Chapitre 3 : Equations elliptiques linéaires d'ordre 2.

I L'équation de Poisson en dimension $n \geq 2$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$ dans $\mathbb{N}$) (de classe C^1), on considère alors l'équation de Poisson :

$$(3.1) \quad -\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

où $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$ $\forall x \in \Omega$), $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnue et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée dont on précisera plus tard les propriétés requises.

1°) Formulation variationnelle pour le problème de Dirichlet homogène.

On s'intéresse à l'équation de Poisson (3.1) à laquelle on rajoute la condition aux limites, dite de Dirichlet homogène, suivante :

$$(3.2) \quad u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

La formulation classique de (3.1), (3.2) consiste à chercher u suffisamment régulière pour que (3.1), (3.2) ait un sens. On suppose $f \in C(\Omega)$ alors pour que (3.1) ait un sens on doit avoir $u \in C^2(\Omega)$ et pour (3.2) on doit avoir $u \in C(\bar{\Omega})$.

La formulation classique de (3.1), (3.2) est donc : Trouver

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solution de (3.1), (3.2).

Malheureusement, cette vision classique ne suffit pas pour décrire la réalité physique. En effet dans beaucoup de problèmes, on est amené à considérer des quantités non régulières, par exemple pour décrire la rupture d'un barrage, le freinage d'une voiture, ...

Pour cette raison, nous introduisons la formulation variationnelle du problème.

Supposons que $f \in L^2(\Omega)$ (nous verrons que l'on peut encore affaiblir cette hypothèse $f \in H^{-1}(\Omega)$).

1.1 : Choix de l'espace fonctionnel.

- Considérons tout d'abord (3.1) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors.

$$-\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \iff -\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Supposons alors que les dérivées premières de u soient localement intégrables dans Ω. $\left(\forall i = 1 \text{ à } n \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\Omega)\right)$ alors (3.1) s'écrit.

$$(3.3) \quad \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- Supposons maintenant que u est solution de (3.1) et que $u \in H^2(\Omega)$. Alors (3.1) à un sens presque partout dans Ω, on la multiplie par $\varphi \in H^1(\Omega)$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x).\nu(x)\,\varphi(x)\,d\sigma(x)$$

$$= \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$.

où ν est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω et $d\sigma$ la mesure superficielle sur $\partial\Omega$ induite par la mesure de Lebesgue n-dimensionelle.

Si on veut que u soit moins régulier que $H^2(\Omega)$, il faut éliminer le terme de trace $(\nabla u.\nu)$, pour cela supposons que $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ alors on obtient :

$$(3.4)\quad \int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Notons qu'à ce stade nous n'avons pas utilisé la condition aux limites (3.2) et que nous sommes incapables de justifier les hypothèses faites sur u. Mais la question qui se pose, avant tout, est : Dans quel espace allons nous travailler ?

La réponse à cette question est suggérée par les formulations (3.3) et (3.4) : On voit qu'imposer

$$\nabla u \in (L^2(\Omega))^n \quad \text{et} \quad \nabla\varphi \in (L^2(\Omega))^n$$

est l'hypothèse minimale, symétrique en u et φ, assurant que tous les termes de (3.3) et (3.4) ait un sens.

Nous allons donc travailler dans $H^1(\Omega)$.

Remarquons que si $u \in H^1(\Omega)$, alors la trace de u, notée $\gamma(u)$, a un sens dans $L^2(\partial\Omega)$. Demander que u satisfasse (3.2) revient alors à chercher $u \in H^1_0(\Omega)$.

On est alors en mesure de donner la formulation variationnelle.

1.2. Définition de la formulation variationnelle

Définition 3.1. (Formulation variationnelle). Soit $f \in L^2(\Omega)$, on appelle formulation variationnelle du problème (3.1), (3.2), le problème suivant :

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$(3.5) \quad \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Remarques : 1 - Lorsque u est une solution variationnelle, on dit que u est solution faible de (3.1), (3.2).

2 - Toute solution forte (# classique) de (3.1), (3.2) est aussi solution faible.

3. On peut affaiblir l'hypothèse sur f ; Il suffit que f soit dans le dual de $H^1_0(\Omega)$, ce dual est noté $H^{-1}(\Omega)$

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ T : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; T \text{ linéaire et continue} \atop T \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}) \right\}.$$

Dans ce cas, on remplace $\int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx$ par le crochet de dualité

$$< f, v >_{H^{-1}, H^1_0}.$$

1. 3. Interprétation de la formulation variationnelle

On a vu que toute solution forte de (3.1), (3.2) est solution faible ; Réciproquement si u est solution faible, que peut-on dire ?

Si u est soluO faible de (3.1), (3.2) alors

$$\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >_{\mathcal{D}';\mathcal{D}} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}';\mathcal{D}}$$

$$\Leftrightarrow \quad - \sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}';\mathcal{D}} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}';\mathcal{D}}$$

$$\Leftrightarrow \quad < -\Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}';\mathcal{D}} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}';\mathcal{D}}$$

donc $\quad -\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Mais $f \in L^2(\Omega)$ alors $\quad -\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$ et ainsi

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

De plus $u \in H^1_0(\Omega)$, donc $\gamma(u) = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc

$$u(x) = 0 \quad \text{p.p sur } \partial\Omega \quad (\triangle \text{ p.p. } (n-1) \text{ dimensionnel})$$

(on devrait écrire $\gamma u(x) = 0$ p.p).

2°) Existence et unicité : le théorème de Lax-Milgram.

L'existence et unicité d'une solution faible de (3.1)-(3.2) est une conséquence directe du théorème de Lax-Milgram.

que l'on commence par rappeler.

2.1. Le théorème de Lax-Milgram.

Dans ce paragraphe V désigne un espace de Hilbert.
(espace vectoriel muni d'un produit scalaire (préhilbertien) et complet pour la norme associée au p.s.).

On note $(.,.)_V$ son produit scalaire et $\|.\|_V$ la norme associée $(.,.)_V$.

Définition 3.2: Soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que a est une forme :

1. bilinéaire si

$\forall u \in V$, l'application $\begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto a(u,v) \end{array}$ est linéaire

et $\forall v \in V$, ———— $\begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto a(u,v) \end{array}$ est linéaire

2- cœrcive (ou coercitive) si $\exists\, C > 0$ telle que

$$a(u,u) \geqslant C \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V.$$

Remarque: Si a est une forme bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ pour montrer sa continuité, il (faut) et il suffit de montrer que $\exists\, C_1 > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V$$

Le théorème de Lax-Milgram s'énonce alors de la façon suivante

Théorème 3.1 : (Lax-Milgram)

Soient $L (\in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V')$ une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V, alors le problème

(3.6) Trouver $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$.

admet une unique solution

et l'application $T : V' \longrightarrow V$ définie par $T(L)$ est la solution de (3.6) est linéaire et continue, donc $\exists\, C > 0$ telle que

$$\|u\|_V \leq C \; \|L\|_{V'}$$

Si de plus a est symétrique $(a(u,v) = a(v,u))$ alors u est caractérisée par

$$u \in V \text{ et } \frac{1}{2} a(u,u) - L(u) = \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \right)$$

Démonstration : On peut donner 2 preuves différentes de Lax-Milgram une qui utilise le théorème du point fixe (vu en B_4 ou voir Brezis) une autre que l'on peut qualifier de directe et que l'on donne ici.

On introduit l'opérateur :

$$A : V \longrightarrow V'$$

$$u \longmapsto Au = \left(\begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \langle Au, v \rangle_{V',V} = a(u,v) \end{array} \right)$$

On va montrer que A est bijectif, c'est à dire

$$\forall f \in V', \; \exists!\, u_f \in V \text{ tq } Au_f = f \text{ dans } V'$$

$\Leftrightarrow \quad \langle A u_f, v \rangle_{V',V} = \langle f, v \rangle_{V',V} \quad \forall v \in V.$

- Montrons que A est injectif. Pour cela, remarquons que A est linéaire car a est bilinéaire (exo). Il suffit donc de montrer que

$$\forall u \in V, \quad Au = 0 \text{ dans } V' \Rightarrow u = 0 \text{ dans } V.$$

Si $Au = 0$ dans V' alors $\langle Au, v \rangle_{V',V} = 0 \quad \forall v \in V$

et donc en particulier $\langle Au, u \rangle = a(u,u) = 0$.

Mais a est coercive, donc $a(u,u) = 0 \geq c\, \|u\|_V^2$.

alors $\|u\|_V^2 = 0 \Rightarrow u = 0$ dans V.

- Montrons que A est surjectif. Pour cela, on procède en 2 étapes.

<u>Etape 1:</u> L'image de A est dense dans V'

<u>Etape 2:</u> L'image de A est fermée.

Ceci suffit pour conclure, en effet, $Im(A) = \{Au;\ u \in V\}$.

Si $Im(A)$ est dense dans V' alors $\forall f \in V'$, $\exists\ (u_n)_{n\geq 0} \subset V$ telle que $Au_n \longrightarrow f$ dans V'.

Mais $Im(A)$ est fermée, donc toute suite convergente de $Im(A)$ converge dans $Im(A)$. donc $\exists u \in V$ tel que $Au_n \longrightarrow Au$ et ainsi $\forall f \in V'$, $\exists u \in V$ tel que $Au = f$.

$\Leftrightarrow$ A est surjective

<u>Etape 1:</u> L'image de A est dense dans V'.

Pour montrer ceci, on utilise un corollaire du théorème de Hahn-Banach

<u>Corollaire</u>: Soit E un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous espace vectoriel alors :

$$\overline{F} \neq E \Rightarrow \exists f \in E',\ f \neq 0 \text{ telle que } \langle f, x \rangle_{E',E} = 0 \quad \forall x \in F.$$

Preuve : voir Brézis (page 7 !).

On utilise la contraposée de ce corollaire
$\forall f \in E'$, soit $f = 0$, soit $\exists\, x \in F$ tel que $< f, x > \neq 0$.

Pour nous $E = V'$ (donc $E' = V$) et $F = Im(A)$.

Soit $u \in V$ $(= E')$ alors on a 2 possibilités

1ère possibilité : $\exists Av \in Im(A)$ tel que $< u, Av >_{V,V'} \neq 0$
et dans ce cas c'est terminé

2ème possibilité : $\forall\, Av \in Im(A)$, $< u, Av >_{V,V'} = 0$.

et en particulier $< u, Au > = a(u,u) = 0$.

et d'après la coercivité de a, $u = 0$ dans V.

et ainsi $\overline{Im A} = V'$.

Etape 2 : $Im(A)$ est fermée.

Soit $(Av_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset Im(A)$ telle que $Av_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} f$ dans V'.

On va montrer que $\exists\, u \in V$ tel que $v_j \longrightarrow u$ dans V.

A étant continue, on aura $Av_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} Au$ dans V'

$$\left(\|Av_j - Au\|_{V'} = \|A(v_j - u)\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{< A(v_j - u), v >}{\|v\|} \right.$$

$$= \sup \frac{a(v_j - u, v)}{\|v\|} \leq C_1 \|v_j - u\|_V.$$

car a est continue)

Montrons donc (v_j) converge dans V, pour cela on montre que (v_j) est de Cauchy dans V qui est complet

$\|Av_j - Av_l\|_{V'} = \|A(v_j - v_l)\|_{V'}$ car A est linéaire

$$= \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\langle A(v_j - v_p), v \rangle}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a(v_j - v_p, v)}{\|v\|_V} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a(v_j - v_p, v_j - v_p)}{\|v_j - v_p\|_V} \geqslant C \cdot \|v_j - v_p\|_V$$ d'après la coercivité de a.

(Av_j) converge dans V' donc elle est de Cauchy et ainsi (v_j) est de Cauchy

Donc A est bijectif et continu, on a même A isomorphisme puisque $\forall u \in V$.

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\langle Au, v \rangle}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geqslant \frac{a(u,u)}{\|u\|_V}$$

$$\geqslant C \|u\|_V$$

donc A^{-1} est continu.

Si u est la solution de $a(u,v) = L(v) \; \forall v \in V$

alors
$$\|Au\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{L(v)}{\|v\|_V} = \|L\|_{V'}$$

donc $\|u\|_V \leq \frac{1}{C} \|L\|_{V'}$

Supposons que $a(w, v) = a(v, w) \; \forall w, v \in V$.

et posons $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \; \forall v \in V$.

On doit montrer que

$u \in V$ et $a(u,v) = L(v) \; \forall v \in V$

$$\iff \exists u \in V \text{ tq } J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall w \in V$.

$$J(u+w) = \frac{1}{2} \quad a(u+w, u+w) - L(u+w)$$

$$= \frac{1}{2}\left[a(u,u) + 2a(u,w) + a(w,w)\right] - L(u) - L(w)$$

$$= J(u) + a(u,w) - L(w) + \frac{1}{2}a(w,w).$$

$$= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \quad \text{car } a(u,w) = L(w).$$

$$\geqslant J(u) + \frac{C}{2}\|w\|_V^2 \quad \text{d'après la coercivité de a}$$

$$> J(u) \quad . \forall w \neq 0 .$$

donc $\forall v \neq u$.

$$J(v) > J(u) \quad \text{et } J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\exists\, u \in V$ tq $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$

alors $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $DJ(u) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue

avec $\langle DJ(u), v \rangle_{V',V} = 0 \quad \forall v \in V$.

(équa° d'Euler).

Calculons $\langle DJ(u), v \rangle$

$$J(u+v) = J(u) + a(u,v) - L(v) + \frac{1}{2}a(v,v)$$

avec $\frac{1}{2}a(v,v) \leq \frac{C_1}{2}\|v\|_V^2$.

donc $\langle DJ(u), v \rangle = a(u,v) - L(v)$

donc $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$

2.2. Existence et unicité d'une solution faible du problème de Dirichlet homogène

On reprend la formulation variationnelle, on montre le résultat suivant :

Théorème 3.2 : Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ le problème (3.1), (3.2) possède une unique solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$.
De plus $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Preuve :
On pose $V = H^1_0(\Omega)$ que l'on muni de la norme de $H^1(\Omega)$
H^1_0 est bien un espace de Hilbert, la demonstrat° est la même que pour $H^1(\Omega)$, il suffit juste de vérifier que si $\gamma u_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$ alors $\gamma u = 0$ et ceci est donné par la continuité de la trace γ.
On définit $\forall u, v \in H^1_0(\Omega)$; $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$.
et $L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx$.
alors a est clairement bilinéaire (evo) et a est continue car $\forall u, v \in H^1_0(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ d'après Cauchy-Schwarz}$$
$$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

de plus a est coercive car $\forall u \in H^1_0(\Omega)$

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u^2(x)\, dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_\Omega} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Poincaré (théorème 2.12)
L est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ (evo) et continue car $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$$|L(v)| \overset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, $\exists !\, u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega)\; a(u,v) = L(v) \iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx.$$

de plus $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

$$\|f\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega)\\ v \neq 0}} \frac{\langle f, v\rangle_{V'/V}}{\|v\|_{H(\Omega)}}$$

$$= \sup \frac{\int_\Omega f v \, dx}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \overset{C.S}{\leq} \sup \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

II Autres équations, autres conditions aux limites

1°) Equations elliptiques linéaires d'ordre 2

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, on considère $f \in L^2(\Omega)$ (on verra que $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ suffit).

On cherche u solution de

(3.7) $$\mathcal{L}u(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + a_0(x)\, u(x)$$

$$= f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

(3.8). $$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où les fonctions a_{ij} et a_0 sont données dans $L^\infty(\Omega)$.

Remarque: $\mathcal{L}u(x) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + a_0(x)\,u(x)$

avec $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$. (3.9)

On introduit la formulation variationnelle suivante

(3.10) Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

avec $a(u,v) = \int_\Omega A(x)\,\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega a_0(x)u(x)v(x)\,dx$

(3.11) $$= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_\Omega a_0(x)u(x)v(x)\,dx$$

et $L(v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$. (3.12)

On a alors le résultat suivant

<u>Théorème 3.3</u>: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, on se donne $f \in H^{-1}(\Omega)$, n^2+1 fonctions de $L^\infty(\Omega)$: a_{ij} pour $i,j = 1$ à n et a_0 vérifiant les hypothèses d'ellipticité suivante :

H1- $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\forall \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ on ait :
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_j\,\xi_i \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

H2- $\exists\, \alpha_0 > -\frac{\alpha\beta}{C_\Omega^2}$ avec $\beta \in]0,1[$ et C_Ω constante de Poincaré tel que $a_0(x) \geq \alpha_0$ p.p dans Ω.

Alors $\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$, solution de la formulation variationnelle (3.9)

De plus $\exists\, C > 0$ telle que
$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

<u>Preuve:</u> On utilise, bien sûr, le théorème de Lax-Milgram.
On pose $V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$.

Alors a est clairement bilinéaire, et $\forall u,v \in H_0^1(\Omega)$
$$|a(u,v)| \overset{C.S}{\leq} \max_{i,j=1}^{n}\left(\|a_{ij}\|_\infty\right)\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx + \|a_0\|\,\|u\|_{L^2}\|v\|$$

$$\overset{C.S}{\leq} \operatorname{Max}\left(\operatorname{Max}_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_\infty , \|a_0\|_\infty\right)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}\right]$$

$$\leq (n+1) \operatorname{Max}\left(\operatorname{Max}_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_\infty, \|a_0\|_\infty\right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

donc a est continue

Montrons que a est coercive : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_\Omega a_0(x) u^2(x)\, dx$$

$$\geq \int_\Omega \alpha \, |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega \alpha_0 \, u^2(x)\, dx$$

d'après H1 et H2

$$= \alpha \, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$\forall \beta \in]0,1[$

$$= \alpha \beta \, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha(1-\beta) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq \alpha \frac{\beta}{C_\Omega^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha(1-\beta) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Poincaré. (théorème 2.12)

$$= \underbrace{\left(\alpha \frac{\beta}{C_\Omega^2} + \alpha_0\right)}_{>0} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha(1-\beta) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq \operatorname{Max}\left(\frac{\alpha\beta}{C_\Omega^2} + \alpha_0 , \alpha(1-\beta)\right) \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Il reste à montrer que L définie par (3.12) est continue car elle est clairement linéaire.

Mais

$$|L(v)| = \frac{\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \left(\sup_{\substack{w\in H_0^1(\Omega)\\ w\neq 0}} \frac{\langle f, w\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$= \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram. $\exists !\, u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) = L(v)\quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

et $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.\, \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

Il reste à interpréter la formulation variationnelle.

<u>Corollaire 3.1:</u> Si $f\in L^2(\Omega)$ alors $\exists !\, u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(A(x)\,\nabla u(x)\big) + a_0(x)\,u(x) = f(x) & \text{pour presque tout } x\in\Omega \\ \gamma u = 0 \text{ p.p. dans } \partial\Omega & (\triangle \text{ p.p. } n\text{-}1 \text{ dimensionnel}) \end{cases}$$

avec $A(x)$ donnée par (3.9)

<u>Preuve:</u> u est bien sur la soluti faible de (3.7). (3.8).

Si u est solution faible de (3.7) (3.8) alors $\forall \varphi\in C_c^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle a_0 u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f,\varphi\rangle.$$

$$\Rightarrow \Big\langle \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}_{-\operatorname{div}(A\nabla u)} + a_0 u, \varphi \Big\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f,\varphi\rangle$$

et ainsi
$$-\operatorname{div}(A\nabla u) - a_0 u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

mais $f \in L^2(\Omega)$ donc
$$-\operatorname{div}(A\nabla u) - a_0 u = f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et donc p.p. dans } \Omega.$$

$u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \gamma u = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.

2°) Dirichlet non homogène pour le laplacien

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, on s'intéresse au problème

$$(3.13) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On ne va bien-sur pas chercher u dans $H_0^1(\Omega)$ mais dans $H^1(\Omega)$ puisqu'on veut une trace non nulle. Nous verrons que $f \in H^{-1}(\Omega)$ est une hypothèse suffisante pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution. Mais dans quel espace doit-on choisir g pour être sûr d'avoir une solution ? u étant dans $H^1(\Omega)$, g doit être la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$, on doit donc supposer

$$g \in H^{1/2}(\partial\Omega) := \left\{ G|_{\partial\Omega} ; \ G \in H^1(\Omega) \right\}.$$

On va se ramener au cas de Dirichlet homogène.

Si $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors $\exists\, G \in H^1(\Omega)$ tel que
$$G(x) = g(x) \text{ pour presque tout } ((n-1)\text{dimensionnel}) \ x \in \partial\Omega.$$

On pose $v = u - G$, alors v est solution de

$$(3.14)\quad \begin{cases} \Delta v = f + \Delta G & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si $G \in H^1(\Omega)$ alors $\Delta G \in H^{-1}(\Omega)$, en effet.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $< \Delta G, \varphi >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -< \nabla G, \nabla \varphi >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

$= -\int_\Omega \nabla G(x) . \nabla \varphi(x)\, dx$ car $\nabla G \in L^2(\Omega)$.

et donc $|< \Delta G, \varphi >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leq \|G\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$.

donc " ΔG " est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$; $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $H^1_0(\Omega)$, on prolonge, comme pour la trace, ΔG en une forme linéaire et continue sur $H^1_0(\Omega)$.

On montre alors le résultat suivant

<u>Théorème 3.4:</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné de classe C^1, on considère $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, alors il existe une unique solu° faible $u \in H^1(\Omega)$ de (3.13). elle est caractérisée par $\gamma u = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et.

$$\int_\Omega \nabla u(x) . \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

De plus $\exists\, C > 0$ telle que.

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \Big(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \underbrace{\inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma(v) = g}} \|v\|_{H^1(\Omega)}}_{\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \Big)$$

<u>Preuve:</u> D'après le théorème 3.3, $\exists !$ solu° faible de (3.14)., c'est à dire $v \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla v(x) . \nabla \varphi(x)\, dx = < f + \Delta G, \varphi >_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}.$$

$\forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$.

Mais $<\Delta G, \varphi>_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \lim_{j \to +\infty} <\Delta G, \varphi_j>_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)}$

avec $\varphi_j \to \varphi$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$.

$$= \lim_{j \to +\infty} -\int_\Omega \nabla G . \nabla \varphi_j \, dx = -\int_\Omega \nabla G(x) . \nabla \varphi(x) dx$$

donc $\exists !$ $v_G \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \left(\nabla v_G(x) + \nabla G(x)\right) . \nabla \varphi(x) \, dx = <f, \varphi>_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

On pose $u = v_G + G$. alors u existe, $u \in H^1(\Omega)$ et $\gamma u = g$.

et u vérifie $\displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) . \nabla \varphi(x) dx = <f, \varphi>_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$

$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Montrons que u est unique, soient u_1 et $u_2 \in H^1(\Omega)$ tels que $\gamma u_1 = \gamma u_2 = g$ et

$$\int_\Omega \nabla u_1 . \nabla \varphi = <f, \varphi>_{H^{-1}, H_0^1} \text{ et } \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla \varphi = <f, \varphi>_{H^{-1}, H_0^1}$$

$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

alors $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) . \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Mais ceci est la formulation faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il reste à montrer les estimations. Pour cela, on choisit $\varphi = u - G$ dans la formulation faible où $G \in H^1(\Omega)$ tq $\gamma(G) = g \Leftrightarrow G \in H_g$.

alors

$$\int_\Omega \nabla u^2(x) \, dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla G + \int_\Omega f u - \int_\Omega f G$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{C.S.}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla G\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|G\|_{L^2}$$

$$\leq \left(\|\nabla G\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\right)\|u\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|G\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla G\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\right)^2+\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|G\|^2_{L^2}$$

$$\leq \|\nabla G\|^2_{L^2}+\frac{3}{2}\|f\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|G\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|G\|^2_{H^1(\Omega)}+3\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

On utilise alors l'inégalité de type Poincaré suivante que l'on démontrera en TD.

<u>Théorème:</u> Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n (n\geq 1)$ ouvert borné de classe C^1 alors $\exists D>0$ telle que $\forall u\in H^1(\Omega)$.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq D\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}+\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$$

Ici $\gamma u=g \Rightarrow \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (D^2+1)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$.

$$\leq (D^2+1)\|G\|^2_{H^1(\Omega)}+3\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|G\|^2_{H^1(\Omega)}$$

car $\gamma(G)=g$ et γ continue.

Ainsi $\forall G\in H^1(\Omega)$ tq $\gamma(G)=g$ on a

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\|G\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

$$\Rightarrow \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\inf_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \gamma(v)=g}}\|v\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

d'après le théorème 3.2 $\exists !$ solution faible dans $H^1_0(\Omega)$, mais 0 est solution donc $u_2 - u_1 = 0$ dans $H^1(\Omega)$ et donc p.p. dans Ω.

Rmq: De même que pour Dirichlet homogène, on montre que

$$-\Delta u = f \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et $\gamma u = g$ p.p. $(n-1)$ dimensionnel dans $\partial\Omega$. (eoo)

3°) Problème de Neumann pour le laplacien

$$\begin{aligned} &(3.16) \quad \left\{ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert borné de classe } C^1 \text{ connexe} \right. \\ &(3.17) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u . \nu = g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

On multiplie (3.16) par $v \in H^1(\Omega)$ et on utilise la formule de Green, on suppose que u est suffisamment régulier,

$$\int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u(x) . \nu(x)}_{g(x)} \gamma(v)(x)\, d\sigma(x) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

et ainsi la formulation faible est

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(3.18) \quad \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} g(x)\gamma(v)(x)\, d\sigma(x) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On montre alors qu'il y a une condition nécessaire pour l'existence d'une solution faible de (3.16), (3.17)

Proposition 3.1: Soit Ω ouvert borné de classe C^1, on considère $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On a alors le résultat suivant

$$\exists\, u \in H^1(\Omega) \text{ solution de (3.18)} \Rightarrow \int_\Omega f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\, d\sigma(x) = 0. \quad (3.19)$$

Preuve: Il suffit de choisir $v \equiv 1$ dans (3.18)

(3.19) s'appelle la relation de compatibilité entre f et g.

On est alors en mesure d'établir le résultat suivant.

<u>Théorème 3.5</u>: Soit Ω ouvert borné de classe C^1, on considère $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ satisfaisant la relation de compatibilité (3.19).
Alors $\exists ! \, u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant $\int_\Omega u(x)\,dx = 0$ et (3.18)
de plus $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$.

<u>Preuve:</u>

On considère $H = \left\{ v \in H^1(\Omega) \; ; \; \int_\Omega v(x)\,dx = 0 \right\}$.

alors H muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

En effet, soit (v_j) de Cauchy dans H, alors (v_j) est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge dans $H^1(\Omega)$ qui est complet.

Il reste donc à montrer que la limite est dans H, c'est à dire de moyenne nulle. Notons v la limite alors

$$\left| \int_\Omega v(x)\,dx \right| = \left| \int_\Omega v(x)\,dx - \int_\Omega v_j(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_\Omega |v(x) - v_j(x)|\,dx \overset{C.S}{\leq} \|v - v_j\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{j \to \infty} 0$$

Ω borné nécessaire ici.

donc $\int_\Omega v(x)\,dx = 0$.

On note alors

$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, \varphi) \longmapsto \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla \varphi(x)\,dx.$$

alors a est clairement bilinéaire et continue car $\forall u, \varphi \in H$.

$$|a(u,\varphi)| \overset{C.S}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Il faut montrer que a est coercive

Soit $u \in H$, $a(u,u) = \int_\Omega \nabla u^2(x)\,dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (Théorème 2.14), $\exists C>0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$.

$$\|v-\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

où $\bar{v} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x)\,dx$ et $|\Omega| = \int_\Omega dx$.

u étant de moyenne nulle on a $\bar{u}=0$ et donc

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

et alors $a(u,u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C^2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

$$\geq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2C^2}\right)\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

donc a est coercive.

On introduit $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\varphi \longmapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\gamma(\varphi)(x)\,d\sigma$$

$$|L(\varphi)| \overset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma(\varphi)\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} C.\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

car γ est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

$$\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram. $\exists!\, u \in H$ tel que.

(3.20) $$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\gamma(\varphi)(x)\,d\sigma(x)$$

et $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sup_{\varphi\in H}\frac{|L(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$ $\forall \varphi \in H$.

Il reste à récupérer. $\forall v \in H^1(\Omega)$ et non pas $\forall\varphi\in H$.

Soit $v \in H^1(\Omega)$ on pose $\varphi = v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x)\,dx = v - \bar{v}$. alors $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0$

et (3.20) est satisfaite

Notons alors que $\nabla \Psi = \nabla v$ donc.

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\left(v(x)-\bar{v}\right)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\left(\gamma v - \bar{v}\right)d\sigma(x)$$ car γ linéaire

$$= \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\gamma(v)(x)\,d\sigma(x) - \bar{v}\underbrace{\left(\int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)d\sigma\right)}_{=0 \text{ d'après } (3.19)}$$

donc (3.18) est satisfaite.

Ce qui termine la démonstration du théorème 3.5.

Il reste à interpréter la solution, on montre le résultat suivant:

<u>Théorème 3.6</u>: Sous les hypothèses du théorème (3.5), la solution faible du problème (3.16), (3.17) vérifie.

$$-\Delta u = f \quad p.p|_{n\,dim.} \text{ dans } \Omega,$$

de plus $\nabla u.\nu \in L^2(\partial\Omega)$ et.

$$\nabla u.\nu = g \quad p.p|_{n-1\,dim} \text{ sur } \partial\Omega.$$

<u>Rmq</u>: 1- $u \in H^1(\Omega)$, on sait donc définir $\gamma(u)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ par contre $\nabla u.\nu \in L^2(\Omega)$ et donc a priori on ne sait pas définir la trace de $\nabla u.\nu$ sur $\partial\Omega$. Ce résultat est donc fort au sens où grace à la formulation faible, on récupère une notion de trace pour $\nabla u.\nu$.

2- Nous venons qu'ici "on se fatigue beaucoup pour rien" car on peut montrer que la solution faible de (3.16), (3.17) est dans $H^2(\Omega)$ pour g suffisamment régulière. C'est l'effet régularisant de l'équation elliptique que nous avons déjà souligné avec l'exemple simple du chapitre 1. Par contre cette technique s'applique à toute e.d.p. y compris celles qui ne régularise pas comme par ex. les e.d.p. hyperboliques.

<u>Preuve</u>: Si $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (3.18) alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f, \varphi\rangle.$$

et donc $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow -\Delta u = f$ p.p. dans Ω

Il reste à récupérer la condition aux limites!

Mais contrairement au pb de Dirichlet, cette dernière n'est pas contenue dans l'espace fonctionnel mais dans la formulation faible.
Notons de plus que si $u \in H^1(\Omega)$, rien ne garantit, a priori, que la trace normale du gradient de u, notée $\nabla u \cdot \nu$ ou $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, existe. On va voir que si $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$ alors cette trace existe.
Montrons tout d'abord le résultat suivant.

Lemme : On munit $H^{1/2}(\partial\Omega)$ de la norme

$$\|w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1(\Omega)\\ \gamma(v)=w}} \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

alors $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Banach.

Preuve: Soit $(w_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$

alors $\|w_n - w_p\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1(\Omega)\\ \gamma(v)=w_n-w_p}} \|v\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[n,p\to+\infty]{} 0$.

Mais $\forall v \in H^1(\Omega)$.

$\|\gamma(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$ car γ est continue donc.

$\forall v \in H^1(\Omega)$ tq $\gamma(v) = w_n - w_p$ $\quad \frac{1}{C}\|w_n - w_p\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{C}\|w_n - w_p\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \operatorname*{Inf}_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \gamma(v)=w_n-w_p}} \|v\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[n,p\to+\infty]{} 0.$$

donc $(w_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\partial\Omega)$ qui est complet.
ainsi $\exists w \in L^2(\partial\Omega)$ tel que $w_n \longrightarrow w$ dans $L^2(\partial\Omega)$
Il reste à montrer que $W = \gamma(v)$ avec $v \in H^1(\Omega)$, on commence par montrer que « l'inf est atteint »
Soit $w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors on considère.

$C_w = \{v \in H^1(\Omega);\ \gamma(v) = w\}$ alors C_w est fermé dans $H^1(\Omega)$

(Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ dans $H^1(\Omega)$ et $\gamma(u_n) = w$ $\forall n \geq 0$ alors comme γ est continue $\gamma(u_n) = w \longrightarrow \gamma(u) = w$ donc $u \in C_w \Rightarrow C_w$ fermé)

et C_w est convexe car γ est linéaire.

$\forall v_1, v_2 \in C_w$ et $\theta \in]0,1[$. $\gamma((1-\theta)v_1 + \theta v_2) = (1-\theta)\gamma(v_1) + \theta\gamma(v_2) = w$

On utilise alors le théorème de la projection sur un convexe fermé (61-1)

Rappel: (Thm projection sur un convexe fermé) H Hilbert, $K \subset H$ convexe fermé non vide. Alors $\forall f \in H$, $\exists u \in K$ unique tel que.

$$\|f-u\|_H = \min_{v \in K} \|f-v\|_H.$$

Ici $H = H^1(\Omega)$, $f = 0 \in H^1(\Omega)$, $K = C_w \Rightarrow \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega), \exists!\, u_w \in H^1(\Omega)$ tel que $\|u_w\|_{H^1(\Omega)} = \min_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma(v) = w}} \|v\|_{H^1(\Omega)} = \|w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ $(*)$

On introduit alors le problème $\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{sur } \Omega. \\ u = w & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$

alors la formulation variationnelle de ce problème est

(FV) $\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma u = w \text{ et tel que.} \\ \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx + \int_\Omega u(x) \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$

On note $H_w = \{ v \in H^1(\Omega) ; \gamma(v) = w \}$, alors $\forall G \in H_w$ on a

$\gamma(u - G) = 0$ et $v_G = u - G \in H^1_0(\Omega)$ est solution de.

$$\int_\Omega \nabla v_G \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v_G \varphi\, dx = -\int_\Omega \nabla G \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega G \varphi\, dx.$$

$$\forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

$\Leftrightarrow$ (FV)$_G$ $\begin{cases} v_G \in H^1_0(\Omega) \text{ solution de.} \\ a(v_G, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$

a est clairement bilinéaire continue coercive (sur $H^1_0(\Omega)$), et L est linéaire et continue (exo), de plus a est symmetrique. $a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u, v \in H^1_0(\Omega)$. Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram $\exists!\, v_G \in H^1_0(\Omega)$ satisfaisant (FV)$_G$ de plus

$$a(v_G, v_G) = \|v_G\|^2_{H^1(\Omega)} \overset{C.S}{\leq} \|G\|_{H^1(\Omega)} \|v_G\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|v_G\|_{H^1(\Omega)} \leq \|G\|_{H^1(\Omega)}.$$

et $\frac{1}{2} a(v_G, v_G) - L(v_G) = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \right)$

on pose $u = v_G + G$. alors

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|G\|_{H^1(\Omega)}.$$

et $\frac{1}{2} a(v_G, v_G) - L(v_G) + \frac{1}{2}\|G\|^2_{H^1(\Omega)}$

$$= \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - L(v) + \frac{1}{2}\|G\|^2_{H^1(\Omega)} \right)$$

Mais $\forall v \in H^1_0(\Omega)$. $\frac{1}{2} a(v,v) - L(v) + \frac{1}{2}\|G\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v + G\|^2_{H^1(\Omega)}$

donc. $\|v_G + G\|^2_{H^1(\Omega)} = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \|v + G\|^2_{H^1(\Omega)}$

$$\Leftrightarrow \quad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \min_{v \in H_w} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_w\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi u_w est la solution de (FV) et vérifie donc.

$$\|u_w\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|G\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall G \in H_w$$

$$\Rightarrow \|u_w\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Notons de plus que $\forall w_1, w_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ $u_{w_1 - w_2} = u_{w_1} - u_{w_2}$

car $-\Delta(u_{w_1} - u_{w_2}) + (u_{w_1} - u_{w_2}) = -\Delta u_{w_1} + u_{w_1} - \Delta u_{w_2} + u_{w_2} = 0$

et $\gamma(u_{w_1} - u_{w_2}) = \gamma(u_{w_1}) - \gamma(u_{w_2}) = w_1 - w_2$.

D'après $(*)$ page 61 $\forall n \geq 0$, $\exists !\ v_n = u_{w_n} \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\|u_{w_n}\|_{H^1(\Omega)} = \|w_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

De plus $\forall n, p \geq 0$. $\|u_{w_n} - u_{w_p}\|_{H^1(\Omega)} = \|u_{w_n - w_p}\|_{H^1(\Omega)}$
$= \|w_n - w_p\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \xrightarrow[n,p \to +\infty]{} 0$

Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{w_n})$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ complet et $\exists v \in H^1(\Omega)$ tel que $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} v$ dans $H^1(\Omega)$, γ étant continue on a $\gamma v_n = w_n \longrightarrow \gamma v = w \Rightarrow w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

de plus v est solution de $-\Delta u + u = 0^{\Omega}$ et $u = w$ sur $\partial\Omega$ $\longrightarrow$

donc $v = u_w$. et donc .

$$\|w_n - w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|u_{w-w_n}\|_{H^1(\Omega)} = \|u_w - u_{w_n}\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Ainsi (w_n) converge dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On est en mesure d'établir le résultat suivant :

Théorème 3.7 : Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $\forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, le réel :

$$\alpha(u,w) = \int_\Omega \Delta u(x)\, v_w(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v_w(x)\, dx$$

où $v_w \in H^1(\Omega)$ est tel que $\gamma v_w = w$, ne dépend pas du choix du relèvement de w : v_w.

On note alors $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} : \left(H^{1/2}(\partial\Omega), \|.\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$w \longmapsto \alpha(u,w).$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ est une application linéaire et continue.

i.e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\partial\Omega) = \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$

Rmq : Le théorème 3.7 montre que si $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ existe dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus $\forall v \in H^1(\Omega)$, on a une formule de Green donnée par :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma v \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

Preuve : Soient v_1 et v_2 deux éléments de $H_w = \{ v \in H^1(\Omega) ; \gamma v = w \}$, alors $v_1 - v_2 \in H^1_0(\Omega)$. $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $H^1_0(\Omega)$, $\exists (\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_j \longrightarrow v_1 - v_2$ dans $H^1(\Omega)$.

Alors $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\, \varphi_j + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_j = \langle \Delta u, \varphi_j \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle \nabla u, \nabla \varphi_j \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$

$= \langle \Delta u, \varphi_j \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle \Delta u, \varphi_j \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0.$

De plus

$$\left| \int_\Omega \Delta u\, \varphi_j + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_j - \int_\Omega \Delta u\,(v_1 - v_2) - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v_1 - v_2) \right|$$

$$\overset{C.S}{\leq} \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\varphi_j - (v_1 - v_2)\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

donc $\alpha(u,w)$ est indépendant de v_w.

Ainsi $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ définie dans le Théorème 3.7 est bien une application (à chaque w, une seule image). de plus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est clairement linéaire (exo) et

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \right| \leq \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\forall v \in H_w.$$

$$\Rightarrow \left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w \right\rangle \right| \leq \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) \operatorname*{Inf}_{v \in H_w} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On peut donc revenir à la preuve du théorème 3.6 ; On reprend la formulation faible (3.18)

$$\int \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, \gamma(v) \, d\sigma(x) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

donc $\forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w \right\rangle = \int_\Omega \Delta u . v_w + \int_\Omega \nabla u . \nabla v_w = -\int_\Omega f v_w + \int_\Omega \nabla u . \nabla v_w$$

car $\Delta u = -f$

$$= -\int_\Omega f v_w + \int_\Omega f v_w + \int_{\partial\Omega} g \, \gamma(v_w) \, d\sigma(x).$$

$$= \int_{\partial\Omega} g \, w \, d\sigma(x).$$

Mais $L^2(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$

en effet $\forall g \in L^2(\partial\Omega)$, on définit

$$T_g : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto \int_{\partial\Omega} g w$$

T_g est clairement linéaire

de plus $|T_g(w)| \underset{C.S}{\leq} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|w\|_{L^2(\partial\Omega)}$

$\leq C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

$\forall v \in H_w$.

$\leq C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \underbrace{\operatorname*{Inf}_{v \in H_w} \|v\|_{H^1(\Omega)}}_{\|w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

Mais $g \in L^2(\partial\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ dans L^2

et donc $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ p.p. dans Ω

Nous verrons d'autres cond. aux lim. en TD : exFourier $\lambda u + \nabla u . \nu = g$.

III Régularité de la solution

1°) Cas du Laplacien:

Théorème 3.8: Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de classe C^{k+2} et que $f \in H^k(\Omega)$ (avec $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$).

Soit u tel que $\Delta u \in H^k(\Omega)$ et $u \in H^1_0(\Omega)$, alors

$$u \in H^{k+2}(\Omega)$$

De plus, $\exists\, C > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \, \|\Delta u\|_{H^k(\Omega)}$$

Remarque: Si $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ avec $f \in H^k(\Omega)$

$\Rightarrow u \in H^{k+2}(\Omega)$ et $\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^k(\Omega)}$

(Ω de classe C^k).

Preuve du théorème 3.8:

Pour montrer ce résultat, on utilise la méthode des translations (ou technique des quotients différentiels) due à L. Nirenberg

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, et $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, on pose.

$$D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$

On a alors les résultats suivants :

Lemme 3.2. Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$.

- si $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|D_h v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{2}{|h|} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.21)$$

- si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\cdot\ \nabla(D_h u) = D_h(\nabla u) \quad \text{p.p dans } \mathbb{R}^n. \qquad (3.22)$$

$$\cdot\ D_h u \in H^1(\mathbb{R}^n) \qquad (3.23)$$

$$\cdot\ \|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.24)$$

Preuve : - Etablissons tout d'abord (3.21)
Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ et $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\|D_h v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x+h) - v(x))^2}{|h|^2} dx$$

$$\leq \frac{2}{|h|^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (v(x+h))^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} (v(x))^2 dx \right]$$

On effectue alors le changement de variables $y = x+h$ dans la 1ère intégrale, on obtient (3.21).

- Soit maintenant $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ et $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla(D_h u)(x) = \frac{1}{|h|} (\nabla u(x+h) - \nabla u(x))$$

$$= D_h(\nabla u)(x)$$

ce qui établit (3.22).

Notons alors que d'après (3.21), $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D_h u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

et $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D_h(\nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

et donc $\nabla(D_h u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. donc $D_h u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Il reste à montrer (3.24), pour cela on montre tout d'abord le résultat pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Soit x, h dans $\mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, on pose

$$w(t) = \varphi(x+th) \quad \forall t \in [0,1].$$

φ étant régulière w l'est aussi et

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = w(1) - w(0) = \int_0^1 w'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \nabla\varphi(x+th)\cdot h\,dt.$$

$\Rightarrow$

$$\|D_h\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{|h|}\right)^2 dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |\nabla\varphi(x+th)|^2 \frac{|h|^2}{|h|^2}\,dt\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(x+th)|^2\,dx\,dt$$

on pose $y = x+th \Rightarrow dy = dx$.

$$= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(y)|^2\,dy\,dt = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Maintenant si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\exists\,(\varphi_j)_{j\geq 0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} u$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Alors $\forall j \geq 0$ $\quad \|D_h\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Mais $D_h\varphi_j - D_h u = D_h(\varphi_j - u)$ car D_h est linéaire

et d'après (3.21) $\|D_h(\varphi_j - u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{\frac{2}{|h|}\|\varphi_j - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}_{\to 0 \; j\to+\infty}$

donc $D_h \varphi_j \longrightarrow D_h u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ $\forall h$.

et donc $\| D_h \varphi_j \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \| D_h u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

de plus $\| \nabla \varphi_j \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

donc $\| D_h u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. ■ lemme 3.2

Ces quotients différentiels sont en fait des "taux d'accroissements" et vont nous permettre d'obtenir de la régularité sur les fonctions u de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont les quotients différentiels sont bornés.

<u>Proposition 3.2:</u> Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on suppose qu'il existe $C>0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$

$$\| D_h u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

alors $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C$. $\forall i = 1$ à n.

<u>Preuve:</u> On doit montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $i = 1$ à n, c'est à dire qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x)\, dx.$$

Pour cela il suffit de montrer qu'il existe $\tilde{C} > 0$ telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \right| \leq \tilde{C} \, \| \varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.25)$$

En effet si ceci est vrai, alors on définit

$$T : \left(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \|.\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$$
$$\varphi \longmapsto \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

alors $T(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx$.

et T est linéaire et continue d'après (3.25).

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ on peut prolonger

T en une application linéaire et continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$. donc $T \in \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)'$ alors d'après le Théorème de représentation de Riesz (voir Brézis) $\exists\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que. $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$.

$$T(\varphi) = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx.$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_\Omega g(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Montrons (3.25); $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, on a:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} D_h u(x)\, \varphi(x)\, dx \right| \overset{C.S}{\leq} \|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{par hypothèse sur } u.$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De plus.

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_h u(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \varphi(x)\, dx.$$

$$= -\frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\, dx + \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \varphi(y-h)\, dy$$

$$= \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(\varphi(x-h) - \varphi(x)\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_{-h}\varphi(x)\, dx.$$

On choisit alors $h = te_i$ avec $t \in \mathbb{R}$ et e_i = i-ème vecteur de la base canonique ($e_i = {}^t(0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ i-ème position}}{1}, 0 \dots, 0)$)

alors $$D_{-h}\varphi(x) = \frac{1}{t}\left(\varphi(x - te_i) - \varphi(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{t}\int_{-t}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x + se_i)\, ds.$$

Ainsi

$$\left| D_{-h}\varphi(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| = \left| -\frac{1}{t}\int_{-t}^{0} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x+se_i)\, ds + \frac{1}{t}\int_{-t}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, ds \right|$$

car $\frac{1}{t}\int_{-t}^{0} 1\, ds = 1$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left| D_{-h}\varphi(x) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right| \leq C.\, t$

où C ne dépend pas de t. (car $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ régulière sur compact $\Rightarrow$ global^t lip.)

$$\Rightarrow D_{-h}\varphi \xrightarrow[h = te_i \to 0]{} -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \text{ uniformément (en } x)$$

et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_h u(x)\,\varphi(x)\, dx \xrightarrow[h = te_i \to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\, dx$$

Mais $\left| \int_{\mathbb{R}^n} D_h u\, \varphi\, dx \right| \leq C\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \right| \leq C\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

■ prop. 3.2

Retour à la démonstration du Théorème 3.8

On montre tout d'abord que

$u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega) = H^0(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$

Pour cela, on procède en 3 étapes

1ère étape : $\Omega = \mathbb{R}^n$, 2ème étape : $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, 3ième étape : Ω borné (par cartes locales).

1ère étape : $\Omega = \mathbb{R}^n$

On montre le lemme suivant :

Lemme 3.3 : Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \text{car } \Delta u \in L^2 \\ \| \\ -\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx . \end{aligned}$$

Donc

$$(3.26) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

et par densité (exercice). $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Formellement, on choisit $\varphi = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.

alors.

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2}\, dx = + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

IPP.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx \overset{C.S}{\leq} \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Mais $\left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \right)^{1/2}$

Et alors $\forall i, j = 1$ à n.

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Pour écrire cette démonstration correctement, on utilise les différences divisées

On choisit dans (3.26). $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla \left(D_{-h}(D_h u) \right)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x) D_{-h}(D_h(u))(x) dx$$

Mais $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla (D_{-h}(D_h u))(x)\, dx$.

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot D_{-h}(\nabla D_h(u))(x)\, dx \quad \text{d'après (3.22)}.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} D_h(\nabla u(x)) \cdot \nabla (D_h(u))(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} D_h(\nabla u(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla (D_h(u))^2 dx$$

$$= \|\nabla (D_h(u))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

De plus

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x) D_{-h}(D_h(u))(x)\, dx \overset{C.S}{\leq} \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla (D_h(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

d'après (3.24)

Ainsi

$$\|\overbrace{\nabla(D_h(u))}^{=D_h(\nabla u)}\|^{\cancel{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cancel{\|\nabla(D_h(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}$$

D'après la proposition 3.2, on en déduit $\nabla u \in H^1(\mathbb{R}^n)$

i.e $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et $\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla u) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

<u>Etape 2:</u> $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ x_n > 0\}$.

On montre le résultat suivant:

<u>Lemme 3.4</u> : Soit $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ tel que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ alors $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Rmq</u> : si $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ alors $\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \mathbb{R}^n_+ \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n_- \end{cases}$ $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (cf. chap. 2) par contre rien ne garantit que $\Delta \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et en général ce n'est pas le cas.

<u>Preuve</u> : On note $f = -\Delta u$ et bien sûr on a

$$\forall \varphi \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+), \quad \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^n_+} f \varphi.$$

Formellement, on choisit $\varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, alors

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \left(-\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx + \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, \nu \cdot e_j \, d\sigma(x) \right)$$

où ν est la normale unitaire à $\partial \mathbb{R}^n_+$ extérieure à $\mathbb{R}^n_+$.

$$\nu = (0, \dots, 0, -1).$$

donc $\forall j = 1$ à $n-1$ $e_j = (0, \dots 0, 1, 0 \dots 0, 0) \cdot \nu = 0$.

et ainsi le même raisonnement s'applique et on obtient.

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \quad \forall i = 1 \text{ à } n \text{ et } \forall j = 1 \text{ à } n-1.$$

Seule $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ reste à estimer, pour cela, il suffit de remarquer que.

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f. \text{ et donc}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + (n-1) \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq n \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

Pour justifier ce calcul formel, on utilise encore des quotients différentiels mais dans les directions parallèles à $\partial\mathbb{R}^n_+$.

i.e $\varphi = D_{-h} D_h u$ avec $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $h.\nu = 0$.

i.e $h \parallel \partial\mathbb{R}^n_+$.

Il faut remarquer que $u \in H^1_0(\Omega) \Rightarrow D_h(u) \in H^1_0(\Omega)$

$\forall h \in \mathbb{R}^n$ tq $h.\nu = 0$

et que le Lemme 3.2 et la proposition 3.2 restent vrais; i.e.

<u>Lemme 3.5</u>: $\forall h \in \mathbb{R}^n$; $h \neq 0$ et $h.e_n = 0$ où $e_n = (0,\dots,0,1)$ est le $n^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors.

- $\forall v \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

$$\|D_h v\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \frac{2}{|h|} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

- $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.
  - $\nabla(D_h u) = D_h(\nabla u)$ p.p dans $\mathbb{R}^n_+$.
  - $D_h u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.
  - $\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$
  - $\gamma(u) = 0 \Rightarrow \gamma(D_h u) = 0$

<u>Proposition 3.3</u>: $u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, si $\exists C > 0$ tq.

$\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $h.e_n = 0$.

$$\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C.$$

alors $\forall i = 1$ à $n-1$.

- $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ et $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$.

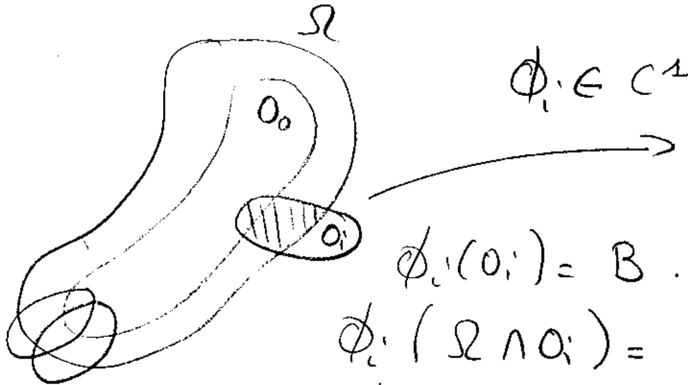
3ème étape : Ω borné de classe C^1.

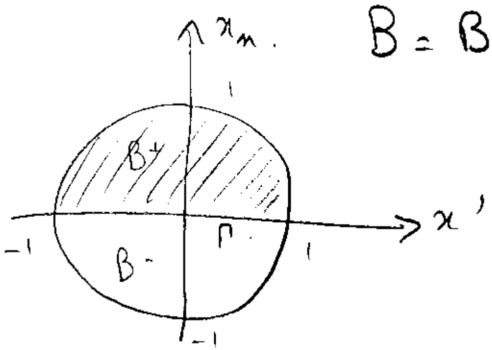
On veut montrer le résultat suivant :

$u \in H^1_0(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$.

On procède par cartes locales en introduisant une partition de l'unité, on se ramène aux étapes 2 et 3.

$B = B^+ \cup \Gamma \cup B^-$





$\phi_i(O_i) = B$.

$\phi_i(\Omega \cap O_i) = B^+$ $\qquad i = 1$ à I.

$\phi_i(O_i \cap \partial\Omega) = \Gamma$

On introduit une partition de l'unité.

- $\forall i = 0$ à I $\quad \theta_i \in C^\infty_c(O_i)$ et $0 \leq \theta_i \leq 1$.
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{I} \theta_i(x) = 1$.

alors $u = \displaystyle\sum_{i=0}^{I} \theta_i u$.

Il reste à montrer que chaque $\theta_i u \in H^2(O_i)$.

Remarquons que $\theta_i u \in H^1_0(O_i)$ car $\theta_i \in C^\infty_c(O_i)$

et $\Delta(\theta_i u) = \Delta\theta_i\, u + 2\nabla\theta_i \cdot \nabla u + \theta_i \Delta u \in L^2(O_i \cap \Omega)$

Notons alors que $\theta_0 u$ prolongé par 0 en dehors de O_0, noté $\widetilde{\theta_0 u}$, vérifie $\widetilde{\theta_0 u} \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta \widetilde{\theta_0 u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow \widetilde{\theta_0 u} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et donc $\theta_0 u \in H^2(O_0)$.

Par contre le même raisonnement ne s'applique pas à $\theta_i u$, pour $i = 1$ à I, car O_i n'est pas inclu dans Ω.

En utilisant les cartes locales on se ramène à B^+.

on pose $w = (\theta_i u) \circ \phi_i$ alors $w \in H^1_0(B)$.

mais $\gamma(w)_{|\Gamma} \neq 0$.

Alors on peut montrer que prolongé par 0 en dehors de B ou $\tilde{w}$.
$\tilde{w} \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ et $\tilde{w}$ vérifie une équation elliptique.
(qui n'est pas le Δ => il faut refaire étape 2. pour $\mathcal{L}$.
= opérateur elliptique général) mais cela marche quand même.

Pour récupérer les estimations $u \in H^k$, $k > 2$, on raisonne par récurrence.
Ce que l'on a fait précédemment initialise la récurrence.
il reste à montrer l'hérédité.

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta u = f \in H^{k-1} \\ u \in H^1_0(\Omega) \cap H^k(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

<u>Idée:</u> $k = 2 \Rightarrow k = 3$

si $u \in H^2(\Omega)$ alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ $\forall i = 1$ à n.

et $-\Delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.