pour $p\in[1,+\infty[$, on dit que $v \in L^p(]0,T[;X) := L^p(0,T;X)$. si $t \longmapsto \|v(t)\|_X$ est mesurable et si

$$\|v\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p} < +\infty .$$

$L^p(0,T;X)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p(0,T;X)}$ est un espace de Banach.

Proposition 3.1: Si X est un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ alors $L^2(0,T;X)$ est encore un espace de Hilbert pour le produit scalaire.

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \, dt .$$

Si $X = L^2(\Omega)$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors si $u\in L^2(]0,T[\times\Omega)$ on définit la fonction $]0,T[\, \longrightarrow L^2(\Omega)$, $t \longmapsto \begin{pmatrix}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto u(x,t)\end{pmatrix}$. alors cette fonction est dans $L^2(0,T;\Omega)$, on la note encore u et on note $u(t)(x) = u(x,t)$.

Preuve: admise.

On est maintenant en mesure de donner la formulation variationnelle du problème (3.1), (3.2), (3.3).

<u>Définition 3.3</u>: Soit $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, on appelle formulation variationnelle du problème (3.1), (3.2), (3.3) le problème suivant

$$(3.5)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \text{ tel que} \\ \dfrac{d}{dt}\big(u(t),v\big)_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = \big(f(t),v\big)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H^1_0(\Omega) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[) \\ u(0) = u_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

où $\forall u, v \in H^1_0(\Omega)$, on a :

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \text{et} \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx.$$

<u>Remarque</u>: 1°) La définition précédente est celle classiquement utilisée mais il est possible d'inclure les termes de condition initiale dans la formulation faible, de la manière suivante.

Trouver $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ tel que.

$$-\int_0^T \partial_t \psi(t) \int_\Omega u(x,t)v(x)\,dx - \int_\Omega \psi(0)u_0(x)v(x)\,dx$$

$$+ \int_0^T \psi(t)\int_\Omega \nabla u(x,t).\nabla v(x)\,dx\,dt = \int_0^T \psi(t)\int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx\,dt$$

$\forall v \in H^1_0(\Omega)$, $\forall \psi \in C^\infty_c([0,T[)$.

2°) Puisque $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$, $u(0)$ a bien un sens dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi la condition initiale $u(0) = u_0$.

2°) <u>Existence et unicité d'une solution</u>.

On montre tout d'abord le résultat général suivant.

<u>Théorème 3.1</u>: Soient V et H deux espaces de Hilbert réels ~~de~~ dimension infinie, on suppose que V s'injecte dans H de manière continue et compacte et que V est dense dans H. On considère a, une forme bilinéaire, continue, symétrique et coercive sur V.

On se donne $u_0 \in H$, $T>0$ et $f \in L^2(0,T;H)$, alors le problème :

$$(3.6)\begin{cases} \text{Trouver } u \in C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V) \text{ tel que} \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),v)_H + a(u(t),v) = (f(t),v)_H,\ \forall v \in V \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[), \\ u(0)=u_0 \text{ dans } H. \end{cases}$$

admet une unique solution. On rappelle que $(\cdot,\cdot)_H$ désigne le produit scalaire de H.

<u>Remarque</u>: On pose $H = L^2(\Omega)$ et $V = H^1_0(\Omega)$ alors (3.5) est donnée par (3.6) avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx,\ \forall u,v \in H^1_0(\Omega).$$

On a déjà vu dans la partie I que cette forme bilinéaire est continue, symétrique et coercive. Ainsi, le Théorème (3.1) donne l'existence et l'unicité d'une solution de (3.5).

<u>Preuve</u>: 1°) On commence par montrer l'unicité.

Tout d'abord d'après le théorème 2.3 on sait que les valeurs propres du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } u \in V\setminus\{0\} \text{ tel que} \\ a(u,v) = \mu(u,v)_H,\ \forall v \in V \end{cases}$$

forment une suite croissante $(\mu_k)_{k>0}$ de réels positifs tendant vers

$+\infty$ et il existe une base Hilbertienne $(e_k)_{k>0}$ de H telle que

$$a(e_k, v) = \mu_k (e_k, v)_H \;,\; \forall v \in V \;,\; \forall k > 0.$$

De plus $(\mu_k^{-1/2} e_k)_{k>0}$ est une base Hilbertienne (orthonormée) de V pour le produit scalaire $a(.,.)$.

On montre alors le résultat suivant.

Lemme 3.1: Soit u solution de (3.6) alors

$$(3.7)\; u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{-\mu_k (t-s)} ds \right] e_k$$

dans H

Remarque: Le lemme 3.1. donne clairement l'unicité d'une solution de (3.6) mais pas l'existence, il faut pour cela s'assurer que (3.7) existe.

Preuve du Lemme 3.1: $(e_k)_{k \geq 1}$ étant une base Hilbertienne de H, on a $\forall u \in H$.

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k)_H e_k \text{ et donc, en particulier}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (u(t), e_k)_H e_k \quad \text{et} \quad f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f(t), e_k)_H e_k.$$

On reporte ces égalités dans l'équation de (3.6), on obtient:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (u(t), e_k)_H e_k, v \right)_H + a\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (u(t), e_k)_H e_k, v \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (f(t), e_k)_H e_k, v \right)_H, \; \forall v \in V \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{d}{dt} (u(t), e_k)_H (e_k, v)_H + (u(t), e_k)_H \, a(e_k, v) \right.$$

$$\left. = (f(t), e_k)_H (e_k, v)_H \right], \; \forall v \in V \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[.$$

Mais $a(e_k, v) = \mu_k (e_k, v)_H$ et on choisit $v = e_p$ avec $p \geq 1$, on a alors.

$$\frac{d}{dt}(u(t),e_\ell)_H + \mu_\ell (u(t),e_\ell)_H = (f(t),e_\ell)_H \quad , \forall \ell \geq 1 \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T (u(t),e_\ell)_H \left(-\varphi'(t) + \mu_\ell \varphi(t)\right) dt = \int_0^T (f(t),e_\ell)_H \varphi(t)\, dt$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

On choisit $\varphi(t) = e^{\mu_\ell t}\psi(t)$

avec $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, on a alors.

$$-\int_0^T (u(t),e_\ell)_H \, e^{\mu_\ell t}\psi'(t)\, dt = \int_0^T (f(t),e_\ell)_H e^{\mu_\ell t}\psi(t)\, dt$$

$$\forall \psi \in C_c^\infty(]0,T[).$$

et donc.

$$\left((u(t),e_\ell)_H e^{\mu_\ell t}\right)' = (f(t),e_\ell)_H e^{\mu_\ell t} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[)$$

$$\Leftrightarrow (u(t),e_\ell)_H e^{\mu_\ell t} = \int_0^t (f(s),e_\ell)_H e^{\mu_\ell s}\, ds + C.$$

On sait de plus que.

$u(0) = u_0$ dans H et donc $(u(0),e_\ell)_H = (u_0,e_\ell)_H \quad \forall \ell \geq 1.$

donc

$$(u(t),e_\ell)_H = \int_0^t (f(s),e_\ell)_H \, e^{\mu_\ell (s-t)}\, ds + (u_0,e_\ell)_H \, e^{-\mu_\ell t}$$

Ainsi

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(u_0,e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s),e_k)_H e^{\mu_k (s-t)}\, ds \right] e_k.$$

Ce qui termine de montrer l'unicité.

Montrons maintenant l'existence, pour cela il suffit de montrer que la série (3.7) converge pour tout $u_0 \in H$ et tout $f \in L^2(0,T;H)$ et qu'elle est bien solution de (3.6)

On introduit donc la suite des sommes partielles.

$\forall m \geq 1$, on note

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \left[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{\mu_k (s-t)} ds \right] e_k. \quad (3.8)$$

Pour tout $t \in [0,T]$, $u_m(t) \in V_m = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_m\}$, notons au passage que $\forall k = 1$ à m. $(u_0, e_k)_H$ a bien un sens car $u_0 \in H$ et

$$\int_0^t (f(s), e_k)_H e^{\mu_k (s-t)} ds \leq \int_0^T \|f(s)\|_H e^{\mu_k T} e^{-\mu_k t} ds$$

$$\leq \sqrt{T}\, e^{\mu_k (T-t)} \left(\int_0^T \|f(s)\|_H^2 ds \right)^{1/2} < +\infty$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. car $f \in L^2(0,T;H)$

On dérive alors (3.8), ce que l'on peut faire dans $\mathcal{D}'(]0,T[)$ sans problèmes puisque les sommes sont finies.

$$\frac{d}{dt}(u_m(t)) = -\sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H \mu_k e^{-\mu_k t} e_k + \sum_{k=1}^{m} (f(t), e_k)_H e^{\mu_k (t-t)} e_k$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \int_0^t (f(s), e_k)_H \mu_k e^{\mu_k (s-t)} ds\, e_k.$$

$$= -\mu_k u_m(t) + \sum_{k=1}^{m} (f(t), e_k)_H e_k$$

Ainsi $\forall v \in V_m$.

$$\left(\frac{d u_m}{dt}(t), v \right)_H = -\sum_{k=1}^{m} \left[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{\mu_k (s-t)} ds \right]$$

$$\mu_k (e_k, v)_H + \sum_{k=1}^{m} (f(t), e_k)_H (e_k, v)_H. \quad (3.9)$$

Mais $V_m \subset V$ donc $\mu_k (e_k, v)_H = a(e_k, v)$.

de plus $v \in V_m$ donc $v = \sum_{k=1}^{m} (e_k, v)_H e_k$.

Ainsi (3.9) s'écrit encore.

$$\frac{d}{dt}\left(u_m(t), v\right)_H = -\sum_{k=1}^{m}\Big[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{\mu_k(s-t)} ds\Big] a(e_k, v) + \Big(f(t), \sum_{k=1}^{m} (e_k, v)_H e_k\Big)_H.$$

$$= -a\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{\mu_k(s-t)} ds\Big] e_k, v\Big) + (f(t), v)_H$$

$$= -a(u_m(t), v) + (f(t), v)_H$$

Donc u_m satisfait.

(3.10) $$\frac{d}{dt}\left(u_m(.), v\right) + a(u_m(.), v) = (f(.), v)_H, \quad \forall v \in V_m \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[)$$

(3.11) $$u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H\, e_k \quad \text{dans } H.$$

On va montrer que $(u_m)_{m\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans les espaces $C([0,T], H)$ et $L^2(0,T;V)$, ce qui nous permettra de passer à la limite dans (3.10) et (3.11).

Soient m et p dans $\mathbb{N}^*$ tels que $p > m \geq 1$ alors $\forall t \in [0,T]$.

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|_H^2 = \left(u_p(t) - u_m(t), u_p(t) - u_m(t)\right)_H$$

$$= \sum_{i,k=m+1}^{p} \alpha_i(t)\, \alpha_k(t)\, (e_i, e_k)_H.$$

avec $\alpha_i(t) = (u_0, e_i)_H e^{-\mu_i t} + \int_0^t (f(s), e_i) e^{-\mu_i(t-s)} ds$.

et donc

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{p} \Big((u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{-\mu_k(t-s)} ds\Big)^2$$

$$\leq 2\Big(\sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 e^{-2\mu_k t} + \sum_{k=m+1}^{p}\Big(\int_0^t (f(s), e_k)_H e^{-\mu_k(t-s)} ds\Big)^2\Big)$$

$$\leq 2 \sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 + 2\sum_{k=m+1}^{p} \int_0^t (f(s), e_k)_H^2\, ds \cdot \int_0^t e^{-2\mu_k (t-s)} ds$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Mais $\displaystyle\int_0^t e^{-2\mu_k(t-s)} ds = \left[+ \frac{e^{-2\mu_k(t-s)}}{2\mu_k} \right]_0^t$

$$= \frac{1}{2\mu_k} \left(1 - e^{-2\mu_k t} \right) \leq \frac{1}{2\mu_k} \leq \frac{1}{2\mu_1}.$$

donc $\displaystyle\| u_p(t) - u_m(t) \|_H^2 \leq 2 \sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 + \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=m+1}^{p} \int_0^t (f(s), e_k)_H^2\, ds.$

et
$$\sup_{t\in[0,T]} \| u_p(t) - u_m(t) \|_H^2 \leq 2 \sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 + \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=m+1}^{p} \int_0^T (f(s), e_k)_H^2\, ds \qquad (3.12)$$

Mais $u_0 \in H$ donc

$$\sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H\, e_k \xrightarrow[m\to+\infty]{} u_0 \text{ dans } H.$$

et $\displaystyle\left\| \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H\, e_k \right\|_H \xrightarrow[m\to+\infty]{} \| u_0 \|_H.$

Mais $\displaystyle\left\| \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H\, e_k \right\|_H = \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H^2$

Cette suite étant convergente dans $\mathbb{R}$, elle est de Cauchy et donc

$$\lim_{m,p\to+\infty} \sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 = 0. \qquad (3.13)$$

De même $f \in L^2(0,T;H)$ donc pour presque tout $t \in]0,T[$. $f(t) \in H$ et le même raisonnement s'applique ; on obtient.

$$\lim_{m,p\to+\infty} \sum_{k=m+1}^{p} \int_0^T (f(s), e_k)_H^2 \, ds = 0 \qquad (3.14)$$

et d'après (3.12) $\displaystyle\lim_{m,p\to+\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_p(t)-u_m(t)\|_H^2 = 0$.

De plus, $\forall\, m, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p > m \geqslant 1$ et $\forall t \in [0,T]$.

$$a\left(u_p(t)-u_m(t), u_p(t)-u_m(t)\right)$$

$$= \sum_{i,k=m+1}^{p} \alpha_i(t)\,\alpha_k(t)\; a(e_k, e_i)$$

$$= \sum_{i,k=m+1}^{p} \alpha_i(t)\,\alpha_k(t)\,\mu_k\; (e_k, e_i)_H = \sum_{k=m+1}^{p} (\alpha_k(t))^2 \mu_k .$$

Mais d'après la coercivité

$$\|u_p(t)-u_m(t)\|_V^2 \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{k=m+1}^{p} \mu_k\, (u_0, e_k)_H^2\, e^{-2\mu_k t}$$
$$+ \frac{2}{\alpha} \sum_{k=m+1}^{p} \mu_k \left(\int_0^t (f(s), e_k)_H\, e^{-\mu_k(t-s)}\, ds \right)^2 .$$

et ainsi

$$\int_0^T \|u_p(t)-u_m(t)\|_V^2 dt \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 \int_0^T \mu_k\, e^{-2\mu_k t}\, dt .$$
$$+ \frac{2}{\alpha} \sum_{k=m+1}^{p} \mu_k \int_0^T \left(\int_0^t (f(s), e_k)_H\, e^{-\mu_k(t-s)}\, ds \right)^2 dt$$

Mais $\displaystyle\int_0^T \mu_k\, e^{-2\mu_k t}\, dt = \left[-\frac{e^{-2\mu_k t}}{2} \right]_0^T = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\mu_k T}\right) < \frac{1}{2}$

car $T > 0$

et

$$\int_0^T \mu_k \left(\int_0^t (f(s), e_k)_H\, e^{-\mu_k(t-s)}\, ds \right)^2 dt \leq \int_0^T \int_0^T (f(s), e_k)_H^2\, ds \int_0^t \mu_k\, e^{-2\mu_k(t-s)}\, ds\, dt$$

$$\leq \int_0^T (f(s), e_k)_H^2 \, ds \cdot \int_0^T \underbrace{\left[\frac{e^{-2\mu_k(t-s)}}{2} \right]_0^t}_{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\mu_k t}\right) < \frac{1}{2}} dt$$

$$\leq \frac{T}{2} \int_0^T (f(s), e_k)_H^2 \, ds.$$

et donc

$$\int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|_V^2 \, dt \leq \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{p} (u_0, e_k)_H^2 + T \sum_{k=m+1}^{p} \int_0^T (f(s), e_k)_H^2 \right.$$

(3.13) et (3.14) nous donne

$$\lim_{m, p \to +\infty} \int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|_V^2 \, dt = 0.$$

Ainsi (u_m) est de Cauchy dans $C([0,T]; H)$ et $L^2(0,T;V)$ qui sont complets donc il existe $u_1 \in C([0,T]; H)$ et $u_2 \in L^2(0,T;V)$ tels que

$$u_m \to u_1 \text{ dans } C([0,T]; H)$$

$$\text{et } u_m \to u_2 \text{ dans } L^2(0,T;V).$$

Ces espaces s'injectant tous deux de manière continue dans $L^2(0,T;H)$ on a

$$u_m \to u_1 \text{ dans } L^2(0,T;H)$$

$$\text{et } u_m \to u_2 \text{ ———— }.$$

donc $u_1 = u_2 = u$.

et donc la série

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{\mu_k(s-t)} ds \right] e_k.$$

est convergente dans $C([0,T]; H) \cap L^2(0,T;V)$.

Il reste à montrer que u est solution de (3.6), pour cela on va passer à la limite dans (3.10), (3.11).

Tout d'abord $u_m \to u$ dans $C([0,T];H)$ donc $u_m(0) \to u(0)$ dans H.
de plus $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)_H e_k = u_0$ dans H car $u_0 \in H$ et (e_k) base Hilbertienne de H.

Ainsi, en passant à la limite dans (3.11), on obtient la condition initiale de (3.

$$u(0) = u_0 \text{ dans } H.$$

D'après (3.10), on a :

$$\frac{d}{dt}\left(u_m(\cdot), v\right)_H + a\left(u_m(\cdot), v\right) = \left(f(\cdot), v\right)_H, \quad \forall v \in V_\ell$$

$\forall 1 \leq \ell \leq m$ et $\forall m \geq 1$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[)$.

Car $V_\ell \subset V_m$ $\forall \ell \leq m$.

Ainsi $\forall \varphi \in C_c^\infty(]0,T[)$.

$$-\int_0^T \left(u_m(t), v\right)_H \varphi'(t)\, dt + \int_0^T a\left(u_m(t), v\right) \varphi(t)\, dt = \int_0^T \left(f(t), v\right)_H \varphi(t)$$

$$\forall v \in V_\ell, \quad \forall 1 \leq \ell \leq m \text{ et } \forall m \geq 1.$$

En passant à la limite sur m, on obtient

$$-\int_0^T \left(u(t), v\right)_H \varphi'(t)\, dt + \int_0^T a\left(u(t), v\right) \varphi(t)\, dt = \int_0^T \left(f(t), v\right)_H \varphi(t)\, dt \quad (3.15).$$

$$\forall v \in V_\ell, \quad \forall \ell \geq 1, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(]0,T[)$$

En effet

$$\left| -\int_0^T \left(u_m(t), v\right)_H \varphi'(t)\, dt + \int_0^T \left(u(t), v\right)_H \varphi'(t)\, dt \right|$$

$$\leq \|\varphi'\|_\infty \, T \sup_{t \in [0,T]} \|u_m(t) - u(t)\|_H \, \|v\|_H \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

car $u_m \to u$ dans $C([0,T];H)$

$$\left| \int_0^T a\left(u_m(t), v\right) \varphi(t)\, dt - \int_0^T a\left(u(t), v\right) \varphi(t)\, dt \right|$$

$$\leq C\sqrt{T}\left(\int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|_V^2 \, dt\right)^{1/2} \|v\|_H \, \|\varphi\|_\infty \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

car $u_m \to u$ dans $L^2(0,T;V)$.

Il reste à passer à la limite sur ℓ dans $(3.15)_\ell$.

On sait que $\forall v \in V$, $v \in H$ et donc $v_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} (v, e_k)_H e_k \xrightarrow{\ell \to +\infty} v$

dans H mais pas dans V. de plus $v_\ell \in V_\ell$.

On a alors $\forall \varphi \in C_c^\infty(]0,T[)$, $\forall \ell \geq 1$.

$$-\int_0^T (u(t), v_\ell)_H \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v_\ell)\varphi(t)\,dt = \int_0^T (f(t), v_\ell)\varphi(t)\,dt$$

Mais
$$\left| -\int_0^T (u(t), v_\ell)_H \varphi'(t)\,dt + \int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\,dt \right|$$

$$\leq \|\varphi'\|_\infty\, T\, \|u\|_{C([0,T];H)} \|v_\ell - v\|_H \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } v_\ell \to v \text{ dans } H.$$

et de même

$$\left| \int_0^T (f(t), v_\ell)\varphi(t)\,dt - \int_0^T (f(t), v)\varphi(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sqrt{T}\, \|f\|_{L^2(0,T;H)} \|v_\ell - v\|_H \|\varphi\|_\infty \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0.$$

$$\left| \int_0^T a(u(t), v_\ell)\varphi(t)\,dt - \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\ell} (v, e_k)_H\, a(u(t), e_k)\varphi(t)\,dt - \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\ell} (v, e_k)_H\, \mu_k (u(t), e_k)_H \varphi(t)\,dt - \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\ell} a(v, e_k)\, (u(t), e_k)_H \varphi(t)\,dt - \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^T a(v, u_\ell(t))\varphi(t)\,dt - \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt \right|$$

$$\leq C\sqrt{T}\, \|\varphi\|_\infty \|v\|_V \left(\int_0^T \|u_\ell(t) - u(t)\|_V^2\,dt \right)^{1/2} \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0$$

car $u_\ell \longrightarrow u$ dans $L^2(0,T;H)$.

Ainsi, en passant à limite (3.15), on obtient.

$$\frac{d}{dt}\left(u(t),v\right)_H + a\left(u(t),v\right) = \left(f(t),v\right). \quad \forall v \in V$$

et dans $\mathcal{D}'(]0,T[)$.

Ce qui termine la démonstration de (3.6).

3°) Interprétation de la formulation faible.

On montre le résultat suivant.

Lemme 3.2: La solution faible de (3.1), (3.2), (3.3) donnée par le Théorème (3.1) satisfait.

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{pour presque tout } (x,t) \in \partial\Omega \times]0,T[.$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{———} \quad x \in \Omega.$$

Preuve:

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Ainsi pour presque tout $t \in]0,T[$, $x \longmapsto u(x,t)$ est dans $H_0^1(\Omega)$ et donc sa trace $\gamma u(t)$ existe dans $L^2(\partial\Omega)$, on note $u = \gamma u$ et ainsi

$$\gamma u(t) = u(t) = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\Omega) \text{ pour presque tout } t \in]0,T[.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{pour presque tout } (x,t) \in \partial\Omega \times]0,T[.$$

De plus on sait que $u(.,0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$ et donc

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Il reste à récupérer l'équation, pour cela on choisit dans l'équation faible (3.5), $v \in C_c^\infty(\Omega)$, on obtient.

$$\int_0^T \int_\Omega \left[-u(x,t)\, v(x)\, \varphi'(t) + \nabla u(x,t).\nabla v(x)\, \varphi(t)\right] dx\, dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, \varphi(t)\, dx\, dt.$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(]0,T[)$.

Remarquons alors que $\begin{array}{l} \Omega \times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto v(x)\varphi(t) \end{array}$: $v \otimes \varphi$ est dans $C_c^\infty(\Omega \times]0,T[)$ et ainsi

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f, v\otimes\varphi \right\rangle = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \text{ et } \forall \varphi \in C_c^\infty(]0,T[).$$

Mais cela ne suffit pas car il faut cette égalité $\forall \psi \in C_c^\infty(\Omega\times]0,T[)$
On conclut grace à un résultat classique de la théorie des distributions que nous admettons : « L'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $v\otimes\varphi$ avec $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, est dense dans $\mathcal{D}(\Omega\times]0,T[)$. »
On a donc.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \times]0,T[).$$

4°) Dépendance continue par rapport aux paramètres.

On montre le résultat suivant

Théorème 3.2 : Soient V et H deux espaces de Hilbert réels de dimension infinie, on suppose que V s'injecte dans H de manière continue et compacte et que V est dense dans H. On considère a, une forme bilinéaire, continue, symétrique et coercive sur V
On se donne $u_0 \in H$, $T > 0$ et $f \in L^2(0,T;H)$ et on considère

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : H \times L^2(0,T;H) & \longrightarrow & C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V). \\ (u_0, f) & \longmapsto & u \text{ solution du problème variationnel (3.6)}. \end{array}$$

alors $\mathcal{A}$ est linéaire et continu.

<u>Preuve:</u> Le fait que $\mathcal{T}$ soit bien défini résulte directement du théorème 3.1. La linéarité de $\mathcal{T}$ est évidente et laissée en exercice.

Il reste à montrer la continuité, on utilise pour cela la forme de la solution, c'est à dire le lemme 3.1., on sait que

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{-\mu_k (t-s)} ds \right] e_k$$

où les $(\mu_k)_{k\geq 1}$ et les $(e_k)_{k\geq 1}$ sont respectivement valeurs et vecteurs propres de $a(.,.)$.

De plus $\forall t \in [0,T]$, on a.

$$\|u(t)\|_H^2 = (u(t), u(t))_H.$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(u_0, e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s), e_k)_H e^{-\mu_k (t-s)} ds \right]^2$$

car les (e_k) sont orthonormés.

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (u_0, e_k)_H^2 e^{-2\mu_k t}$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t (f(s), e_k)_H^2 ds \int_0^t e^{-2\mu_k (t-s)} ds$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (u_0, e_k)_H^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t (f(s), e_k)_H^2 ds \times \frac{1}{2\mu_k} \underbrace{\left(1 - e^{-2\mu_k t}\right)}_{\leq 1}.$$

$$\leq 2 \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\mu_1} \|f\|^2_{L^2(0,T;H)}.$$

Et donc

$$\|u\|_{C([0,T];H)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H \leq \max\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right) \left(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right)$$

de plus

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^T a(u(t),u(t))\, dt$$ d'après la coercivité de a.

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \left[(u_0,e_k)_H e^{-\mu_k t} + \int_0^t (f(s),e_k)_H e^{-\mu_k(t-s)} ds \right]^2 dt$$

car a est bilinéaire, les (e_k) sont orthonormés et $\forall k \geq 1$, $a(e_k,v) = \mu_k (e_k,v)_H \quad \forall v \in V$

$$\leq \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}(u_0,e_k)_H^2 \int_0^T \mu_k e^{-2\mu_k t}\, dt$$

$$+ \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^T (f(s),e_k)_H^2\, ds \int_0^T\int_0^t \mu_k\, e^{-2\mu_k(t-s)}\, ds\, dt.$$

$$= \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}(u_0,e_k)_H^2\, \frac{1}{2}\underbrace{\left(1-e^{-2\mu_k T}\right)}_{\leq 1}$$

$$+ \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^T (f(s),e_k)_H^2\, ds \int_0^T \frac{1}{2}\underbrace{\left(1-e^{-2\mu_k t}\right)}_{\leq 1} dt.$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\|u_0\|_H^2 + \frac{T}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(0,T;H)}.$$

et ainsi

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\max(1,\sqrt{T})\left(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right).$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.2.

5°) Propriétés qualitatives de la solution.

On commence tout d'abord par des résultats de régularité que l'on admettra.

Proposition 3.1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert borné de classe C^∞, et soit $T > 0$, on note $\partial\Omega$ la frontière de Ω.
Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u l'unique solution dans $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1_0(\Omega))$ de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times]0,T[), \\ u = 0 \text{ presque partout dans } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ presque partout dans } \Omega, \end{cases}$$

alors, $\forall \varepsilon \in]0,T[$, $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\varepsilon, T])$.

Preuve : admise.

Remarque : 1. On retrouve l'effet régularisant de l'équation de la chaleur puisque $u_0 \in L^2(\Omega)$ même discontinue donne une solution u instantanément $C^\infty(\overline{\Omega})$, $\forall t > \varepsilon$.
2. Lorsqu'on considère une équation avec un terme source f non nul, on doit supposer de la régularité sur f, comme le montre le résultat suivant

Proposition 3.2 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert borné de classe C^∞ et soit $T > 0$, on note $\partial\Omega$ la frontière de Ω.
Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega \times]0,T[)$, on note u l'unique solution dans $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1_0(\Omega))$ de.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times]0,T[), \\ u = 0, \text{ presque partout dans } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \text{ presque partout dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors.

$$f \in C_c^\infty(]0,T[\times \Omega) \Rightarrow u \in C^\infty([\varepsilon,T] \times \overline{\Omega}) \quad \forall \varepsilon \in]0,T[.$$

Preuve : admise

On montre maintenant, un résultat de comportement asymptotique de la solution :

Proposition 3.3 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert borné de classe C^∞, de frontière $\partial\Omega$ et soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u l'unique solution du problème.

$$(3.16) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_+), \\ u = 0, \text{ dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \text{ presque partout dans } \Omega, \end{cases}$$

alors

$$\lim_{t \to +\infty} \| u(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Remarque : 1°) 0 est l'unique solution du problème stationnaire

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \ \Omega. \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2°) On peut montrer un résultat plus fort à l'aide d'injections de Sobolev qui sortent du cadre de ce cours, on a.

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0.$$

Preuve:

On utilise la forme de la solution donnée par le Lemme 3.1.

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (u_0, e_k)\, e^{-\mu_k t} e_k$$

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{+\infty} (u_0, e_k)^2 e^{-2\mu_k t}.$$

car (e_k) sont orthonormés.

$$= \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)^2 e^{-2\mu_k t} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (u_0, e_k)^2 e^{-2\mu_k t}$$

$\forall m \geq 1$.

$$\leq \sum_{k=1}^{m} (u_0, e_k)^2 e^{-2\mu_k t} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (u_0, e_k)^2$$

Ainsi

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} (u_0, e_k)^2 \quad \forall m \geq 1.$$

on passe à la limite sur $m \to +\infty$.

on obtient le résultat.

Ce qui termine la preuve de la Proposition 3.3.

De même dans le cas d'un terme source non nul, on montre le résultat suivant

Proposition 3.4: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert borné de classe C^1, de frontière $\partial\Omega$ et soient $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et u l'unique solution de

$$(3.17)\quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times]0,T[) \\ u = 0, \quad \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \text{ p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \| u(\cdot, t) - v \|_{L^2(\Omega)} = 0$

où v est solution de

$$(3.18)\quad \begin{cases} -\Delta v = f, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ v \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : On a

$$\partial_t (u-v) - \Delta u(u-v) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$
$$(u-v) = 0 \quad \partial\Omega \times]0,T[$$
$$(u-v)(\cdot, 0) = u_0 - v, \text{ p.p dans } \Omega$$

D'après la proposition 3.4. on obtient.

$$\lim_{t \to +\infty} \| (u-v)(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} \| u(\cdot, t) - v \|_{L^2(\Omega)} = 0$$

On termine ce paragraphe avec l'énoncé du principe du maximum faible dont la démonstration est admise et est basée comme dans le cas elliptique sur les troncatures de Stampacchia (voir Partie I).

<u>Proposition 3.5</u>: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, on note $\partial\Omega$ sa frontière, soit de plus $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)$. On note u la solution dans $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1_0(\Omega))$ de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega), \\ u = 0, \text{ p.p. dans }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(\cdot,0) = u_0, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

alors

$$\left.\begin{array}{l} f \leq 0 \quad \text{p.p. dans }]0,T[\times\Omega \\ u_0 \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow u \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$