

**Cours de Master 1ère année Filière : Ingénierie Mathématique à
Toulouse
Université Paul Sabatier**

Modélisation, équations aux dérivées partielles, 16h de cours, 16h de TDs

1^{er} février 2013

Marie Hélène Vignal

Université Paul Sabatier, UPS,
Institut de mathématiques de Toulouse, MIP,
118 route de Narbonne,
31 Toulouse cedex 9.

mhvignal@math.univ-toulouse.fr

Table des Matières

1	Introduction	5
1.1	Généralités	5
1.2	Niveau de description : hypothèse de continuité du milieu	5
1.3	Principes de base	6
1.4	Fluides ou solides	6
1.5	Référentiel et repère	6
2	Concepts généraux pour les milieux continus	9
2.1	Configuration du système et repérage	9
2.2	Définition du mouvement, description Lagrangienne	9
2.2.1	Définition	9
2.2.2	Vitesse et accélération d'une particule	10
2.3	Description Eulerienne du mouvement d'un milieu continu	10
2.3.1	Définition	10
2.3.2	Passage en description Lagrangienne	11
2.3.3	Mouvements stationnaires (ou permanents)	11
2.3.4	Dérivée Lagrangienne (ou particulaire) d'une quantité Eulerienne	11
3	Lois de conservation	13
3.1	Notations	13
3.2	Equation de conservation de la masse	14
3.3	Equation de conservation de la quantité de mouvement	17
3.3.1	Introduction	17
3.3.2	Tenseur des contraintes	18
3.3.3	Forme locale de la conservation de la quantité de mouvement	19
3.4	Equation de conservation de l'énergie	20
3.5	Bilan des équations de conservation	22
4	Différents modèles	25
4.1	Modèles fluides	25
4.1.1	Forme du tenseur des contraintes intérieures au fluide	25
4.1.2	Equations de Navier-Stokes compressible	26
4.1.3	Equations d'Euler compressible	27
4.1.4	Equations de Navier-Stokes incompressible	27
4.1.5	Equations de Stokes	28
4.1.6	Equations d'Euler incompressible	28
4.1.7	Lois d'état des gaz parfaits	29
4.1.8	Classification des modèles	31
4.1.8.1	Le nombre de Reynolds : de Stokes à Euler	31
4.1.8.2	Vitesse du son dans un fluide	37

4.1.8.3	Nombre de Mach, du compressible vers l'incompressible	39
4.1.9	Conclusions pour les modèles fluides	40
4.2	Equations de l'élasticité linéaire : solide déformable	40
5	Les équations de Maxwell	41
	Bibliographie	43
6	exercices	45

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

Ce cours a pour but de présenter des modèles mathématiques classiquement utilisés par les ingénieurs pour décrire certains phénomènes physiques. Je me suis beaucoup inspirée des très bons cours de

- Patrick Huère, “Mécanique des milieux continus, Tome 3, Mécanique des fluides”, cours de l’Ecole Polytechnique, [5].
- Jean-Yves Plantec, “Introduction à la mécanique des milieux continus”, cours INSA, [6].
- Jean-Pierre Raymond, “Modélisation-EDP”, cours Master 1 IMAT, Université Toulouse 3, [8].
- Jean Salençon, “Mécanique des milieux continus, Tome 1, Concepts généraux”, cours de l’Ecole Polytechnique, [9].

Le domaine de la modélisation est très vaste, il n’est donc pas envisageable de décrire l’ensemble des modèles utilisés. Ceci d’autant plus que chaque phénomène étudié appelle une modélisation différente. Toutefois, il est possible, sur un plan physique, d’identifier et donc de modéliser au sein d’une extrême diversité de comportements, quelques propriétés et caractères basiques communs à plusieurs dispositifs.

1.2 Niveau de description : hypothèse de continuité du milieu

La physique moléculaire nous explique que chaque milieu (solides, liquides ou gazeux) est constitué de molécules qu’on peut décider de décrire individuellement. Mais lorsqu’on cherche à modéliser un écoulement de lave, une avalanche, une vague qui déferle, la déformation d’un pneu, la structure d’un avion ou d’un pont de béton, ... on se convainc aisément qu’on peut considérer la matière comme un milieu continu. Ceci parce que le niveau de description qu’on choisit est suffisamment macroscopique pour le faire.

Je me limiterai dans ce cours aux milieux dits continus et je ne m’intéresserai pas aux milieux dits raréfiés pour lesquels les échelles de longueur du phénomène sont du même ordre que la distance inter-atomique. C’est le cas, par exemple, dans les écoulements à très grandes vitesses en haute atmosphère, dans l’écoulement d’un flux sanguin dans un vaisseau, dans l’étude des nanotechnologies, ...

L’étude des milieux continus repose sur l’hypothèse fondamentale qu’à l’échelle d’observation choisie, on peut supposer qu’en tout point du milieu et à tout instant, il est possible de définir des fonctions telles que la masse volumique, la température, la vitesse, la pression. Il n’est donc pas nécessaire de suivre l’évolution de chaque molécule physique et on suppose que le milieu est constitué de “particules” comportant un grand nombre de molécules et occupant un volume négligeable à l’échelle macroscopique d’observation.

On peut quantifier cette notion d'un point de vue mathématique. On note l l'échelle microscopique (distance inter-atomique) et L l'échelle macroscopique (échelle d'observation). On introduit alors le nombre de Knüdsen :

$$K_n = \frac{l}{L}$$

Un milieu se comporte alors comme un milieu continu si

$$K_n \ll 1.$$

1.3 Principes de base

Précisons un peu le vocabulaire. On appelle système un ensemble S de particules (ou points matériels). Ce système peut prendre au cours du temps une apparence différente. On cherche alors à connaître l'état du système S d'un point de vue mécanique et thermodynamique lorsque le système est en mouvement et soumis à un certain nombre de sollicitations extérieures d'ordre :

- mécanique (forces de contact ou de volume,...)
- thermique (par contact, par radiation, ...)

On cherche à apprécier l'état du système au travers, d'une part, de paramètres mécaniques de position, vitesse et accélération et à travers les paramètres de quantités de mouvement, d'énergie cinétique de chacune de ses particules, d'autre part, à travers des paramètres thermodynamiques tels que la pression, la masse volumique, l'énergie interne en chacun de ses points. Ces influences sont gouvernées par un ensemble de principes, appelés lois de conservation de la mécanique des milieux continus et qui sont au nombre de quatre :

- la conservation de la masse,
- la conservation de la quantité de mouvement (ou Loi fondamentale de la dynamique classique),
- la conservation de l'énergie (ou Premier principe de la thermodynamique),
- le second principe de la thermodynamique, servant à constater l'impossibilité que l'on a à réaliser certaines transformations. Il est donné par une inégalité et traduit la croissance de l'entropie, l'augmentation du désordre.

1.4 Fluides ou solides

Dans les milieux continus, on distingue classiquement les milieux fluides et les milieux solides (déformables ou non). Les fluides se composent des liquides et des gaz. Ils sont régis par les mêmes lois fondamentales de la mécanique des fluides. Ils se différencient essentiellement par leur compressibilité. Un gaz est plus compressible qu'un liquide. C'est à dire que lors de variations de pression, les variations de masse volumique sont beaucoup plus grandes dans un gaz. Toutefois, malgré ces différences, les mêmes modèles peuvent être utilisés.

1.5 Référentiel et repère

Enfin, pour terminer cette introduction, nous allons parler de référentiel et de repères : deux notions très distinctes. En effet, la formulation mathématique de phénomènes physiques nécessite de repérer dans l'espace et au cours du temps le système étudié.

Expliquons tout d'abord la notion de référentiel. Le référentiel est l'espace entrainé par l'observateur. Choisissons, par exemple, l'exemple du système d'un train dans une gare et supposons

que le train soit en mouvement. Si l'observateur est dans le train, alors un passager assis dans le train est immobile, sa vitesse est nulle. Pour cet observateur la gare est en mouvement! Maintenant, si l'observateur est sur le quai de la gare, alors ce même passager assis est en mouvement et sa vitesse est non nulle, elle est égale à la vitesse du train. Pour cet observateur la gare est immobile. On voit ainsi que le choix du référentiel est très important.

Lorsque le référentiel est choisi, on fixe un repère dans le référentiel pour déterminer la position de chaque point. On peut changer de repère sans changer de référentiel. Pour revenir à l'exemple du train dans la train, changer de repère dans le référentiel lié à un passager du train revient à changer la position de l'observateur.

On suppose par la suite que le référentiel \mathcal{R} est fixé. On suppose de plus l'échelle de temps fixée. l'instant initial est noté t_0 .

Chapitre 2

Concepts généraux pour les milieux continus

2.1 Configuration du système et repérage

L'ensemble des particules ou points matériels constituant le système étudié occupe, à chaque instant $t \geq t_0$, un ensemble de positions dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 : c'est la configuration du système à l'instant t , notée $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$.

Plus généralement, on entendra par configuration du système, l'ensemble des position spatiales mais aussi la donnée des grandeurs physiques concernant le système dans cette configuration (par exemple : masse volumique, vitesse, pression, ...)

On appelle configuration actuelle du système, la configuration Ω_t correspondant à l'instant courant t . On introduit aussi la notion de configuration de référence, ou configuration initiale : c'est la configuration particulière Ω_{t_0} à l'instant t_0 . On notera souvent $\Omega_{t_0} = \Omega_0$ car en général $t_0 = 0$.

On suppose que le repère est direct et orthonormé $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Le repérage de la configuration Ω_t du système S dans le référentiel \mathcal{R} et le repère R peut se faire au moyen du vecteur-position OM , noté aussi M , qui précise la position de chaque particule du système à partir de l'origine O .

On note X ou (x, y, z) les coordonnées des vecteurs positions M de Ω_t . On note X_0 ou (x_0, y_0, z_0) celles des vecteurs positions M_0 de Ω_0 .

2.2 Définition du mouvement, description Lagrangienne

2.2.1 Définition

Pour définir le mouvement d'un système, on peut se donner une configuration de référence Ω_0 à l'instant initial t_0 et ensuite donner à chaque instant t l'expression du vecteur position X dans Ω_t de la particule située en X_0 à l'instant t_0 . On définit

$$X = \phi(X_0, t_0; t).$$

Ainsi, une particule du système occupant la position $X_0 \in \Omega_0$ à l'instant t_0 occupera la position $X = \phi(X_0, t_0; t) \in \Omega_t$ à l'instant t .

On "suit" chacunes des particules du système, on dit qu'on se donne une description Lagrangienne du système.

Pour que cette description représente bien le mouvement d'un milieu continu, on impose à la fonction ϕ de satisfaire les conditions mathématiques suivantes :

1. L'application $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ est bijective pour tout t et tout t_0 dans \mathbb{R} . On note $X_0 \mapsto \phi(X_0, t_0; t)$ ϕ^{-1} sa réciproque et ainsi pour tout t et t_0 dans \mathbb{R} et tout $X_0 \in \Omega_0$ et $X \in \Omega_t$

$$X = \phi(X_0, t_0; t) \Leftrightarrow X_0 = \phi^{-1}(X, t; t_0).$$

2. ϕ et ϕ^{-1} sont continues par rapport à l'ensemble des variables d'espace et de temps.
3. ϕ et ϕ^{-1} sont en général supposées de classe C^1 voire C^2 .

Remarque 2.1 1. L'hypothèse de surjection est faite pour qu'en chaque point du domaine il y ait une particule et donc que le milieu soit continu. L'hypothèse d'injectivité signifie que deux particules initialement en des points différents ne peuvent être en des points identiques.

2. L'hypothèse de continuité impose que deux particules initialement infiniment proches restent en tout temps, infiniment proches.

Je termine par quelques propriétés élémentaires.

1. $\forall t, \forall X \in \Omega_t$, on a $\phi(X, t; t) = X$ soit encore $\phi(\cdot, t; t) = \text{Id}_{\Omega_t}$.
2. Pour tout t_1, t_2, t_3 et tout $X_1 \in \Omega_{t_1}$, on a $\phi(\phi(X_1, t_1; t_2), t_2; t_3) = \phi(X_1, t_1; t_3)$ soit encore $\phi(\cdot, t_2; t_3) \circ \phi(\cdot, t_1; t_2) = \phi(\cdot, t_1; t_3)$.
3. Pour tout t_1, t_2 et tout $X_2 \in \Omega_{t_2}$, on a $\phi(\phi(X_2, t_2; t_1), t_1; t_2) = X_2$ soit encore $\phi(\cdot, t_1; t_2) \circ \phi(\cdot, t_2; t_1) = \text{Id}_{\Omega_{t_2}}$.

2.2.2 Vitesse et accélération d'une particule

La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps, ainsi

$$u(X, t) = \frac{\partial M}{\partial t},$$

soit encore

$$u(\phi(X_0, t_0; t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t),$$

où $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ est la dérivée partielle de ϕ par rapport à sa cinquième variable t .

Si X est la position de la particule au temps t , alors $X = \phi(X_0, t_0; t)$ et

$$u(X, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X, t; t) \left(\neq \frac{d}{dt}(\phi(X, t; t)) \right).$$

De même, l'accélération est donnée par

$$\gamma(X, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(X_0, t_0; t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(X, t; t) = \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\phi(X_0, t_0; t), t).$$

Nous verrons que connaissant la vitesse, nous serons capables de déterminer la position ϕ .

2.3 Description Eulerienne du mouvement d'un milieu continu

2.3.1 Définition

La description Eulerienne du mouvement d'un système S dans le référentiel \mathcal{R} consiste à se donner à chaque instant t et en tout point du domaine Ω_t , l'expression de la vitesse u des particules :

$$u(X, t) \in \mathbb{R}^3, \forall X \in \Omega_t, \forall t.$$

2.3.2 Passage en description Lagrangienne

On a vu au paragraphe 2.2.2 comment définir la vitesse quand on connaît la position ϕ dans la description Lagrangienne. Nous allons voir que connaissant la vitesse, on peut définir ϕ .

Remarquons que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t) = u(\phi(X_0, t_0; t), t), \forall t, \\ \phi(X_0, t_0; t_0) = X_0. \end{cases}$$

On a donc un système différentiel de Cauchy qui d'après le Théorème de Cauchy- Liptschitz, sous réserve de régularité sur u , admet une unique solution. On sait donc passer de la description Eulerienne à la description Lagrangienne.

Pour déterminer u , nous verrons qu'on peut écrire les équation de Newton

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_i \vec{F}_i,$$

où m est la masse de la particule et où les \vec{F}_i sont les forces exercées sur la particule.

2.3.3 Mouvements stationnaires (ou permanents)

Un mouvement est dit stationnaire si dans sa description Eulerienne u est indépendante de t , on a alors

$$u(X, t) = u(X), \forall X \in \Omega_t, \forall t.$$

Notons qu'en description Lagrangienne, cela s'écrit

$$u(\phi(X_0, t_0; t), t) = u(\phi(X_0, t_0; t)), \forall X \in \Omega_t, \forall t.$$

Ainsi, la vitesse est constante par rapport au temps, toutefois elle varie dans le domaine. Les particules se déplaçant dans le domaine au cours du temps, la vitesse d'une particule donnée change au cours du temps bien que le mouvement soit dit stationnaire! On précise cette remarque avec la notion de dérivée Lagrangienne dans le paragraphe suivant.

2.3.4 Dérivée Lagrangienne (ou particulaire) d'une quantité Eulerienne

On considère une fonction réelle

$$\begin{aligned} b : \Omega_t \times [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, t) &\mapsto b(X, t) \end{aligned}$$

La dérivée partielle de b par rapport à t , notée $\partial_t b = \frac{\partial b}{\partial t}$, mesure les variations de b au cours du temps en un point donné du domaine.

On passe en variable Lagrangienne, on considère une particule à la position $X_0 \in \Omega_0$ à l'instant initial t_0 , elle sera à la position $X = \phi(X_0, t_0; t)$ à l'instant t . Les variations de b au cours du temps pour cette particule sont données par les variations de b en temps et celles liées au mouvement de la particule dans le domaine. Mathématiquement cela s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\phi(X_0, t_0; t), t \right) &= \partial_t b(\phi(X_0, t_0; t), t) + \nabla_X b(\phi(X_0, t_0; t), t) \cdot \partial_t \phi(X_0, t_0; t), \\ &= \partial_t b(\phi(X_0, t_0; t), t) + \nabla_X b(\phi(X_0, t_0; t), t) \cdot u(\phi(X_0, t_0; t), t), \end{aligned}$$

où $\nabla_X b \in \mathbb{R}^3 = (\partial_x b, \partial_y b, \partial_z b)^T$ est le gradient de b par rapport à X , en notant $X = (x, y, z)^T$.

La quantité $\frac{d}{dt} \left(b(\phi(X_0, t_0; t), t) \right)$ est appelée la dérivée Lagrangienne ou particulière de b . Cette quantité est souvent notée dans la littérature

$$\frac{Db}{DT}(X, t) = \partial_t b(X, t) + \nabla_X b(X, t) \cdot u(X, t), \quad \forall X \in \Omega_t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 3

Lois de conservation

On précise tout d'abord certaines notations.

3.1 Notations

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, on considère

$$\begin{aligned} b : \Omega \times [t_0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, t) &\mapsto b(X, t) \end{aligned}$$

On rappelle qu'on note $X = (x, y, z)^T$ les coordonnées de X , $\partial_t b$ ou $\frac{\partial b}{\partial t}$ la dérivée partielle de b par rapport à t , $\nabla_X b = (\partial_x b, \partial_y b, \partial_z b)^T \in \mathbb{R}^3$ son gradient en X . De plus on note $\Delta_X b = \partial_x^2 b + \partial_y^2 b + \partial_z^2 b$ son Laplacien.

Pour toute fonction vectorielle

$$\begin{aligned} u : \Omega \times [t_0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, t) &\mapsto u(X, t) = \begin{pmatrix} u_x(X, t) \\ u_y(X, t) \\ u_z(X, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on note $\nabla_X \cdot u = \text{div} u = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z \in \mathbb{R}$ la divergence de u et $\nabla_X u$ sa matrice Jacobienne 3×3 donnée par

$$\nabla_X u = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x & \partial_z u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y & \partial_z u_y \\ \partial_x u_z & \partial_y u_z & \partial_z u_z \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\Delta_X u$ le vecteur du Laplacien de chacune de ses composantes : $(\Delta_X u_x, \Delta_X u_y, \Delta_X u_z)^T$. Pour toutes fonctions vectorielles u et v , on note $u \otimes v \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ le produit tensoriel de u et v , il est défini par :

$$u \otimes v = u v^T = \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{pmatrix}$$

Enfin pour toute fonction matricielle (ou tensorielle)

$$\begin{aligned} A : \Omega \times [t_0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ (X, t) &\mapsto u(X, t) = \begin{pmatrix} A_{11}(X, t) & A_{12}(X, t) & A_{13}(X, t) \\ A_{21}(X, t) & A_{22}(X, t) & A_{23}(X, t) \\ A_{31}(X, t) & A_{32}(X, t) & A_{33}(X, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On appelle divergence en X de A , notée $\nabla_X \cdot A$ ou $\text{div}A$ le vecteur défini par

$$\nabla_X \cdot A = \begin{pmatrix} \partial_x A_{11}(X, t) + \partial_y A_{12}(X, t) + \partial_z A_{13}(X, t) \\ \partial_x A_{21}(X, t) + \partial_y A_{22}(X, t) + \partial_z A_{23}(X, t) \\ \partial_x A_{31}(X, t) + \partial_y A_{32}(X, t) + \partial_z A_{33}(X, t) \end{pmatrix}$$

3.2 Equation de conservation de la masse

Qu'on soit avec un fluide ou un solide, la masse est conservée au cours du temps. C'est la première loi que nous allons exploiter, elle est le fondement de la mécanique classique. L'expression de la conservation de la masse dans le domaine au cours du temps s'exprime sous la forme suivante :

Théorème 3.1 *On suppose qu'à l'instant t , le système occupe un domaine $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ et que de plus la description Lagrangienne du système, ϕ , est de classe C^2 ainsi que sa réciproque ϕ^{-1} . On note $\rho(X, t) \in \mathbb{R}^+$ et $u(X, t) \in \mathbb{R}^3$ la masse volumique et la vitesse du milieu continu qu'on veut décrire.*

Alors l'équation locale de conservation de la masse (ou équation de continuité) est donnée par

$$\partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u(X, t)) = 0, \quad (3.1)$$

pour presque tout $X \in \Omega_t$ et tout $t > t_0$. Si de plus, ρu est de classe C^1 et si Ω_t est borné et de classe C^1 , alors la forme intégrale de la conservation de la masse est donnée par

$$\int_{\Omega_t} \partial_t \rho(X, t) dX + \int_{\partial\Omega_t} \rho(X, t) u(X, t) \cdot n(X, t) d\mu(X) = 0, \quad (3.2)$$

pour tout $t > t_0$ et où $\partial\Omega_t$ est la frontière de Ω_t , n est la normale unitaire à $\partial\Omega_t$ extérieure à Ω_t et $d\mu(X)$ est la mesure 2-dimensionnelle induite par la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^3 .

Preuve du Théorème 3.1 : Pour tout t , la masse totale dans le domaine est donnée par

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX.$$

La conservation de la masse s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(t) = 0.$$

Notons que

$$\Omega_t = \left\{ \phi(X_0, t_0; t); X_0 \in \Omega_0 \right\},$$

de plus par définition de la vitesse, on a :

$$u(\phi(X_0, t_0; t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t),$$

et

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, t_0; t) : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ X_0 &\mapsto X = \phi(X_0, t_0; t) \end{aligned}$$

est bijective. Mais ϕ et ϕ^{-1} étant de classe C^1 , ϕ est un changement de variables. On note $J_\phi(X_0, t_0; t)$ la jacobienne de ϕ au point X_0 . En notant $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ les composantes de X_0 et ϕ , on a alors

$$J_\phi(X_0, t_0; t) = D_{X_0}\phi(X_0, t_0; t) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0}\phi_x & \partial_{y_0}\phi_x & \partial_{z_0}\phi_x \\ \partial_{x_0}\phi_y & \partial_{y_0}\phi_y & \partial_{z_0}\phi_y \\ \partial_{x_0}\phi_z & \partial_{y_0}\phi_z & \partial_{z_0}\phi_z \end{pmatrix} (X_0, t_0; t).$$

Alors

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\Omega_{t_0}} \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) |\det(J_\phi(X_0, t_0; t))| dX_0.$$

Et puisque ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^2 , le jacobien est dérivable et la conservation de la masse s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{M}(t) = \int_{\Omega_{t_0}} \left\{ \left[\partial_t \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) + \nabla_X \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \cdot \partial_t \phi(X_0, t_0; t) \right] |\det(J_\phi(X_0, t_0; t))| \right. \\ \left. + \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \partial_t |\det(J_\phi(X_0, t_0; t))| \right\} dX_0 = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la vitesse, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_0}} \left\{ \left[\partial_t \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) + \nabla_X \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \cdot u(\phi(X_0, t_0; t), t) \right] |\det(J_\phi(X_0, t_0; t))| \right. \\ \left. + \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \partial_t |\det(J_\phi(X_0, t_0; t))| \right\} dX_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

On montre alors le résultat suivant

Lemme 3.2 *Si ϕ est de classe C^2 alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $X_0 \in \Omega_0$*

$$\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) > 0, \quad \forall t.$$

de plus J_ϕ satisfait

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) \right) = \nabla_X \cdot u(\phi(X_0, t_0; t), t) \det(J_\phi(X_0, t_0; t)), & \forall t, \\ \det(J_\phi(X_0, t_0; t_0)) = 1. \end{cases}$$

Preuve du Lemme : (A faire sous forme d'exercice)

Commençons par la condition initiale. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $X_0 \in \Omega_0$, on a

$$\phi(X_0, t_0; t_0) = X_0.$$

Ainsi $\phi(\cdot, t_0; t_0) = \text{Id}_{\Omega_0}$ et donc $J_\phi(X_0, t_0; t_0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\det(J_\phi(X_0, t_0; t_0)) = 1$.

Montrons maintenant que $\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) > 0, \forall t$.

L'application ϕ est un difféomorphisme de Ω_0 dans Ω_t , c'est à dire une bijection différentiable telle que son inverse est différentiable. On a d'ailleurs

$$D_{X_0}(\phi^{-1})(\phi(X_0, t_0; t)) = \left(D_{X_0}\phi(X_0, t_0; t) \right)^{-1}, \quad \forall X_0 \in \Omega_0.$$

Ainsi, $J_\phi = D_{X_0}\phi$ est inversible et donc $\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) \neq 0$.

Mais $\phi(\cdot, t_0; t)$ étant de classe C^1 , $\det(J_\phi(X_0, t_0; t))$ est continue pour tout t_0 et t . Une fonction continue ne s'annulant pas est de signe constant et $\det(J_\phi(X_0, t_0; t_0)) = 1 > 0$.

Il reste à établir l'équation différentielle. Nous allons le faire en dimension 2 pour se convaincre que cela fonctionne, la dimension 3 est laissée en exercice! On a donc $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\phi = (\phi_x, \phi_y) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \det(J_\phi(X_0, t_0; t)) &= \begin{vmatrix} \partial_{x_0} \phi_x(X_0, t_0; t) & \partial_{y_0} \phi_x(X_0, t_0; t) \\ \partial_{x_0} \phi_y(X_0, t_0; t) & \partial_{y_0} \phi_y(X_0, t_0; t) \end{vmatrix}, \\ &= \partial_{x_0} \phi_x(X_0, t_0; t) \partial_{y_0} \phi_y(X_0, t_0; t) - \partial_{x_0} \phi_y(X_0, t_0; t) \partial_{y_0} \phi_x(X_0, t_0; t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(J_\phi(X_0, t_0; t)) &= \partial_{t x_0}^2 \phi_x(X_0, t_0; t) \partial_{y_0} \phi_y(X_0, t_0; t) + \partial_{x_0} \phi_x(X_0, t_0; t) \partial_{t y_0}^2 \phi_y(X_0, t_0; t) \\ &\quad - \partial_{t x_0}^2 \phi_y(X_0, t_0; t) \partial_{y_0} \phi_x(X_0, t_0; t) - \partial_{x_0} \phi_y(X_0, t_0; t) \partial_{t y_0}^2 \phi_x(X_0, t_0; t). \end{aligned}$$

Mais, $u = (u_x, u_y)$ et $\partial_t \phi(X_0, t_0; t) = u(\phi(X_0, t_0; t), t)$, alors

$$\begin{aligned} \partial_{t x_0}^2 \phi_x(X_0, t_0; t) &= \partial_{x_0} (\partial_t \phi_x(X_0, t_0; t)) = \partial_{x_0} (u_x(\phi(X_0, t_0; t), t)) \\ &= \partial_x u_x(\phi(X_0, t_0; t), t) \partial_{x_0} \phi_x(X_0, t_0; t) + \partial_y u_x(\phi(X_0, t_0; t), t) \partial_{x_0} \phi_y(X_0, t_0; t). \end{aligned}$$

En procédant de même sur les quatre termes, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) \right) &= \partial_x u_x \partial_{x_0} \phi_x \partial_{y_0} \phi_y + \partial_y u_x \partial_{x_0} \phi_y \partial_{y_0} \phi_y + \partial_{x_0} \phi_x \partial_x u_y \partial_{y_0} \phi_x + \partial_{x_0} \phi_x \partial_y u_y \partial_{y_0} \phi_y \\ &\quad - \partial_x u_y \partial_{x_0} \phi_x \partial_{y_0} \phi_x - \partial_y u_y \partial_{x_0} \phi_y \partial_{y_0} \phi_x - \partial_{x_0} \phi_y \partial_x u_x \partial_{y_0} \phi_x - \partial_{x_0} \phi_y \partial_y u_x \partial_{y_0} \phi_y, \\ &= \left(\partial_x u_x + \partial_y u_y \right) \left(\partial_{x_0} \phi_x \partial_{y_0} \phi_y - \partial_{x_0} \phi_y \partial_{y_0} \phi_x \right) = \nabla_X \cdot u(\phi(X_0, t_0; t), t) \det(J_\phi(X_0, t_0; t)). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.2.

On peut maintenant terminer celle du Théorème 3.1

On reprend l'équation (3.3) et on insère l'expression de la dérivée du jacobien donnée par le Lemme 3.2, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_0}} \left[\partial_t \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) + \nabla_X \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \cdot u(\phi(X_0, t_0; t), t) \right. \\ \left. + \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \nabla_X \cdot u(\phi(X_0, t_0; t), t) \right] |\det(J_\phi(X_0, t_0; t))| dX_0 = 0. \end{aligned}$$

On utilise alors le changement de variables inverse ϕ^{-1} , on obtient

$$\int_{\Omega_t} \left[\partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \rho(X, t) \cdot u(X, t) + \rho(X, t) \nabla_X \cdot u(X, t) \right] dX = 0,$$

soit encore

$$\int_{\Omega_t} \left[\partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \cdot \left(\rho(X, t) u(X, t) \right) \right] dX = 0. \quad (3.4)$$

Notons alors que ce raisonnement peut être fait sur n'importe quel sous ensemble $\omega_t \subset \Omega_t$ issu d'un sous-ensemble ω_0 de Ω_0 . En particulier sur toute boule ouverte B contenue dans Ω_t . On peut alors appliquer le résultat d'intégration suivant, que nous admettrons.

Théorème 3.3 *Si φ est une application intégrable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) et si pour toute boule ouverte $B \subset \Omega$, on a*

$$\int_B \varphi(X) dX = 0,$$

alors $\varphi(X) = 0$ pour presque tout $X \in \Omega$.

En appliquant ce résultat à (3.4), on obtient la version locale de l'équation de la masse, c'est à dire l'équation suivante

$$\partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u(X, t)) = 0,$$

pour presque tout $X \in \Omega_t$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour établir la version intégrale de la conservation de la masse, il suffit d'utiliser la formule de Green, dans l'équation (3.4), puisque

$$\int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u(X, t)) dX = \int_{\partial\Omega_t} \rho(X, t) u(X, t) \cdot n(X, t) d\mu(X) = 0.$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1. On termine ce paragraphe avec une définition de milieu incompressible.

Définition 3.4 *Un milieu est dit incompressible, si au cours du mouvement des points matériels le domaine reste inchangé, c'est à dire si*

$$\Omega_t = \Omega_0.$$

On a alors, $\phi(\cdot, t_0; t) = Id_{\Omega_0}$ et donc $J_\phi(X_0, t_0; t) = Id_{\mathbb{R}^3}$ et $\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) = 1$, le Lemme 3.2, nous donne alors

$$\nabla_X \cdot u(X, t) = 0,$$

pour tout $X \in \Omega_t$ et tout t .

3.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement

3.3.1 Introduction

L'équation de conservation de la quantité de mouvement découle de la loi fondamentale de la mécanique de Newton :

$$m \vec{\gamma} = \sum_i \vec{F}_i,$$

où m est la masse, $\vec{\gamma}$ est l'accélération, les \vec{F}_i sont les forces exercées sur le système considérée. Si la masse change au cours du temps, cette équation devient

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i,$$

où $\vec{p} = m \vec{u}$ est la quantité de mouvement.

Dans le cas de notre milieu continu, on a

Lemme 3.5 *On suppose qu'à l'instant t , le système occupe un domaine $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ et que de plus la description Lagrangienne du système, ϕ , est de classe C^2 ainsi que sa réciproque ϕ^{-1} . On note $\rho(X, t) \in \mathbb{R}^+$ et $u(X, t) \in \mathbb{R}^3$ la masse volumique et la vitesse du milieu continu qu'on veut décrire.*

La quantité de mouvement du système est donnée par

$$\vec{p} = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) u(X, t) dX.$$

De plus

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[\partial_t (\rho(X, t) u(X, t)) + \nabla_X (\rho(X, t) u \otimes u(X, t)) \right] dX.$$

Preuve : Un raisonnement analogue à celui appliqué à \mathcal{M} dans le paragraphe précédent, sur chacune des composantes de \vec{p} nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \int_{\Omega_t} \left[\partial_t (\rho(X, t) u(X, t)) + \begin{pmatrix} \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u_x(X, t) u(X, t)) \\ \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u_y(X, t) u(X, t)) \\ \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u_z(X, t) u(X, t)) \end{pmatrix} \right] dX, \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\partial_t (\rho(X, t) u(X, t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u \otimes u(X, t)) \right] dX. \end{aligned}$$

Afin d'écrire la conservation de la quantité de mouvement, Il nous faut préciser quelles sont les forces exercées sur le système.

3.3.2 Tenseur des contraintes

Les forces exercées sur le système sont de deux natures : il y a les forces extérieures qui dépendent du système considéré, et les forces intérieures au milieu. En effet, chaque sous domaine exerce des efforts sur les autres sous domaines.

Les forces extérieures sont déterminées par la physique du système considéré. Par exemple, si le milieu considéré est un plasma (gaz contenant des particules chargées), les forces extérieures peuvent être de nature électromagnétique (force de Lorentz). Elle s'exprime en fonction d'un champ extérieur donné ou en fonction du champ créé par le mouvement des particules. Dans le premier cas, la force ne dépendra que de la position et du temps, dans le deuxième elle dépendra de la densité et de la vitesse du fluide ainsi que de la position et du temps. Mais à chaque fois, elle s'exerce en tous points du domaine.

Dans l'étude d'un avion en vol, une des forces extérieures est la gravité (heureusement, ce n'est pas la seule...). Cette force s'exerce en tous points du domaine.

Si le milieu est un fluide stocké dans un piston, le mouvement du piston peut comprimer le fluide. Cette compression sera modélisée par une force de pression exercée sur la surface extérieure du système. On en tient compte dans la modélisation en donnant des conditions aux limites du domaine occupé par le système étudié.

Ce ne sont que trois exemples parmi tant d'autres, et il n'est pas possible de les décrire tous. Nous retiendrons que les forces extérieures peuvent être surfaciques, auquel cas on en tient compte au travers des conditions aux limites. Elles peuvent également être volumiques et dans ce cas elles sont données.

L'étude des forces intérieures relève d'observations expérimentales et de principes ainsi établis. Pour une question de temps, il n'est pas possible de donner dans ce cours, les détails de l'étude permettant d'établir l'expression de ces forces (ceci est très bien fait dans le cours de Jean Salençon [9]). Je résume ci dessous les conclusions de cette étude.

Si on considère des sous domaines arbitraires dans Ω_t , chaque sous domaine exerce des efforts sur les autres. Ces efforts sont exercés sur la surface des sous domaines. Ainsi, on

représente ces efforts par un vecteur \mathcal{T} , appelé “vecteur des contraintes”, et défini en tout point de la frontière des sous domaines.

On peut montrer que ce tenseur est une fonction de la position X , du temps et de la normale unitaire à la frontière du sous domaine, extérieure au sous domaine, notée n . Dans les milieux continus, on montre de plus que ce tenseur est une fonction linéaire de n . On a ainsi

$$\mathcal{T}(X, n(X), t) = \sigma(X, t) n(X), \quad \forall X \in \partial\omega_t, \quad \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

où σ est un tenseur, c'est à dire une matrice 3×3 , appelé tenseur des contraintes de Cauchy. Dans les milieux continus, ce tenseur est symétrique.

Nous verrons dans les chapitres suivants plusieurs exemples de l'expression de ce tenseur, notamment dans le cas des fluides ou des solides déformables.

3.3.3 Forme locale de la conservation de la quantité de mouvement

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat suivant

Théorème 3.6 *On suppose qu'à l'instant t , le système occupe un domaine $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. On note $\rho(X, t) \in \mathbb{R}^+$ et $u(X, t) \in \mathbb{R}^3$ la masse volumique et la vitesse du système.*

Alors l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement est donnée par

$$\partial_t (\rho(X, t) u(X, t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u \otimes u(X, t)) - \nabla_X \cdot (\sigma(X, t)) = \rho(X, t) f(X, t), \quad (3.5)$$

pour presque tout $X \in \Omega_t$ et tout $t > t_0$ et où $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est le tenseur symétrique des contraintes intérieures au milieu étudié et le vecteur $f \in \mathbb{R}^3$ modélise la résultante des forces volumiques extérieures s'appliquant en chaque point matériel du système.

Preuve On introduit la quantité de mouvement dans le domaine Ω_t , ainsi

$$\vec{p} = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) u(X, t) dX.$$

Les équations de Newton nous permettent d'écrire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) f(X, t) dX + \int_{\partial\Omega_t} \sigma(X, t) n(X) d\mu(X).$$

En utilisant la formule de Green sur chacune des composantes du terme source, pour $i = 1, 2$ ou 3 , on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega_t} \sigma(X, t) n(X) d\mu(X) \right)_i &= \int_{\partial\Omega_t} (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})(X, t) n(X) d\mu(X), \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \begin{pmatrix} \sigma_{i1}(X, t) \\ \sigma_{i2}(X, t) \\ \sigma_{i3}(X, t) \end{pmatrix} \cdot n(X) d\mu(X), \\ &= \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{i1}(X, t) \\ \sigma_{i2}(X, t) \\ \sigma_{i3}(X, t) \end{pmatrix} dX. \end{aligned}$$

Et alors

$$\int_{\partial\Omega_t} \sigma(X, t) n(X) d\mu(X) = \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot (\sigma(X, t)) dX.$$

Le Lemme 3.5 nous donne la version intégrale de la conservation de la quantité de mouvement

$$\int_{\Omega_t} \left[\partial_t (\rho(X, t) u(X, t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u \otimes u(X, t)) \right] dX = \int_{\Omega_t} (\rho(X, t) f(X, t) + \nabla_X \cdot (\sigma(X, t))) dX.$$

Enfin, en utilisant le Théorème 3.3 d'intégration, on obtient la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement. Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.6.

Remarque 3.7 *Nous verrons dans les chapitres suivants plusieurs exemples de l'expression de ce tenseur, notamment dans le cas des fluides ou des solides déformables.*

Dans la littérature, on trouve parfois cette équation sous une forme différente qui tient compte de l'équation de conservation de la masse.

Corollaire 3.8 *On suppose qu'à l'instant t , le système occupe un domaine $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. On note $\rho(X, t) \in \mathbb{R}^+$ et $u(X, t) \in \mathbb{R}^3$ la masse volumique et la vitesse du système. On suppose qu'elles satisfont l'équation de continuité (3.1).*

Alors l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement (3.5) est équivalente à

$$\rho(X, t) \left[\partial_t u(X, t) + (u(X, t) \cdot \nabla_X) u(X, t) \right] - \nabla_X \cdot (\sigma(X, t)) = \rho(X, t) f(X, t), \quad (3.6)$$

pour presque tout $X \in \Omega_t$ et tout $t > t_0$ et où $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est le tenseur symétrique des contraintes intérieures au milieu étudié et le vecteur $f \in \mathbb{R}^3$ modélise la résultante des forces volumiques extérieures s'appliquant en chaque point matériel du système.

Preuve :

Remarquons que

$$\partial_t (\rho(X, t) u(X, t)) = \partial_t \rho(X, t) u(X, t) + \rho(X, t) \partial_t u(X, t),$$

et que

$$\nabla_X \cdot (\rho(X, t) u_x(X, t) u(X, t)) = u_x(X, t) \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u(X, t)) + \rho(X, t) u(X, t) \cdot \nabla_X u_x(X, t).$$

Ainsi

$$\nabla_X \cdot (\rho(X, t) u \otimes u(X, t)) = \nabla_X \cdot (\rho(X, t) u(X, t)) u(X, t) + \rho(X, t) (u(X, t) \cdot \nabla_X) u(X, t).$$

Alors l'équation (3.5) se réécrit

$$\left[\partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) \right] u + \rho \left[\partial_t u + (u \cdot \nabla_X) u \right] - \nabla_X \cdot \sigma = \rho f.$$

Et, en utilisant la conservation de la masse, on obtient (3.6).

3.4 Equation de conservation de l'énergie

On énonce tout d'abord le premier principe de la thermodynamique.

Définition 3.9 (Premier principe de la thermodynamique) *En tout point du domaine matériel, il existe une fonction énergie interne spécifique (c'est à dire par unité de masse), telle que la variation en temps de l'énergie totale (cinétique + interne) d'une partie d'un système en mouvement soit égale à la somme des puissances des efforts et du taux de chaleur reçu par cette partie du système.*

Nous allons décrypter tout cela... Tout d'abord, qu'est ce que l'énergie interne. L'énergie interne est constituée des énergies cinétiques microscopiques correspondant à l'agitation thermique des particules et des énergies d'interactions microscopiques correspondant aux énergies de liaisons et d'interactions diverses. Par exemple dans le cas des gaz parfaits pour lesquels il n'y a pas d'interactions microscopiques (pas de réaction nucléaire) entre les molécules, l'énergie interne e mesure donc l'énergie thermique. On peut montrer que si T est la température alors e est proportionnel à T pour les gaz parfaits.

Pour tout effort F , ou force, appliquée sur un élément de volume en mouvement à la vitesse u , la puissance de cet effort est donnée par $F \cdot u$.

Enfin, le taux de chaleur reçu par une partie du système provient soit d'une source extérieure de chaleur, soit des autres sous parties du système par conduction thermique.

Pour l'apport de chaleur extérieure au système, on supposera que celui ci s'applique en volume, sinon il se modélise avec des conditions aux limites.

Pour les apports intérieurs, ceux ci s'appliquent sur la surface du système et il a été établi (expérimentalement par Fourier en 1822) qu'ils étaient proportionnels au gradient de température. Si T est la température, alors le taux de chaleur est donné par

$$\kappa \nabla_X T(X, t) \cdot n(X, t),$$

pour $X \in \partial\Omega_t$ et tout t et où κ est une constante spécifique du matériau appelée conductivité thermique, elle est déterminée de manière expérimentale.

On montre le résultat suivant

Théorème 3.10 *On suppose qu'à l'instant t , le système occupe un domaine $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. On note $\rho(X, t) \in \mathbb{R}^+$, $u(X, t) \in \mathbb{R}^3$, $T(X, t) \in \mathbb{R}$ et $e(X, t) \in \mathbb{R}^+$ la masse volumique, la vitesse, la température et la densité massique d'énergie interne (ou énergie spécifique interne) du système. Alors l'équation locale de conservation de l'énergie est donnée par*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) + \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) u \right) - \nabla_X \cdot (\sigma u) - \kappa \Delta_X T = \rho f \cdot u + Q,$$

pour presque tout $X \in \Omega_t$ et tout $t > t_0$ et où $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est le tenseur symétrique des contraintes intérieures au milieu étudié, $\kappa \in \mathbb{R}$ est la conductivité thermique du matériau, le vecteur $f \in \mathbb{R}^3$ modélise la résultante des forces volumiques extérieures s'appliquant en chaque point matériel du système et enfin Q modélise l'apport volumique extérieur de chaleur.

Preuve

L'énergie totale est donnée par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho(X, t) |u(x, t)|^2 dX + \int_{\Omega_t} \rho(X, t) e(X, t) dX = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) (X, t) dX,$$

où $|\cdot|$ est la norme Euclidienne de \mathbb{R}^3 .

Comme pour la masse \mathcal{M} dans le paragraphe 3.2, on montre que

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) (X, t) dX + \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) (X, t) u(X, t) \right) dX.$$

La puissance des efforts extérieurs volumiques et intérieurs surfaciques s'écrit

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) f(X, t) \cdot u(X, t) dX + \int_{\partial\Omega_t} \left(\sigma(X, t) n(X) \right) \cdot u(X, t) d\mu(X).$$

Enfin, le flux ou taux de chaleur total reçu par l'extérieur ou l'intérieur du système est donné par

$$\int_{\Omega_t} Q(X, t) dX + \int_{\partial\Omega_t} \kappa \nabla_X T(X, t) \cdot n(X, t) d\mu(X).$$

L'application du premier principe, nous donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) (X, t) dX + \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) (X, t) u(X, t) \right) dX \\ &= \int_{\Omega_t} \rho(X, t) f(X, t) \cdot u(X, t) dX + \int_{\partial\Omega_t} \left(\sigma(X, t) n(X) \right) \cdot u(X, t) d\mu(X) \\ & \quad + \int_{\Omega_t} Q(X, t) dX + \int_{\partial\Omega_t} \kappa \nabla_X T(X, t) \cdot n(X, t) d\mu(X). \end{aligned}$$

Remarquons alors que σ étant symétrique, on a

$$\left(\sigma(X, t) n(X) \right) \cdot u(X, t) = n(X) \cdot \left(\sigma(X, t)^T u(X, t) \right) = n(X) \cdot \left(\sigma(X, t) u(X, t) \right).$$

Et, en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_t} \left(\sigma(X, t) n(X) \right) \cdot u(X, t) d\mu(X) + \int_{\partial\Omega_t} \kappa \nabla_X T(X, t) \cdot n(X, t) d\mu(X) \\ & \quad + \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot \left(\sigma(X, t) u(X, t) \right) dX + \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot \left(\kappa \nabla_X T(X, t) \right) dX, \\ &= \int_{\Omega_t} \nabla_X \cdot \left(\sigma(X, t) u(X, t) \right) dX + \int_{\Omega_t} \kappa \Delta_X T(X, t) dX. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.10.

3.5 Bilan des équations de conservation

Nous avons obtenu trois lois de conservation à l'aide des trois premier principe de la mécanique classique : conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie. Nous n'avons pas exposé comment tenir compte du dernier principe appelé "second principe de la thermodynamique" car cela dépasse le cadre de ce cours.

En résumé, on suppose qu'à l'instant t , le système occupe un domaine $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Les inconnues sont $\rho(X, t) \in \mathbb{R}^+$, $u(X, t) \in \mathbb{R}^3$, $T(X, t) \in \mathbb{R}$ et $e(X, t) \in \mathbb{R}^+$ la masse volumique, la vitesse, la température et la densité massique d'énergie interne (ou énergie spécifique interne) du système. Elles satisfont le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \cdot \left(\rho(X, t) u(X, t) \right) = 0, \\ & \partial_t \left(\rho(X, t) u(X, t) \right) + \nabla_X \cdot \left(\rho(X, t) u \otimes u(X, t) \right) - \nabla_X \cdot \left(\sigma(X, t) \right) = \rho(X, t) f(X, t), \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) + \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) u \right) - \nabla_X \cdot \left(\sigma u \right) - \kappa \Delta_X T = \rho f \cdot u + Q, \end{aligned}$$

pour presque tout $X \in \Omega_t$ et tout $t > t_0$ et où $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est le tenseur symétrique des contraintes intérieures au milieu étudié, $\kappa \in \mathbb{R}$ est la conductivité thermique du matériau, le vecteur $f \in \mathbb{R}^3$ est la densité de la résultante des forces volumiques extérieures s'appliquant en chaque point matériel du système et enfin Q modélise l'apport volumique extérieur de chaleur.

À cela s'ajoute une loi d'état pour fermer le système (c'est à dire autant d'équations que d'inconnues)

$$e = e(\rho, T),$$

reliant l'énergie interne, la densité et la température. Nous verrons dans le chapitre suivant quelles expressions sont utilisées.

Chapitre 4

Différents modèles

Le but de ce chapitre, est de donner différents modèles utilisés dans la littérature et obtenue à l'aide des équations de conservation établies dans le chapitre précédent.

4.1 Modèles fluides

4.1.1 Forme du tenseur des contraintes intérieures au fluide

Lorsque le fluide est au repos, c'est à dire lorsque sa vitesse est nulle, les efforts ne sont pas nuls. Chaque sous domaine exerce une pression ou plutôt une compression sur les autres. Il est assez naturel (cela est vérifié par l'expérience) de supposer que cette compression se fait parallèlement à la normale du domaine. Ainsi σ est proportionnel à la matrice identité de taille 3. On l'exprime en introduisant la notion de pression hydrostatique (c'est à dire la pression du milieu au repos), notée p . C'est un scalaire et le tenseur des contraintes est donné par

$$\sigma(X, t) = -p(X, t) \text{Id}_{\mathbf{R}^3}.$$

L'expérience montre que, lorsque le fluide est en mouvement, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. Ainsi, des effets visqueux se rajoutent aux effets de pression hydrostatique dans un fluide en mouvement. Nous nous limiterons aux fluides dits Newtoniens qui sont définis par les trois propriétés suivantes :

- le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire de $\nabla_X u$.
- le tenseur des contraintes demeure inchangé lorsqu'on applique à l'ensemble du système un mouvement rigidifiant (non déformant) quelconque. Cette propriété est appelée "principe d'objectivité".
- le milieu fluide est isotrope, c'est à dire qu'aucune direction n'est privilégiée.

Remarquons que la première propriété est cohérente avec le fait que les effets visqueux disparaissent lorsque la vitesse est nulle.

Le mouvement général d'un point matériel de fluide est caractérisé par les tenseurs de translation, de rotation, de déformation et de dilatation. Le principe d'objectivité implique qu'un fluide Newtonien soumis à un mouvement de translation ou de rotation est libre de toutes contraintes. Ainsi, le tenseur des contraintes ne dépend pas des tenseurs de translation et de rotation. Nous avons déjà vu que le taux de dilatation d'un volume est proportionnel à $\nabla_X \cdot u$. Ainsi, puisque le milieu est isotrope, le tenseur de dilatation volumique est donné par

$$\nabla_X \cdot u \text{Id}_{\mathbf{R}^3}.$$

Nous admettrons que le tenseur de déformation est donné par

$$-\frac{2}{3} \nabla_X \cdot u \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \nabla_X u + \nabla_X u^T.$$

Ainsi, le tenseur des contraintes est donné par

$$\sigma(X, t) = -p(X, t) \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \mu \left(\nabla_X u(X, t) + \nabla_X u^T(X, t) \right) + \left(\lambda - \frac{2\mu}{3} \right) \nabla_X \cdot u(X, t) \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}, \quad (4.1)$$

où λ et μ sont les coefficients de viscosité de Lamé. La viscosité λ est appelée la viscosité volumique et μ est appelée la viscosité dynamique, nous verrons qu'elle nous permettra de définir le nombre de Reynolds, important en mécanique des fluides.

4.1.2 Equations de Navier-Stokes compressible

Les équations de Navier-Stokes sont données en utilisant l'expression (4.1) du tenseur des contraintes. On remarque de plus que

$$\begin{aligned} \nabla_X \cdot \sigma &= \nabla_X \cdot \left(-p \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \mu \left(\nabla_X u + \nabla_X u^T \right) + \left(\lambda - \frac{2\mu}{3} \right) \nabla_X \cdot u \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} \right), \\ &= -\nabla_X p + \mu \Delta_X u + \mu \nabla_X (\nabla_X \cdot u) + \left(\lambda - \frac{2\mu}{3} \right) \nabla_X (\nabla_X \cdot u), \\ &= -\nabla_X p + \mu \Delta_X u + \left(\lambda + \frac{\mu}{3} \right) \nabla_X (\nabla_X \cdot u), \end{aligned}$$

car

$$\nabla_X \cdot (\nabla_X u) = \Delta_X u, \quad \text{et} \quad \nabla_X \cdot (\nabla_X u^T) = \nabla_X (\nabla_X \cdot u).$$

Les équations de Navier-Stokes sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p - \mu \Delta_X u - \left(\lambda + \frac{\mu}{3} \right) \nabla_X (\nabla_X \cdot u) = \rho f, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) + \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) u \right) - \kappa \Delta_X T \\ \quad + \nabla_X \cdot \left[\left(p - \mu \left(\nabla_X u + \nabla_X u^T \right) + \left(\lambda - \frac{2\mu}{3} \right) \nabla_X \cdot u \right) u \right] = \rho f \cdot u + Q, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$.

De plus, λ et μ sont les coefficients de viscosité de Lamé. La viscosité λ est appelée la viscosité volumique et μ est appelée la viscosité dynamique, $\kappa \in \mathbb{R}$ est la conductivité thermique du matériau, le vecteur $f \in \mathbb{R}^3$ est la densité de la résultante des forces volumiques extérieures et enfin Q modélise l'apport volumique extérieur de chaleur. Ces quantités sont données.

Les inconnues (ou variables) sont $\rho \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{R}^+$ la masse volumique, la vitesse, la pression, la température et l'énergie interne. Le système est donc fermé par des équations dites "lois d'état" de la forme

$$p = p(\rho, T),$$

$$e = e(\rho, T).$$

Nous verrons, dans le paragraphe 4.1.7 quelques exemples de lois d'état applicable aux gaz parfaits (à ne pas confondre avec fluides parfaits).

4.1.3 Equations d'Euler compressible

Les équations d'Euler sont utilisées pour décrire des fluides dits parfaits. Un fluide est dit parfait si les termes visqueux dans le tenseur des contraintes peuvent être négligés. Nous verrons dans le paragraphe 4.1.8, quand cette approximation peut être faite.

Pour les fluides parfaits, le tenseur des contraintes est sphérique et donné par

$$\sigma(X, t) = -p(X, t) \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Les équations d'Euler, sont alors données par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p = \rho f, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) + \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) u \right) - \kappa \Delta_X T + \nabla_X \cdot (p u) = \rho f \cdot u + Q, \end{cases} \quad (4.3)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$.

De plus, $\kappa \in \mathbb{R}$ est la conductivité thermique du matériau, le vecteur $f \in \mathbb{R}^3$ est la densité de la résultante des forces volumiques extérieures s'appliquant en chaque point matériel du système et enfin Q modélise l'apport volumique extérieur de chaleur. Ces quantités sont données.

Les inconnues (ou variables d'état) sont $\rho \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{R}^+$ la masse volumique, la vitesse, la pression, la température et l'énergie interne. Le système est donc fermé par des équations dites "lois d'état" de la forme

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T), \\ e &= e(\rho, T). \end{aligned}$$

Nous verrons, dans le paragraphe 4.1.7 quelques exemples de lois d'état applicables aux gaz parfaits (à ne pas confondre avec fluides parfaits).

4.1.4 Equations de Navier-Stokes incompressible

L'hypothèse d'incompressibilité donne

$$\nabla_X \cdot u = 0.$$

Alors, l'équation de la masse s'écrit

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla_X \rho = \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Ainsi, la dérivée particulaire de ρ est nulle au cours du temps. Si à l'instant initial, le fluide est homogène (c'est à dire $\rho(X, t = 0) = cste$) il le reste à tout instant. Cette situation étant la plus fréquemment rencontrée en pratique, nous nous bornerons à présenter les équations de Navier-Stokes incompressible homogène :

$$\begin{cases} \rho(X, t) = \rho(X, 0) = \rho_0 = cste, \\ \nabla_X \cdot u = 0, \\ \rho_0 \partial_t u + \rho_0 (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p - \mu \Delta_X u = \rho_0 f, \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) + \rho_0 \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) u \right) - \kappa \Delta_X T \\ \quad + \nabla_X \cdot \left[\left(p - \mu (\nabla_X u + \nabla_X u^T) \right) u \right] = \rho_0 f \cdot u + Q, \end{cases} \quad (4.4)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$.

Remarque 4.1 Les inconnues (ou variables d'état) sont $\rho \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{R}^+$ la masse volumique, la vitesse, la pression, la température et l'énergie interne. Soit 7 inconnues réelles, notons alors que le système est constitué de 6 équations indépendantes, il manque donc une équation (loi d'état) pour fermer le système. Remarquons de plus que ρ est fixée par la première équation. Les deux équations suivantes sont indépendantes de la dernière. On doit ainsi déterminer (u, p) solution des équations

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_X)u + \nabla_X(p/\rho_0) - \nu \Delta_X u = f, \end{cases}$$

où $\nu = \mu/\rho_0$ est appelée la viscosité cinématique du fluide.

Le système est bien fermé, même si ρ_0 n'est pas connu. En effet, il suffit de choisir comme inconnues u et $\bar{p} = p/\rho_0$. La contrainte d'incompressibilité permet alors de déterminer \bar{p} . On dit qu'elle est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'incompressibilité. Nous verrons en travaux dirigés, sur un système plus simple, que la contrainte $\nabla_X \cdot u = 0$ permet bien de déterminer complètement la "pression" \bar{p} . Ainsi, une seule loi d'état est nécessaire pour fermer le système.

Ce système est donc fermé par une seule loi d'état

$$e = e(\rho, T).$$

4.1.5 Equations de Stokes

Reprenons les équations en vitesse et pression du modèle de Navier-Stokes incompressible :

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot u = 0, \\ \rho_0 \partial_t u + \rho_0 (u \cdot \nabla_X)u + \nabla_X p - \mu \Delta_X u = \rho_0 f. \end{cases}$$

Nous avons déjà vu que la première équation traduit l'incompressibilité du milieu. Quant à la deuxième équation, elle traduit mathématiquement que les variations en temps de la vitesse dans le fluide (terme $\rho_0 \partial_t u$) sont dû (outre les variations de pression et les forces extérieures) aux forces inertielles, terme $\rho_0 (u \cdot \nabla_X)u$ et aux forces de viscosité, terme $\mu \Delta_X u$.

Nous verrons que dans certains régimes, les forces de viscosités sont prépondérantes, on peut alors négliger les termes inertiels.

On obtient ainsi le système de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot u = 0, \\ \partial_t u + \nabla_X(p/\rho_0) - \nu \Delta_X u = f, \end{cases} \quad (4.5)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$ et où $\nu = \mu/\rho_0$ est appelée la viscosité cinématique du fluide.

Le système est bien fermé, même si ρ_0 n'est pas connu. En effet, il suffit de choisir comme inconnues u et $\bar{p} = p/\rho_0$. La contrainte d'incompressibilité permet alors de déterminer \bar{p} .

4.1.6 Equations d'Euler incompressible

De même que précédemment, dans certains régimes ce sont les termes de viscosité qui pourront être négligés, et le milieu sera décrit par les équations d'Euler incompressible :

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_X)u + \nabla_X \bar{p} = f, \end{cases}$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$ et où $\bar{p} = p/\rho_0$ est complètement déterminé par la contrainte d'incompressibilité.

4.1.7 Lois d'état des gaz parfaits

Nous donnerons des exemples de lois d'état dans le cas des gaz parfaits. Un gaz est dit (thermiquement) parfait lorsque son équation d'état thermique $p = p(\rho, T)$ prend la forme :

$$p = \rho r T,$$

où $r = R/\mathcal{M}$ est la constante du gaz, R étant la constante universelle des gaz parfaits ($R = 8,314J/K$) et \mathcal{M} est la masse molaire du gaz considéré.

Dans ce cas, on déduit des deux principes de la thermodynamiques que e ne dépend pas de ρ et ainsi $e = e(T)$.

Suivant le système étudié on ferme le système avec les lois traduisant la physique considérée.

Par exemple, si on considère une transformation isentropique (i.e. à entropie constante) ce qui est le cas pour une transformation réversible et adiabatique (c'est à dire sans échange thermique), on peut montrer que

$$p = C \rho^\gamma,$$

où C est une constante positive donnée et $\gamma = C_p/C_v > 1$ est le rapport des chaleurs spécifiques (c'est une constante donnée). Cette constante dépend du gaz considéré, pour un gaz monoatomique $\gamma = 5/3$, pour un gaz diatomique $\gamma = 7/5$...

Ainsi, connaissant ρ , on connaît p et donc $T = p/(\rho r)$ et $e = e(T)$. Dans le cas d'un fluide parfait, on peut ne considérer que les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On obtient les équations d'Euler isentropique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p(\rho) = \rho f, \\ p(\rho) = C \rho^\gamma, \end{cases} \quad (4.6)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$.

Un autre exemple correspond aux transformations isothermes (à température constante), on a alors $T = cste$, $e = cste$ et $p = r T \rho$. Dans le cas d'un fluide parfait, on obtient comme précédemment les équations d'Euler isotherme en ne considérant que les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Dans le cas d'une transformation adiabatique et d'un gaz caloriquement parfait, on élimine les termes de transfert de chaleur et ainsi, le système est fermé par les lois des gaz parfaits $p = \rho r T$ et $e = C_v T$ avec $r = C_p - C_v$.

Le système de Navier-Stokes devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p - \mu \Delta_X u - \left(\lambda + \frac{\mu}{3}\right) \nabla_X(\nabla_X \cdot u) = \rho f, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) + \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) u \right) \\ \quad + \nabla_X \cdot \left[\left(p - \mu (\nabla_X u + \nabla_X u^T) + \left(\lambda - \frac{2\mu}{3} \right) \nabla_X \cdot u \right) u \right] = \rho f \cdot u, \\ p = (\gamma - 1) \rho e, \end{cases} \quad (4.7)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$.

De même, le système d'Euler s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p = \rho f, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) + \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) u \right) + \nabla_X \cdot (p u) = \rho f \cdot u, \\ p = (\gamma - 1) \rho e, \end{cases} \quad (4.8)$$

pour presque tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$. Ce système porte le nom de système de la dynamique complète des gaz parfaits dans la littérature.

Remarque 4.2 *Le système de la dynamique des gaz est écrit sur les variables $(\rho, \rho u, \frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e)$ qui sont les quantités conservées au cours du temps. On dit que ce sont les variables conservatives. Il est parfois utile d'écrire le système en utilisant les variables, dites physiques, (ρ, u, p) . On obtient le système équivalent suivant*

$$\partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \quad (4.9)$$

$$\rho \partial_t u + \rho (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p = \rho f, \quad (4.10)$$

$$\partial_t p + u \cdot \nabla_X p + \gamma p \nabla_X \cdot u = 0, \quad (4.11)$$

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1}. \quad (4.12)$$

En effet, on commence par remarquer que

$$\nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) = \rho (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X \cdot (\rho u) u.$$

Ainsi, l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \partial_t u + \partial_t \rho u + \nabla_X \cdot (\rho u) u + \rho (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p = \rho f,$$

et, en utilisant l'équation de conservation de la masse, on obtient (4.10).

De même, on peut remarquer que

$$\nabla_X \cdot \left(\frac{|u|^2}{2} \rho u \right) = \frac{|u|^2}{2} \nabla_X \cdot (\rho u) + \rho u \cdot \left((u \cdot \nabla_X) u \right).$$

Alors, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{|u|^2}{2} \partial_t \rho + \rho \partial_t \left(\frac{|u|^2}{2} \right) + \partial_t(\rho e) + \frac{|u|^2}{2} \nabla_X \cdot (\rho u) + \rho u \cdot \left((u \cdot \nabla_X) u \right) + \nabla_X \cdot (\rho e u) \\ + u \cdot \nabla_X p + p \nabla_X \cdot u = \rho f \cdot u, \end{aligned}$$

soit encore

$$\frac{|u|^2}{2} \partial_t \rho + \rho u \cdot \partial_t u + \partial_t(\rho e) + \frac{|u|^2}{2} \nabla_X \cdot (\rho u) + u \cdot \left(\rho (u \cdot \nabla_X) u \right) + \nabla_X \cdot (\rho e u) + u \cdot \nabla_X p + p \nabla_X \cdot u = \rho f \cdot u.$$

Alors, en utilisant l'équation de conservation de la masse ainsi que l'équation en vitesse, (4.10) et l'équation d'état, il vient

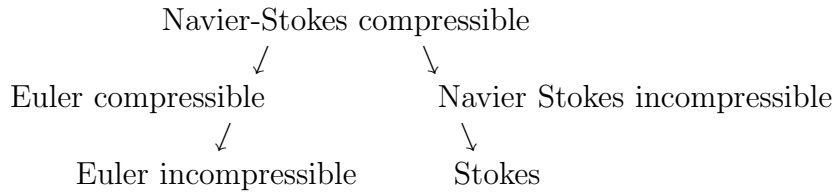
$$\frac{1}{\gamma - 1} \partial_t p + \frac{1}{\gamma - 1} \nabla_X \cdot (p u) + p \nabla_X \cdot u = 0.$$

Ce qui donne bien (4.11).

Ce ne sont que des exemples parmi d'autres, ce sont toutefois ceux rencontrés le plus fréquemment...

4.1.8 Classification des modèles

Nous venons de voir un ensemble de modèles, on parle de hiérarchie de modèles. On peut le résumer par le diagramme suivant



Il est nécessaire de savoir dans quels régimes chacun d'entre eux est valide.

Pour cela, nous allons voir qu'il est intéressant d'adimensionner les équations.

En physique, dire qu'une quantité est grande ou petite n'a pas vraiment de sens, ce qui a du sens c'est dire qu'une quantité est grande (ou petite) devant une autre quantité. En effet, suivant le système physique étudié, les ordres de grandeurs peuvent être vraiment différents. Par exemple, si on s'intéresse au trafic routier, les vitesses des voitures seront de l'ordre de $100\text{km/h} \approx 30\text{m/s}$. Maintenant, si on s'intéresse au mouvement de particules élémentaires comme des électrons dans un tube cathodique par exemple, les vitesses considérées seront plutôt de l'ordre de $3 \times 10^7\text{m/s}$. On voit bien que les notions de grand ou petit dépendent du problème étudié!

Ainsi, il est naturel d'adimensionner les équations. Pour cela, on se fixe des ordres de grandeurs pour chaque quantité dans les équations. Et, on va travailler sur des quantités adimensionnées par leurs ordre de grandeur. On se ramène ainsi à des quantités qui sont de l'ordre de 1. Nous verrons que du choix de ces ordres de grandeurs dépendra la mise en avant de certains phénomènes physiques et donc de certains régimes.

4.1.8.1 Le nombre de Reynolds : de Stokes à Euler

Voyons, tout d'abord sur un exemple simple, comment on procède pour adimensionner les équations. On considère le modèle de Navier-Stokes incompressible homogène. On suppose de plus que la transformation considérée est adiabatique et qu'il n'y a pas de force extérieures exercées sur le système. Le système est alors donné par

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho(X, t) = \rho(X, 0) = \rho_0 = \text{cste}, \\
 \nabla_X \cdot u = 0, \\
 \rho_0 \partial_t u + \rho_0 (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p - \mu \Delta_X u = 0, \\
 \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) + \rho_0 \nabla_X \cdot \left(\left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) u \right) + \nabla_X \cdot \left[\left(p - \mu (\nabla_X u + \nabla_X u^T) \right) u \right] = 0,
 \end{array} \right.$$

pour tout $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ et tout $t \in [0, T_f]$ où T_f est le temps final auquel on cherche à déterminer l'état du système.

Choisissons les ordres de grandeurs de chacune des variables. Ces ordres de grandeurs sont fixés par la physique en pratique. On suppose connu l'ordre de grandeur de la norme des vitesses, on le note $u_0 \in \mathbb{R}$. Remarquons alors que les termes $\rho_0 \partial_t u$ et $\nabla_X p$ sont homogènes en terme d'unité. Ainsi, une pression est homogène au produit d'une densité d'une vitesse et d'une distance divisé par un temps, soit au produit d'une densité et du carré d'une vitesse. On peut donc choisir d'adimensionner la pression par $\rho_0 u_0^2$. On procède de même pour l'énergie interne.

On choisit comme ordres de grandeur

$L = \text{diam}(\Omega)$	pour les longueurs,	u_0 ,	pour les vitesses,
$t_0 = L/u_0$	pour le temps,	$p_0 = \rho_0 u_0^2$	pour la pression,
ρ_0	pour les densités,	$e_0 = \rho_0 u_0^2$	pour les énergies.

On effectue alors le changement de variables $(X, t) \mapsto (\bar{X}, \bar{t}) = (X/L, t/t_0)$.

On voit alors les inconnues comme des fonctions adimensionnées et exprimées en terme de ces nouvelles variables. Ainsi, on pose

$$\rho(X, t) = \rho_0 \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t}), \quad u(X, t) = u_0 \bar{u}(\bar{X}, \bar{t}), \quad p(X, t) = p_0 \bar{p}(\bar{X}, \bar{t}), \quad e(X, t) = e_0 \bar{e}(\bar{X}, \bar{t}).$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t})) = \rho_0 \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t}) = \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t}),$$

de même pour les autres termes du système.

On obtient ainsi une version adimensionnée du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t}) = \bar{\rho}(\bar{X}, 0) = 1, \\ \frac{u_0}{L} \nabla_{\bar{X}} \cdot \bar{u} = 0, \\ \frac{\rho_0 u_0}{t_0} \partial_{\bar{t}} \bar{u} + \frac{\rho_0 u_0^2}{L} (\bar{u} \cdot \nabla_{\bar{X}}) \bar{u} + \frac{\rho_0 u_0^2}{L} \nabla_{\bar{X}} \bar{p} - \frac{\mu u_0}{L^2} \Delta_{\bar{X}} \bar{u} = 0, \\ \frac{\rho_0 u_0^2}{t_0} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{|\bar{u}|^2}{2} + \bar{e} \right) + \frac{\rho_0 u_0^3}{L} \nabla_{\bar{X}} \cdot \left(\left(\frac{|\bar{u}|^2}{2} + \bar{e} \right) \bar{u} \right) + \frac{\rho_0 u_0^3}{L} \nabla_{\bar{X}} \cdot (\bar{p} \bar{u}) \\ \quad - \frac{\mu u_0^2}{L^2} \nabla_{\bar{X}} \cdot \left((\nabla_{\bar{X}} \bar{u} + \nabla_{\bar{X}} \bar{u}^T) \bar{u} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Soit encore, après simplifications et en remarquant que $t_0/L = 1/u_0$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t}) = \bar{\rho}_0 \rho(\bar{X}, 0) = 1, \\ \nabla_{\bar{X}} \cdot \bar{u} = 0, \\ \partial_{\bar{t}} \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla_{\bar{X}}) \bar{u} + \nabla_{\bar{X}} \bar{p} - \frac{\mu}{\rho_0 L u_0} \Delta_{\bar{X}} \bar{u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{|\bar{u}|^2}{2} + \bar{e} \right) + \nabla_{\bar{X}} \cdot \left(\left(\frac{|\bar{u}|^2}{2} + \bar{e} \right) \bar{u} \right) + \nabla_{\bar{X}} \cdot (\bar{p} \bar{u}) \\ \quad - \frac{\mu}{\rho_0 L u_0} \nabla_{\bar{X}} \cdot \left((\nabla_{\bar{X}} \bar{u} + \nabla_{\bar{X}} \bar{u}^T) \bar{u} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Il ne subsiste plus qu'un seul paramètre. C'est l'inverse d'un nombre bien connu en mécanique des fluides qui s'appelle le nombre de Reynolds. Il est défini par

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho_0 L u_0}{\mu}.$$

Ce nombre joue un rôle très important en mécanique des fluides car il permet de distinguer deux types d'écoulement.

- **L'écoulement à petit nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e \ll 1$** : Dans ce cas l'écoulement est laminaire (nous verrons ci-dessous ce que cela veut dire) et essentiellement gouverné par la viscosité. Le terme d'inertie $(u \cdot \nabla_X)u$ est négligeable et l'équation de la vitesse devient linéaire. On peut alors, dans le cas incompressible, utiliser le système de Stokes pour décrire le système.

- **L'écoulement à grand nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e \gg 1$** : Dans ce cas, les effets visqueux sont concentrés sur les bords, dans une fine couche appelée couche limite, ou dans le sillage des obstacles. Hors de ces zones, le terme visqueux est négligeable et on peut utiliser le modèle d'Euler pour décrire le système.

Remarque 4.3 *Attention, ces résultats sont toutefois à temporiser. En effet, l'approximation du modèle d'Euler (loin des bords ou des obstacles) lorsque le nombre de Reynolds est élevé est fautive pour des trop grands nombres de Reynolds. À partir de certaines valeurs, on voit se développer des instabilités qui s'amplifient au point de donner naissance à des phénomènes chaotiques dans lesquels on ne peut pas distinguer d'organisation. On est alors dans un régime appelé régime turbulent (voir la remarque 4.4 point 4 ci-dessous, pour l'illustration expérimentale de ces phénomènes).*

Ainsi, on peut résumer en disant qu'il existe quatre régimes

- **Très petit nombre de Reynolds** : Les termes visqueux sont prépondérants et on utilise le modèle linéaire de Stokes.
- **Régime intermédiaire** : Les effets visqueux et inertiels sont du même ordre et le système de Navier-Stokes doit être utilisé.
- **Grands nombre de Reynolds** : Les effets inertiels sont prépondérants et on peut utiliser le modèle d'Euler loin du bord et des obstacles.
- **Très grand nombre de Reynolds** : On est dans un régime turbulent. La description de ce régime sort du cadre de ce cours.

Remarque 4.4 1. *Il est classique, en mathématique, que les termes de viscosités ($\Delta_X u$) stabilisent et régularisent les solutions et donc les écoulements. Ainsi, quand le nombre de Reynolds augmente, le régime laminaire devient instable puis turbulent.*

2. *Dans le régime à très petit nombre de Reynolds, le modèle utilisé est linéaire en vitesse. Une des conséquences de cette linéarité est la réversibilité des écoulements à très petits nombres de Reynolds. Cette réversibilité s'observe en réalisant des simulations numériques obtenues en utilisant le modèle non linéaire de Navier-Stokes. La figure 4.1 illustre ce phénomène.*

3. *La transition entre ces différents régimes se produit dans une certaine gamme de valeurs du nombre de Reynolds qui dépend du problème physique considéré.*

Les écoulements que nous observons couramment dans l'air ou l'eau sont presque tous à très grand nombre de Reynolds, il faut donc se méfier des raisonnements intuitifs qui nous sont dictés par ces exemples. On trouve les exemples suivants dans le cours de Mécanique des fluides de Marc Fermigier à l'ESPCI ParisTech (Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris) :

- *écoulement atmosphérique : $u \approx 10\text{m/s}$, $L \approx 100\text{km}$, $\mathcal{R}_e \approx 10^{11}$.*
- *écoulement autour d'une aile d'avion : $u \approx 100\text{m/s}$, $L \approx 10\text{m}$, $\mathcal{R}_e \approx 10^8$.*
- *écoulement autour d'une voiture : $u \approx 30\text{m/s}$, $L \approx 4\text{m}$, $\mathcal{R}_e \approx 10^6$ à 10^7 .*
- *jet d'eau sortant d'un robinet : $u \approx 10\text{cm/s}$, $L \approx 1\text{cm}$, $\mathcal{R}_e \approx 10^3$.*
- *écoulement du sang dans l'aorte : $u \approx 1\text{m/s}$, $L \approx 1\text{cm}$, $\mathcal{R}_e \approx 10^4$.*
- *écoulement du sang dans les vaisseaux capillaires : $u \approx 100\mu\text{m/s}$, $L \approx 10\mu\text{m}$, $\mathcal{R}_e \approx 10^{-3}$.*

4. *La transition du régime laminaire au régime turbulent s'observe de manière expérimentale. En effet, en utilisant des marqueurs, qui sont de la fumée pour les gaz ou des colorants pour les liquides, on peut observer ces différents régimes et ainsi des différences importantes dans le comportement des écoulements des fluides.*

Dans certains écoulements, les particules marquées diffusent très lentement c'est à dire s'écartent peu les unes des autres, les différentes couches (lamelles) glissent les unes par rapport aux autres sans se mélanger. On est dans le cas d'un écoulement laminaire.

Au contraire dans d'autres écoulements les particules marquées s'éloignent très rapidement de manière aléatoire et irrégulière, dans toutes les directions. On ne retrouve plus de trace de marquage significative très près de l'endroit où le marqueur a été introduit. On est dans le cas d'un écoulement turbulent.

Cette transition se voit très bien sur la figure 4.2, pour l'écoulement d'un gaz autour d'un cylindre. On voit très bien en haut à gauche l'écoulement laminaire, puis l'apparition d'instabilités autour de l'obstacle qui finissent par générer de la turbulence en bas à droite.

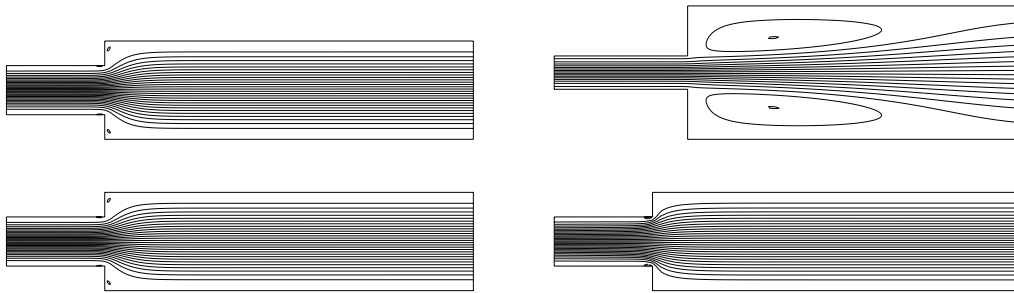


FIGURE 4.1 – Ecoulement à $\mathcal{R}_e = 0$ (à gauche) et $\mathcal{R}_e = 50$ (à droite). Sur les figures du haut l'écoulement va de gauche à droite, sur les figures du bas, de droite à gauche. Lignes de courant déterminées par résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes. Figure tirée du cours de Mécanique des fluides de Marc Fermigier à l'ESPCI ParisTech (Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris)

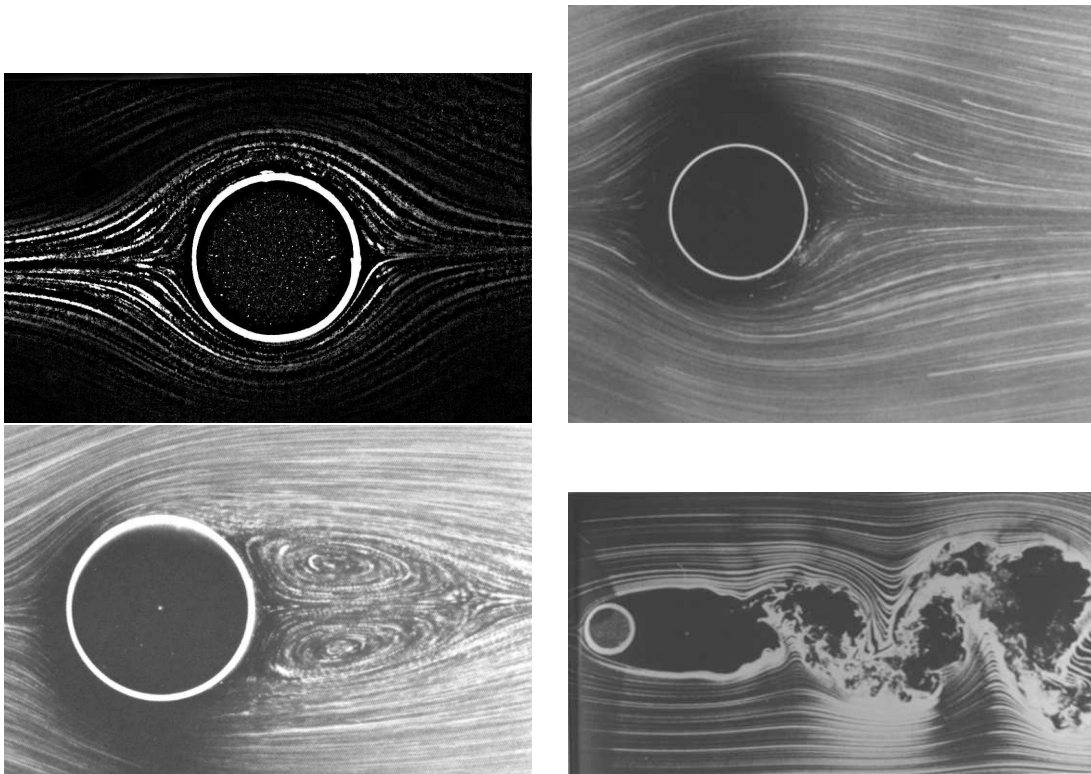


FIGURE 4.2 – Ecoulement autour d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds. En haut à gauche $\mathcal{R}_e = 0,16$, en haut à droite $\mathcal{R}_e = 1,5$. En bas à gauche $\mathcal{R}_e = 26$ et en bas à droite $\mathcal{R}_e = 10000$. Photographies : S. Taneda., J. Phys. Soc. Jpn. (Re 0.16, 1.5, 26), T. Corke et H. Nagib (Re 10000).

4.1.8.2 Vitesse du son dans un fluide

On considère un fluide parfait isotherme ou isentropique homogène de densité ρ_0 de vitesse constante u_0 sur lequel ne s'exerce aucune force extérieure. On crée une petite perturbation de densité ρ et de vitesse u , c'est à dire qu'on s'intéresse à des fluides parfaits isothermes ou isentropiques sur lesquels ne s'exerce aucune force extérieure et dont la densité et la vitesse sont proches de ce fluide parfait isotherme ou isentropique homogène de vitesse constante. Ainsi :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad u = u_0 + u_1,$$

avec ρ_1 et u_1 petits.

On écrit alors le système d'Euler isentropique ou isotherme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p(\rho) = 0, \\ p(\rho) = C \rho^\gamma, \end{cases}$$

où $C > 0$, $\gamma > 1$ dans le cas isentropique et $\gamma = 1$ et $C = T_0 > 0$ dans le cas isotherme avec T_0 la température du fluide constante dans le cas isotherme.

Nous avons vu que ce système peut être réécrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \rho \partial_t u + \rho (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p(\rho) = 0, \\ p(\rho) = C \rho^\gamma, \end{cases}$$

Pour étudier ce système, on peut le linéariser autour de (ρ_0, u_0) , c'est à dire qu'on fait des développements de Taylor des termes non linéaires et on néglige tous les termes non linéaires en la perturbation.

Puisque ρ_0 et u_0 sont constants, on a $\partial_t \rho = \partial_t \rho_1$ et

$$\nabla_X \cdot (\rho u) = \nabla_X \cdot ((\rho_0 + \rho_1)(u_0 + u_1)) = \rho_0 \nabla_X \cdot u_1 + u_0 \cdot \nabla_X \rho_1 + \nabla_X \cdot (\rho_1 u_1) \approx \rho_0 \nabla_X \cdot u_1 + u_0 \cdot \nabla_X \rho_1,$$

car si ρ_1 et u_1 sont petits, les termes quadratiques sont négligeables.

De même

$$\rho (u \cdot \nabla_X) u = \rho_0 (u_0 \cdot \nabla_X) u_1 + \rho_1 (u_0 \cdot \nabla_X) u_1 + \rho_0 (u_1 \cdot \nabla_X) u_1 + \rho_1 (u_1 \cdot \nabla_X) u_1 \approx \rho_0 (u_0 \cdot \nabla_X) u_1,$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_X(p(\rho)) &= \nabla_X \left(p(\rho_0) + (\rho_1 - \rho_0) p'(\rho_0) + \mathcal{O}((\rho_1 - \rho_0)^2) \right) \\ &= p'(\rho_0) \nabla_X \rho_1 + \nabla_X \left(\mathcal{O}((\rho_1 - \rho_0)^2) \right) \approx p'(\rho_0) \nabla_X \rho_1. \end{aligned}$$

Ainsi, le système linéarisé est donné par

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla_X \cdot u_1 + u_0 \cdot \nabla_X \rho_1 = 0, \\ \rho_0 \partial_t u_1 + \rho_0 (u_0 \cdot \nabla_X) u_1 + p'(\rho_0) \nabla_X \rho_1 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que ce soit dans le cas isentropique ou isotherme, on a $p'(\rho_0) > 0$ puisque $p'(\rho_0) = C \gamma \rho_0^{\gamma-1} = \gamma p(\rho_0) / \rho_0$. On pose

$$c^2 = \frac{\gamma p(\rho_0)}{\rho_0},$$

avec $c > 0$.

Supposons de plus, qu'initialement, le fluide était au repos, alors $u_0 = 0$ et le système devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla_X \cdot u_1 = 0, \\ \rho_0 \partial_t u_1 + c^2 \nabla_X \rho_1 = 0. \end{cases}$$

On prend alors la différence de la dérivée en temps de la première équation et de la divergence de la deuxième équation, on obtient

$$\partial_{tt}^2 \rho_1 - c^2 \Delta_X \rho_1 = 0.$$

Cette équation est connue sous le nom d'équations des ondes.

En dimension une, on peut effectuer le changement de variables $(x, t) \mapsto (p, q) = (x - ct, x + ct)$, on pose alors $\rho_1(x, t) = \tilde{\rho}_1(p, q)$ et l'équation devient

$$\frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \tilde{\rho}_1(p, q) = 0,$$

Par intégration, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\rho}_1(p, q) = g(p), \\ \frac{\partial}{\partial q} \tilde{\rho}_1(p, q) = h(q), \end{cases} \Rightarrow \tilde{\rho}_1(p, q) = \int g(p) dp + \int h(q) dq,$$

où g et h sont des fonctions réelles.

Ainsi, la solution générale est donnée par

$$\rho_1(x, t) = G(x - ct) + F(x + ct).$$

Le premier terme est une onde qui se propage à la vitesse c donc dans le sens des x croissants. On l'appelle "onde progressive".

Le deuxième terme est une onde qui se propage à la vitesse $-c$ donc dans le sens des x décroissants. On l'appelle onde régressive.

Ces ondes sont les ondes de pression qui se propagent dans le fluide. La vitesse c de ces ondes portent le nom de vitesse du son dans le fluide. Elle peut être exprimée soit en terme de la pression p_0 comme nous l'avons déjà vu, soit en terme de température en remarquant que $r T_0 = p_0 / \rho_0$. On a alors

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p(\rho_0)}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma r T_0}. \quad (4.13)$$

Ce résultat n'est pas limité aux systèmes sans équations d'énergie. En effet, si l'hypothèse d'isotropie ou d'isothermie n'est plus valide, on doit alors considérer le système de la dynamique complète des gaz.

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) &= 0, \\ \rho \partial_t u + \rho (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p &= 0, \\ \partial_t p + u \cdot \nabla_X p + \gamma p \nabla_X \cdot u &= 0, \end{aligned}$$

On linéarise le système autour de l'état $\rho_0, u_0 = 0, p_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + u_0 \cdot \nabla_X \rho &= 0, \\ \rho_0 \partial_t u + \nabla_X p &= 0, \\ \partial_t p + \gamma p_0 \nabla_X \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

On procède de même que précédemment, le but est d'obtenir une équation découplée des autres. Pour cela, on prend la dérivée en temps de l'équation de pression qu'on multiplie par ρ_0 et on lui retranche la divergence de l'équation en vitesse multipliée par γp_0 , on obtient

$$\rho_0 \partial_{tt}^2 p - \gamma p_0 \Delta_X p = 0.$$

On retrouve une équation des ondes sur p avec le même terme $c^2 = \gamma p_0 / \rho_0$.

Nous allons voir que cette vitesse du son va nous permettre de définir les zones de validité des régimes compressibles et incompressibles.

4.1.8.3 Nombre de Mach, du compressible vers l'incompressible

Pour simplifier la présentation, nous allons nous placer, dans un premier temps, dans le cas d'une transformation isentropique ou isotherme pour un fluide parfait. On a donc les équations suivantes pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné et tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_X p(\rho) = 0, \\ p(\rho) = C \rho^\gamma, \end{cases}$$

où $C > 0$, $\gamma > 1$ dans le cas isentropique et $\gamma = 1$ et $C = T_0 > 0$ dans le cas isotherme avec T_0 la température du fluide constante dans le cas isotherme.

On va comme on l'a fait pour introduire le nombre de Reynolds, adimensionner le système en choisissant les unités d'adimensionnement suivantes

$L = \text{diam}(\Omega)$	pour les longueurs,	ρ_0	pour les densités,
$t_0 = L/u_0$	pour le temps,	$u_0 > 0$	pour les vitesses.

On effectue alors le changement de variables $(X, t) \mapsto (\bar{X}, \bar{t}) = (X/L, t/t_0)$ et on voit les inconnues comme des fonctions adimensionnées et exprimées en terme de ces nouvelles variables. Ainsi, on pose

$$\rho(X, t) = \rho_0 \bar{\rho}(\bar{X}, \bar{t}), \quad u(X, t) = u_0 \bar{u}(\bar{X}, \bar{t}), \quad p(X, t) = p_0 \bar{p}(\bar{X}, \bar{t}).$$

En omettant les barres, on obtient alors le système adimensionné suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{\gamma \rho_0^\gamma}{\rho_0 u_0^2} \nabla_X p(\rho) = 0, \\ p(\rho) = \rho^\gamma. \end{cases}$$

Le système s'exprime à l'aide du carré d'un seul paramètre adimensionné :

$$M = \sqrt{\frac{u_0^2}{\gamma p_0 / \rho_0}} = \frac{u_0}{c},$$

appelé le nombre de Mach. Ce nombre mesure le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son dans le fluide.

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_X \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{1}{M^2} \nabla_X p(\rho) = 0, \\ p(\rho) = \rho^\gamma. \end{cases}$$

Étudions la limite $M \rightarrow 0$. Remarquons que formellement, la conservation de la quantité de mouvement, nous donne

$$\nabla_X p(\rho) = 0,$$

qui donne ρ constant en espace. Si les conditions aux limites sont indépendantes du temps, on a donc $\rho = \rho_0$ constant en espace et en temps. Alors, l'équation de conservation de la masse nous donne

$$\nabla_X \cdot u(X, t) = 0,$$

c'est à dire l'incompressibilité.

Pour retrouver le modèle d'Euler incompressible formellement, il suffit de supposer que

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M^2} \nabla_X p(\rho) = p_1 < +\infty.$$

Et ainsi, le modèle devient

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \rho_0 = cste, \\ \nabla_X \cdot u(X, t) = 0, \\ \rho_0 \partial_t(u) + \rho_0 (u \cdot \nabla_X)u + p_1 = 0. \end{cases}$$

C'est à dire le modèle d'Euler incompressible.

On voit donc que le nombre de Mach permet de déterminer si on est en régime compressible ou incompressible. On retiendra que si M est petit, l'hypothèse d'incompressibilité est valide sinon le régime est compressible.

4.1.9 Conclusions pour les modèles fluides

Nous n'avons fait qu'entrevoir les connaissances en mécanique des fluides. Nous n'avons parlé que des modèles les plus fréquemment rencontrés dans la littérature. Et même concernant ces modèles, il resterait beaucoup de choses à expliquer. Notamment les problèmes de conditions aux limites et les résultats mathématiques d'existence et d'unicité pour ces modèles. Ces résultats sortent du cadre de ce cours. Toutefois, nous essaierons en travaux dirigés d'entrevoir ces problèmes.

4.2 Equations de l'élasticité linéaire : solide déformable

Chapitre 5

Les équations de Maxwell

Bibliographie

- [1] H. Brezis, “Analyse fonctionnelle, Théorie et applications”, Masson, 1983.
- [2] R. Dautray & J.L. Lions, “Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tomes 1, 2, 7”, Masson, 1987.
- [3] A. J. Chorin, J. E. Marsden, ‘A mathematical introduction to fluid mechanics”, Springer, 1990.
- [4] G. Duvaut, “Mécanique des milieux continus”, Dunod, 2000.
- [5] P. Huère, “Mécanique des milieux continus, Tome 3, Mécanique des fluides”, cours de l’Ecole Polytechnique, 1991.
- [6] J.-Y. Plantec, “Introduction à la mécanique des milieux continus”, cours INSA Toulouse 1997.
- [7] P.A. Raviart & J.M. Thomas, “Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles”, Masson, 1988.
- [8] J.-P. Raymond, “Modélisation-EDP”, cours Master 1 IMAT, Université Toulouse 3, 2010.
- [9] J. Salençon, “Mécanique des milieux continus, Tome 1, Concepts généraux”, cours de l’Ecole Polytechnique, 1989.

Chapitre 6

exercices

Université Paul Sabatier

2011-2012

Modélisation, équations aux dérivées partielles

M1-IMAT - Feuille 1

La dynamique d'un électron soumis à un champ électrique donné et indépendant du temps, peut être modélisé à l'aide d'un système différentiel. En effet, il suffit d'écrire les équations de Newton. On se place en une dimension d'espace, ceci afin de simplifier le problème.

Les variables de position et vitesse sont notées respectivement $x \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$. Le mouvement de l'électron est donné par

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), & \text{pour } t \in [0, T], \\ m v'(t) = q E(x(t)), & \text{pour } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

où $T > 0$ est le temps final d'observation fixé, et où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ sont les données initiales du problème. m est la masse d'un électron et q sa charge.

On remarque que x est solution d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 2 donnée par

$$\begin{cases} x''(t) = E(x(t)), & \text{pour } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Le but de cette feuille est de revoir quelques propriétés des systèmes différentiels ainsi que celles des schémas classiquement utilisés pour discrétiser ces problèmes.

Exercice 1 : (Portraits de phase des systèmes linéaires)

Rappels : On considère le système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

où $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ ou 2) et f est une fonction Lipschitzienne de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R}^d .

- On appelle **point d'équilibre** du système, les zéros de la fonction f . Ils donnent les solutions constantes en temps du système.
- On appelle **portrait de phase** d'un système de \mathbb{R}^2 l'ensemble des courbes paramétrées

$$\mathcal{C}_A = \{(x_A(t), y_A(t)) ; t \in I \subset \mathbb{R}\}$$

où $X(t) = (x_A(t), y_A(t))$ est la solution sur l'intervalle I satisfaisant la condition initiale $X(t_0) = A$ où t_0 est donné dans I . On indique sur ce portrait le sens de la vitesse de parcours par des flèches. L'ensemble des courbes \mathcal{C}_A est appelé l'ensemble des trajectoires du système.

– On dit que le système différentiel (6.2) est **Hamiltonien** s'il existe $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(X(t)) = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)), \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)). \end{cases} \end{cases}$$

La fonction H est appelée le Hamiltonien du système.

– Si le système différentiel (6.2) est Hamiltonien et si $(x(t), y(t))$ est solution de ce système alors

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) = -y'(t) x'(t) + x'(t) y'(t) = 0.$$

1. (**Le cas des équations linéaires**) On considère l'équation linéaire d'ordre 1 donnée par

$$x'(t) = a(x(t) - 1), \quad (6.3)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et où $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) (**Equilibre stable**) Dans cette question $a < 0$.

- i. Donnez la solution générale de (6.3).
- ii. Dessinez ces solutions.
- iii. On considère le portrait de phase sur la figure ci dessous.

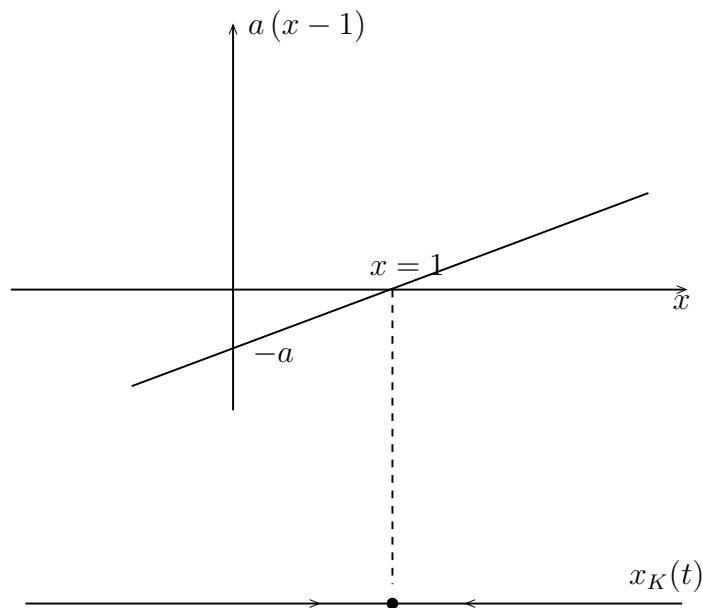


FIGURE 6.1 – Portrait de phase.

Que peut-on dire du point d'équilibre $x = 1$?

(b) (**Equilibre instable**) Dans cette question $a > 0$.

- i. Donnez la solution générale de (6.3).
- ii. Dessinez ces solutions.
- iii. Dessinez le portrait de phase.

Que peut-on dire du point d'équilibre $x = 1$?

2. (Le cas des systèmes linéaires 2×2) On considère le système linéaire homogène

$$X'(t) = A X(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où A est une matrice réelle 2×2 .

On ne considèrera que les cas où A est diagonalisable bien que les autres cas puissent également être traités.

(a) Montrez que $(0, 0)^T$ est un point d'équilibre.

(b) **Premier cas : les valeurs propres sont complexes conjuguées : $\lambda = \alpha \pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$**

On peut montrer dans ce cas que A est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi il existe P une matrice réelle inversible telle que $A = P^{-1} B P$, on introduit alors $Z = P X$ et ainsi en multipliant le système différentiel par P , il vient

$$Z'(t) = P X'(t) = P A X(t) = P P^{-1} B P X(t) = B Z(t) = B \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

i. Si $\alpha = 0$, montrez que le système est Hamiltonien. Déduisez en le portrait de phase.

ii. Si $\alpha \neq 0$, on pose $(r(t), \theta(t)) \in \{0, 0\} \cup]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ les coordonnées polaires $X(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Montrez que $r'(t) = \alpha r(t)$ et $\theta'(t) = \beta$. Déduisez en le portrait de phase pour $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ et $\beta < 0$.

(c) **Deuxième cas : les valeurs propres sont réelles et distinctes.**

On peut montrer dans ce cas que A est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

avec λ et μ réels.

i. Si $\det(B) = \lambda \mu = 0$, donnez les solutions, tracez le portrait de phase suivant le signe de la valeur propre non nul.

ii. Si $\det(B) = \lambda \mu > 0$, donnez les solutions (z_1, z_2) . Montrez que z_1 (et z_2) est une fonction soit nulle, soit strictement positive, soit strictement négative. Montrez que pour $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$

$$\left(\frac{z_1}{K_1}\right)^\mu = \left(\frac{z_2}{K_2}\right)^\lambda,$$

où K_1 et K_2 sont des constantes respectivement du même signe que z_1 et z_2 .

Tracez le portrait de phase pour $(\lambda, \mu) = (1, 2)$ et $(\lambda, \mu) = (-1, -2)$.

iii. Si $\det(B) = \lambda \mu < 0$, tracez le portrait de phase pour $(\lambda, \mu) = (1, -1)$.

(d) **Troisième cas : Une valeur propre double.**

On peut montrer dans ce cas que A est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec λ réel.

- i. Donnez les solutions.
- ii. Tracez le portrait de phase dans les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

Exercice 2 : (Conservation de l'énergie, schéma symplectique)

Soit le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. Montrez que (S) est Hamiltonien, et que son Hamiltonien est donné par $H(x, y) = x^2 + y^2$. Ainsi $H(x(t), y(t)) = E(t) = x^2(t) + y^2(t)$ est constant au cours du temps. En déduire la forme de la trajectoire du point $M(t)$ de composantes $(x(t), y(t))$. E est appelé l'énergie totale du système, si x est la position et y la vitesse, expliquez ce que chacun des termes de l'énergie représente.
3. (a) Le schéma d'Euler explicite avec pas constant Δt appliqué à (S), est donné par

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = y^n, \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -x^n. \end{cases}$$

Étudier le comportement de la suite $E_n = x_n^2 + y_n^2$.

- (b) Que peut-on en déduire pour l'approximation de la trajectoire obtenue par ce schéma ?
4. (a) Le schéma d'Euler implicite avec pas constant Δt appliqué à (S), est donné par

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = y^{n+1}, \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -x^{n+1}. \end{cases}$$

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

- (b) Etudier le comportement de la suite $E_n = x_n^2 + y_n^2$.
- (c) Que peut-on en déduire pour l'approximation de la trajectoire obtenue par ce schéma ?
5. (a) Le schéma de Crank-Nicolson avec pas constant Δt appliqué à (S), est donné par

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2}, \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -\frac{x^{n+1} + x^n}{2}. \end{cases}$$

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

- (b) Etudier le comportement de la suite $E_n = x_n^2 + y_n^2$.
- (c) Que peut-on en déduire pour l'approximation de la trajectoire obtenue par ce schéma ?

Exercice 3 : (Comportement asymptotique de la solution continue et des schémas d'Euler)

On considère l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \lambda x'(t) + x(t) = b, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ x(0) = x_0 > b. \end{cases} \quad (6.4)$$

avec $\lambda > 0$ et $b > 0$.

1. Déterminez la solution de (6.4). Etudiez cette solution et représentez la graphiquement.
2. Etude du schéma d'Euler explicite
 - (a) Ecrivez le schéma d'Euler explicite associé à une discrétisation uniforme de pas $\Delta t > 0$. On notera $(x_n)_{n \geq 0}$ la solution approchée donnée par ce schéma.
 - (b) Etudiez le signe et la monotonie de la suite $(x_n - b)_{n \geq 0}$.
 - (c) Déduisez en comment choisir Δt pour que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ soit positive.
 - (d) Comment faut-il choisir Δt pour que $(x_n)_{n \geq 0}$ ait le même comportement asymptotique que la solution exacte (même monotonie et même limite en $+\infty$)?
3. Etude du schéma d'Euler implicite
 - (a) Ecrire le schéma d'Euler implicite associé à une discrétisation uniforme de pas $\Delta t > 0$. On notera $(y_n)_{n \geq 0}$ la solution approchée donnée par ce schéma.
 - (b) Etudiez le signe et la monotonie de la suite $(y_n - b)_{n \geq 0}$.
 - (c) Conclure.

Modélisation, équations aux dérivées partielles

M1-IMAT - Feuille 2 - Résolution de l'équation de la chaleur par transformée de Fourier

Exercice 1 : (Établissement de l'équation de la chaleur.)

On considère un milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) au repos, c'est à dire tel que la vitesse de chaque point matériel est nulle $u = 0$. On suppose que l'énergie interne spécifique e est proportionnelle à la température T . En utilisant les équations de conservation établies pour un milieu continu général, montrez qu'il se réduit à la résolution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t T(x, t) - \Delta T(x, t) = g(x, t),$$

pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $t > 0$.

Exercice 2 : (Existence de solutions sur \mathbb{R}^d , utilisation de la transformée de Fourier)

On commencera par lire les rappels sur la transformée de Fourier donnés à la fin de cette feuille.

On considère le problème de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (6.5)$$

où $\lambda > 0$ et où $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est la condition initiale.

1. En supposant l'existence de la transformée de Fourier en x de u pour tout $t > 0$, montrez que $\mathcal{F}(u)(\xi, t)$ est solution d'une équation différentielle.

2. Déterminez $\mathcal{F}(u)$ en fonction de la transformée de Fourier de u_0 .

3. Déduisez en u en fonction de la convolée de u_0 et d'une fonction régulière $E(x, t)$ que l'on déterminera. E est appelée la solution élémentaire de l'équation de la chaleur.

4. On suppose dans cette question que $u_0 = \delta_0$, calculez u . Que remarque-t-on en terme de régularité? Calculez la quantité de chaleur dans le domaine à l'instant initial et pour tout temps $t > 0$. Que remarque-t-on?

5. On se place en dimension une et on suppose $u_0 = \delta_0$, on veut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \delta_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(a) Ecrire ce que la limite précédente veut dire mathématiquement.

(b) En remarquant que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = 1,$$

et en utilisant un développement de Taylor sur la fonction test montrez que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \delta_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

On pourra remarquer que cette convergence est en $\mathcal{O}(t)$ grâce à la parité de la fonction $x \mapsto u(x, t)$. 6. On reste en dimension une, on considère alors l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \lambda \partial_{xx}^2 u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.6)$$

où $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}^*$ et où $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est la condition initiale.
Résoudre cette équation à l'aide de la transformée de Fourier.

7. On reste en dimension une, on considère alors l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \lambda \partial_{xx}^2 u(x, t) = f(x, t) & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.7)$$

où $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction régulière et où $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est la condition initiale.
Résoudre cette équation à l'aide de la transformée de Fourier.

Quelques rappels utiles sur la transformée de Fourier :

- On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz. On rappelle que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si $\phi \in C^\infty$ et si toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, c'est à dire que leur produit par un polynôme quelconque est une fonction bornée. On a donc

$$\sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < +\infty \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

- Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on désigne par $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

- De plus la transformée de Fourier inverse de f , notée $\mathcal{F}^{-1}(f)$ est donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} f(\xi) d\xi,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$.
- Transformée de Fourier d'une Gaussienne :

$$\mathcal{F}(x \mapsto e^{-a|x|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/(4a)}, \quad \text{où } a > 0.$$

- Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi).$$

- Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que u est une distribution à support compact s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tel que $u|_\Omega \equiv 0$ et si $|\mathbb{R}^d \setminus \Omega| < +\infty$ où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue d dimensionnelle. On désigne par $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à support compact.
- Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \langle u(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d), C^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

- Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit le produit de convolution de u et f , noté $u * f$, par la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u * f(x) = \langle u(y), f(x - y) \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d), C^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

- Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\mathcal{F}(u * f) = (\mathcal{F}(u))(\mathcal{F}(f)).$$

Modélisation, équations aux dérivées partielles

Master 1 IMAT, Feuille 3

Introduction aux problèmes spectraux et aux problèmes paraboliques

1. On considère le problème de l'équation de la chaleur, qui consiste à trouver $u :]0, 1[\times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pour } t \in]0, T[, \end{cases} \quad (6.8)$$

où $T > 0$ et $u_0 \in L^2(]0, 1[)$ est appelée la condition initiale.

On pose $u(x, t) = \phi(t) w(x)$ pour tout $(x, t) \in]0, 1[\times]0, T[$.

Montrez que le problème (6.8) se ramène à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $w \neq 0$ tels que

$$\begin{cases} -w''(x) = \lambda w(x) & \text{pour tout } x \in]0, 1[\\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Déterminez ϕ en fonction de λ .

2. On s'intéresse dans cette question à la résolution de (6.9).
- Montrez que toute solution faible de (6.9) est en fait solution classique de (6.9).
 - Montrez que si $\lambda \leq 0$ alors le problème (6.9) est elliptique et admet donc une unique solution faible que l'on précisera.
 - On considère $\lambda > 0$, déterminez les solutions faibles de (6.9).
 - En déduire qu'il existe $\mathcal{S} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$ tel que $\lambda_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et tel que
 - S'il n'existe pas $n \geq 1$ tel que $\lambda = \lambda_n$ alors (6.9) n'admet que 0 comme solution faible.
 - S'il existe $n \geq 1$ tel que $\lambda = \lambda_n$ alors (6.9) admet une infinité de solutions données par $w = C w_n$ où $C \in \mathbb{R}$ et $w_n \in C^\infty([0, 1])$ est une solution de (6.9) telle que $\|w_n\|_{L^2(]0, 1])} = 1$ que l'on déterminera.

Les λ_n sont appelées les valeurs propres de $-\frac{d^2}{dx^2}$ et w_n est le vecteur propre associé à λ_n .

3. On va montrer dans cette question que $(w_1, w_2, \dots, w_n, \dots)$ est une base hilbertienne orthonormale de $L^2(]0, 1])$.
- On note (\cdot, \cdot) le produit scalaire de $L^2(]0, 1])$. Montrez que $(w_n, w_m) = \delta_{mn}$ pour tout $n, m \geq 1$.
 - Soit $f \in C_c^1(]0, 1])$, on définit $F \in C^1(\mathbb{R})$ périodique de période 2 et impaire par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

On considère la série de Fourier :

$$S(f)(x) = \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)].$$

avec

$$a_n = \int_{-1}^1 \cos(n\pi x) F(x) dx \quad \text{et} \quad b_n = \int_{-1}^1 \sin(n\pi x) F(x) dx.$$

Calculez a_n et b_n en fonction de f . On sait, d'après le Théorème de Dirichlet que $f(x) = S(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ car F est $C^1(\mathbb{R})$.

- (c) Dans cette question f désigne une fonction de $L^2(]0, 1[)$. En utilisant la densité de $C_c^1(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$, on veut montrer que

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} (w_n, f) w_n(x),$$

pour presque tout $x \in]0, 1[$.

- i. Montrez que pour tout $g \in L^2(]0, 1[)$ et tout $k \geq 1$, on a

$$u_k = \sum_{n=1}^k (g, w_n)^2 \leq \|g\|_{L^2(]0, 1[)}^2$$

et que donc $(u_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}$ est convergente vers $u \geq 0$.

- ii. On introduit la suite des sommes partielles $(S_k(f))_{k \geq 1}$ définie par $S_k(f) = \sum_{n=1}^k (w_n, f) w_n$ pour tout $k \geq 1$. Déduisez de la question précédente que $(S_k(f))_{k \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^2(]0, 1[)$ et que donc, elle converge vers $S(f) \in L^2(]0, 1[)$.
- iii. Montrez que pour tout $g \in L^2(]0, 1[)$

$$\sum_{n \geq 1} (g, w_n)^2 \leq \|g\|_{L^2(]0, 1[)}^2.$$

- iv. Montrez alors que $\|f - S(f)\|_{L^2(]0, 1[)} = 0$.

4. D'après la question précédente u_0 se décompose dans la base hilbertienne, montrez que la fonction donnée par

$$\sum_{n \geq 1} (w_n, u_0) w_n(x) \exp(-\lambda_n t)$$

pour tout $(x, t) \in]0, 1[\times]0, T]$ est solution de (6.8).

Modélisation, équations aux dérivées partielles

M1-IMAT - Feuille 4

Équations et systèmes hyperboliques

Exercice 1 : (Entrainement de calculs) On se place en dimension deux, on note $X = (x, y)$ les variables.

- On considère U une fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 définie par $U(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ et ρ une fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Montrez que

$$\begin{aligned}\nabla_X \cdot (\nabla_X U) &= \Delta_X U, \\ \nabla_X \cdot ((\nabla_X U)^T) &= \nabla_X (\nabla_X \cdot U), \\ \nabla_X \cdot (\rho U \otimes U) &= \rho (U \cdot \nabla_X) U + \nabla_X \cdot (\rho U) U.\end{aligned}$$

- En utilisant les notations précédentes, écrire le système d'Euler isentropique en dimension deux tout d'abord en utilisant les variables conservatives, puis les variables physiques.

Exercice 1 : (Équations linéaires en dimension une)

On considère $a > 0$ et l'équation hyperbolique suivante

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + a \partial_x u(x, t) &= 0, & \forall (x, t) \in]-1, 1[\times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1, x) &= \alpha(t), & \forall t \in]0, +\infty[.\end{aligned}\tag{6.10}$$

- Ecrire l'équation des courbes caractéristiques associées à cette équation.
- En déduire la solution de cette équation en tout $(x, t) \in]0, 1[\times]0, +\infty[$.

Exercice 2 : (Systèmes linéaires en dimension une)

On considère le système d'Euler isentropique en dimension une, donné par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) + \partial_x p(\rho) = 0, \\ p(\rho) = \rho^\gamma, \end{cases}\tag{6.11}$$

avec $\gamma > 1$.

- On choisit (ρ, q) pour variables avec $q = \rho u$. Linéarisez le système autour de la solution constante donnée par (ρ_0, q_0) avec $\rho_0 > 0$ et $q_0 \in \mathbb{R}^*$.
- Montrez que le système linéarisé s'écrit sous la forme

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} + A \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} = 0,$$

où A est une matrice 2×2 que l'on précisera.

- Montrez que A est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres et vecteurs propres.

4. On suppose dans cette question que le problème est posé pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on se donne une condition initiale

$$\begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} (x, 0) = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ q_0 \end{pmatrix} (x).$$

Résoudre le système.

5. On suppose dans cette question que le problème est posé pour tout $x \in]0, 1[$ et on se donne la même condition initiale que dans la question précédente. Précisez combien de conditions aux limites il faut se donner pour que le problème soit bien posé. On pourra considérer différents cas suivant les valeurs de ρ_0 et q_0

Modélisation, équations aux dérivées partielles

M1-IMAT - Feuille 5

Le système de Stokes stationnaire

Le but de ce problème est l'étude des équations de Stokes stationnaires qui décrivent le mouvement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène en temps grand.

1. Etablissement du modèle stationnaire

Le domaine d'étude est un ouvert Ω borné, connexe, régulier inclus dans \mathbb{R}^2 . Le fluide considéré est supposé de densité constante égale à ρ_0 .

On note $\vec{U}(x, y, t) = (u_1(x, y, t), u_2(x, y, t))$, son champ de vitesses, et $p(x, y, t)$ sa pression, pour toute position $X = (x, y) \in \Omega$ et tout $t \in]0, T[$ où $T > 0$ le temps final de description donné.

Ces quantités \vec{U} et p sont solutions du système de Stokes donné par :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(X, t) - \nu \Delta \vec{U}(X, t) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p(X, t) = \vec{f}(X), \quad \text{pour } X \in \Omega \text{ et } t \in]0, T[\quad (6.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}(X, t) = 0, \quad \text{pour } X \in \Omega, \quad (6.13)$$

$$\vec{U}(x, t) = 0, \quad \text{pour } X \in \partial\Omega, \quad (6.14)$$

La fonction vectorielle $\vec{f}(X, t) = (f_1(X), f_2(X)) \in L^2(\Omega)^2$ est donnée et représente les forces exercées sur le fluide et $\nu \in]0, +\infty[$ est le coefficient de viscosité cinématique du fluide.

- (a) Ecrire les équations de ce système en (u_1, u_2, p) .
- (b) On veut adimensionner le système. Pour cela, on choisit comme unité d'adimensionnement : T pour le temps, $L = \text{diam}(\Omega)$ pour les longueurs. On introduit le changement de variables $\bar{X} = X/L$ et $\bar{t} = t/T$. On définit alors les inconnues adimensionnées par $(\bar{u}_1(\bar{X}, \bar{t}), \bar{u}_2(\bar{X}, \bar{t})) = (u_1(X, t), u_2(X, t))/V_0$, $\bar{p}(\bar{X}, \bar{t}) = p(X, t)/p_0$, où V_0 et p_0 sont les ordres de grandeurs des vitesses et des pressions. Et, on suppose qu'il existe (\bar{f}_1, \bar{f}_2) telles que $(f_1(X, t), f_2(X, t)) = f_0(\bar{f}_1(\bar{X}, \bar{t}), \bar{f}_2(\bar{X}, \bar{t}))$, où f_0 est donné.

On suppose $\frac{L/V_0}{T} = \varepsilon \ll 1$, $\nu = V_0 L$, $p_0 = \rho_0 V_0^2$ et $L f_0 = V_0^2$.

Montrez que le système adimensionné, en omettant les "barres", s'écrit

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(X, t) - \Delta \vec{U}(X, t) + \nabla p(X, t) = \vec{f}(X), \quad \text{pour } X \in \Omega \text{ et } t \in]0, T[\quad (6.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}(X, t) = 0, \quad \text{pour } X \in \Omega, \quad (6.16)$$

$$\vec{U}(x, t) = 0, \quad \text{pour } X \in \partial\Omega, \quad (6.17)$$

On peut montrer que la solution $(\vec{U}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ tend vers (\vec{U}, p) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ telles que (\vec{U}, p) ne dépendent pas de t et sont solutions du système stationnaire de Stokes

$$-\Delta \vec{U}(X) + \nabla p(X) = \vec{f}(X), \quad \text{pour } X \in \Omega, \quad (6.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}(X) = 0, \quad \text{pour } X \in \Omega, \quad (6.19)$$

$$\vec{U}(X) = 0, \quad \text{pour } X \in \partial\Omega, \quad (6.20)$$

que nous allons étudier dans les questions suivantes.

2. Existence et unicité d'une solution

(a) On introduit l'espace

$$\mathcal{V} = \{\vec{V} \in H_0^1(\Omega)^2; \nabla \cdot \vec{V} = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

et on désigne par $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ le produit scalaire usuel sur $H^1(\Omega)$.

Montrez que \mathcal{V} , muni du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)^2$, est un espace de Hilbert.

(b) Montrez que la formulation variationnelle du problème (6.18)-(6.20) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{U}, p) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} p(X) dX = 0 \text{ et tel que} \\ a(\vec{U}, \vec{V}) - \int_{\Omega} p(X) \nabla \cdot \vec{V}(X) dX = b(\vec{V}), \\ \text{pour tout } \vec{V} \in H_0^1(\Omega)^2 \end{array} \right. \quad (6.21)$$

où

$$b(\vec{V}) = \int_{\Omega} \vec{f}(X) \cdot \vec{V}(X) dX. \quad (6.22)$$

Attention on expliquera bien pourquoi il est nécessaire de choisir p à moyenne nulle, pour cela on pensera à remplacer p par une constante et à utiliser la formule de Green.

(c) Montrez qu'il existe un unique $\vec{X} \in \mathcal{V}$ tel que

$$a(\vec{W}, \vec{V}) = b(\vec{V}) \quad \text{pour tout } \vec{V} \in \mathcal{V}. \quad (6.23)$$

(d) On admet dans cette question le résultat suivant

Théorème 6.1 *Soit $L \in H^{-1}(\Omega)^2$, alors on a l'équivalence suivante*

$$L(\vec{V}) = 0, \quad \forall \vec{V} \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \in L^2(\Omega) \text{ telle que } L(\vec{V}) = \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \vec{V}, \quad \forall \vec{V} \in H_0^1(\Omega)^2$$

de plus φ est unique à une constante près.

Soit \vec{W} la solution de (6.23), on introduit $L(\vec{V}) = a(\vec{W}, \vec{V}) - b(\vec{V})$ pour tout $\vec{V} \in H_0^1(\Omega)^2$. Montrez qu'il existe une unique solution (\vec{U}, p) de (6.21) et donc de (6.18)-(6.20) au sens faible.

3. Discrétisation par éléments finis

(a) Montrez que (6.21) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{U}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} p(X) dX = 0 \text{ et tel que} \\ \qquad \qquad \qquad a(\vec{U}, \vec{V}) - \int_{\Omega} p(X) \nabla \cdot \vec{V}(X) dX = b(\vec{V}), \quad \text{pour tout } \vec{V} \in H_0^1(\Omega)^2 \\ \int_{\Omega} q(X) \nabla \cdot \vec{U}(X) dX = 0, \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.24)$$

(b) On suppose que le domaine est rectangulaire, proposez une discrétisation par éléments finis.

Examen final - M1 IMAT
Modélisation, équations aux dérivées partielles

Durée 2h

Les deux parties sont indépendantes

Partie I (Le pendule simple)

On considère une masse m suspendue par un fil rigide de longueur L et de masse négligeable. On lâche cette masse sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, le fil faisant un angle $\theta_0 > 0$ avec la verticale. On désigne par $\theta(t)$ l'angle orienté entre la verticale passant par le point O de suspension et la direction du fil à l'instant $t > 0$. Le théorème du moment cinétique permet d'écrire :

$$m L \theta''(t) + m g \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta''(t) + w^2 \sin \theta = 0, \tag{1}$$

pour tout $t > 0$ et où g désigne la constante de gravité et où $w = \sqrt{g/L}$.

1. Donnez les conditions initiales satisfaites par (1).
2. Montrez que (1), s'écrit sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 de la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)), \tag{2}$$

où f est une fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 qu'on précisera.

3. On suppose, dans cette question seulement, que les angles sont petits. Linéarisez (autour de 0) l'équation (1). Résolvez cette équation linéaire d'ordre 2 et tracez son portrait de phase.
4. On revient dans le cas non linéaire. Montrez que le système (2) est Hamiltonien d'Hamiltonien donné par

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - w^2 \cos x.$$

5. (Question hors barème)

- (a) Déduisez en que pour tout $t \geq 0$

$$\frac{(\theta'(t))^2}{2} - w^2 \cos(\theta(t)) = -w^2 \cos \theta_0.$$

- (b) En remarquant que pour des temps suffisamment petits $t < t_c$, on a $\theta'(t) < 0$, et en utilisant la formule de trigonométrie $\cos p - \cos q = -2 \sin((p+q)/2) \sin((p-q)/2)$, déterminez g fonction réelle telle que

$$\theta'(t) = g(\theta(t)),$$

pour tout $t < t_c$.

- (c) Déduisez en que

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{du}{g(u)} = t,$$

pour tout $t < t_c$.

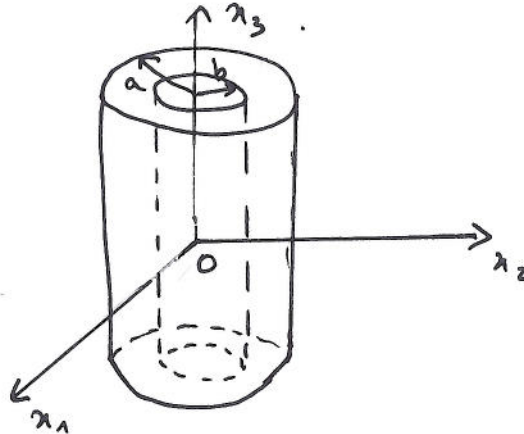
Partie II (Ecoulement de Couette)

On considère le système suivant

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot u = 0, \\ \rho_0 \partial_t u + \rho_0 (u \cdot \nabla_X) u + \nabla_X p - \mu \Delta_X u = 0, \end{cases} \quad (3)$$

pour presque tout $X = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et tout $t > 0$, et où $\rho_0 > 0$ est donné.

1. On considère un fluide régi par les équations (3). Alors, ρ_0 est la densité constante du fluide, u est sa vitesse et p sa pression. Que peut-on dire d'un tel fluide ?
 - (a) Le fluide est homogène et compressible.
 - (b) Le fluide est parfait et incompressible.
 - (c) Le fluide est homogène et incompressible.
 - (d) Le fluide est parfait, homogène et incompressible.
2. On suppose dans cette question que l'écoulement a lieu entre deux cylindres circulaires coaxiaux d'axes (Ox_3) de rayons respectifs a, b avec $a > b > 0$. Le cylindre intérieur est fixe et le cylindre extérieur est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Ox_3) de vitesse angulaire $w > 0$.



On suppose que l'écoulement est stationnaire et que la longueur du cylindre est très grande par rapport à a et b de manière à pouvoir négliger ce qui se passe aux deux extrémités du cylindre. Alors, le champ de vitesse est donné par $u = (u_1, u_2, 0)$ et $u_i = u_i(x_1, x_2)$ pour $i = 1$ ou 2 . De même, on a $p = p(x_1, x_2)$.

Les équations (3) deviennent

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad (4)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} u_2 \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \Delta u_1, \quad (5)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_2 \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \Delta u_2, \quad (6)$$

pour tout (x_1, x_2) tels que $a > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > b$.

Ce système est fermé à l'aide des conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) = 0, & \text{pour tout } (x_1, x_2) \text{ tels que } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = b, \\ u_1(x_1, x_2) = -w x_2, \text{ et } u_2(x_1, x_2) = w x_1, & \text{pour tout } (x_1, x_2) \text{ tels que } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a. \end{cases} \quad (7)$$

Enfin, on cherche un écoulement laminaire dont les lignes de courant sont des cercles d'axe (Ox_3) , ainsi on suppose qu'il existe v fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} telle que

$$u_1 = -\frac{x_2}{r} v(r, \theta), \quad u_2 = \frac{x_1}{r} v(r, \theta),$$

où $(r, \theta) \in]b, a[\times]0, 2\pi[$ sont les coordonnées polaires définies par $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$.

- (a) Ecrivez les conditions aux limites sur v .
 (b) En remarquant que $\partial r / \partial x_1 = x_1 / r$, $\partial r / \partial x_2 = x_2 / r$, $\partial \theta / \partial x_1 = -r / \sin \theta$ et $\partial \theta / \partial x_2 = r / \cos \theta$, montrez que

$$(4) \Leftrightarrow 2r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{r} \right) = 0$$

- (c) Déduisez de la question précédente que v ne dépend pas de θ .
 (d) Compte tenu du fait que v ne dépend pas de θ , on écrit les équations (5) et (6) pour un θ particulier. On choisit $\theta = 0$. On obtient alors le système suivant

$$-\rho_0 \frac{v^2}{r} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \frac{1}{r} = \mu \left[4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right) \right], \tag{9}$$

où $\tilde{p}(r, \theta) = p(x_1, x_2)$.

Montrez que (9) entraîne

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0. \tag{10}$$

- (e) En intégrant (10) et en remarquant que la fonction $\theta \mapsto \tilde{p}(r, \theta)$ doit être périodique pour tout r , déduisez de la question précédente que

$$\tilde{p}(r, \theta) = \tilde{p}(r).$$

- (f) En reportant ce résultat dans (9) et en posant $g(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right)$, déterminez l'équation différentielle satisfaite par g puis résolvez la.
 (g) Déduisez de la question précédente et des conditions aux limites, la vitesse v .
 (h) En utilisant (8), déterminez \tilde{p} à une constante près.