

# La modélisation mathématique des plasmas au service des technologies spatiales

C. Besse <sup>(1)</sup>  
P. Degond <sup>(2)</sup>  
M. H. Vignal <sup>(3)</sup>

6 Septembre 2001

MIP, UMR 5640 (CNRS-UPS-INSA)  
Université Paul Sabatier  
118, route de Narbonne, 31062 TOULOUSE cedex, FRANCE  
email: <sup>(1)</sup> besse@mip.ups-tlse.fr,  
<sup>(2)</sup> degond@mip.ups-tlse.fr  
<sup>(3)</sup> vignal@mip.ups-tlse.fr



# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>L'environnement spatial: quelques notions de base</b>	<b>9</b>
2.1	Quelques échelles . . . . .	9
2.2	Le soleil et le vent solaire . . . . .	9
2.2.1	Le soleil . . . . .	9
2.2.2	Le vent solaire . . . . .	11
2.2.3	Effets de l'activité solaire sur l'environnement terrestre . . . . .	13
2.3	Qu'est ce qu'un plasma ? . . . . .	14
2.3.1	Définition générale . . . . .	14
2.3.2	Plasmas froids et plasmas chauds . . . . .	14
2.3.3	Autres aspects des plasmas . . . . .	15
2.4	La magnétosphère terrestre . . . . .	17
2.4.1	Les sources du plasma magnétosphérique . . . . .	17
2.4.2	Circulation du plasma chaud . . . . .	18
2.4.3	Circulation du plasma froid . . . . .	21
2.4.4	Conséquences sur les satellites . . . . .	21
2.5	L'ionosphère . . . . .	22
2.5.1	Structure stratifiée de l'ionosphère . . . . .	22
2.5.2	Les sources du champ électrique et des courants ionosphériques . . . . .	24
2.5.3	Appendice: modèle de la couche de Chapman . . . . .	27
2.6	Conclusion . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Modélisation des irrégularités ionosphériques</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Modèle d'Euler-Maxwell . . . . .	34
3.2.1	Notations et unités . . . . .	34
3.2.2	Equations de conservation des densités de particules . . . . .	35
3.2.3	Equations de bilan d'impulsion des particules . . . . .	37
3.2.4	Equations de Maxwell . . . . .	38
3.2.5	Bilan des équations décrivant le plasma . . . . .	43
3.3	Adimensionnement du modèle . . . . .	44
3.3.1	Principe . . . . .	44

3.3.2	Jeu de grandeurs de référence pour la modélisation de l'ionosphère . . . . .	45
3.3.3	Le système d'Euler-Maxwell adimensionné . . . . .	46
3.4	Le modèle dynamo tridimensionnel . . . . .	53
3.4.1	Suppression des termes négligeables . . . . .	53
3.4.2	Résolution des équations de Maxwell . . . . .	55
3.4.3	Interprétation des paramètres $\bar{\nu}_e/\bar{\omega}$ , $\bar{\nu}_i/\bar{\omega}$ , $\bar{\eta}^2/\bar{\omega}$ . . . . .	56
3.4.4	Résolution de l'équation (3.4.23) . . . . .	57
3.4.5	Résolution des équations d'impulsion (3.4.21)-(3.4.22) . . . . .	60
3.4.6	équations sur le potentiel $\phi$ . . . . .	62
3.4.7	Bilan du modèle dynamo tridimensionnel . . . . .	63
3.4.8	Conditions aux limites . . . . .	64
3.5	modèle dynamo quasi-bidimensionnel . . . . .	65
3.5.1	Limite $\kappa_e \rightarrow 0$ et établissement du modèle . . . . .	65
3.5.2	Bilan du modèle dynamo quasi-bidimensionnel . . . . .	70
3.5.3	Modèle en couches . . . . .	71
3.5.4	La limite $\kappa_i \rightarrow 0$ : le modèle "striations" . . . . .	72
3.6	Modèle striations et instabilité de dérive . . . . .	74
3.6.1	Modèle striations bidimensionnel . . . . .	74
3.6.2	Instabilité de dérive en $E \times B$ : théorie phénoménologique . . . . .	74
3.6.3	Analyse de stabilité du modèle striations; cas d'un profil de densité exponentiel . . . . .	77
3.6.4	Analyse de stabilité du modèle striations; cas d'une densité discontinue . . . . .	80
3.7	Modélisation de la turbulence au sein du modèle "striations" . . . . .	87
3.7.1	Modèle "striations" turbulent . . . . .	87
3.7.2	Modèle "striations" turbulent et instabilité de dérive . . . . .	91
3.7.3	Choix de la constante de diffusion et expression générale de l'opérateur de diffusion . . . . .	96
3.7.4	Conclusion . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Décharges sur les satellites</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	Présentation du problème . . . . .	99
4.2	Le scénario du claquage . . . . .	100
4.2.1	Le processus global . . . . .	100
4.2.2	La décharge primaire . . . . .	101
4.2.3	Quelques ordres de grandeur . . . . .	102
4.3	Le modèle de base : l'équation de Vlasov . . . . .	105
4.3.1	Introduction . . . . .	105
4.3.2	Équation de Vlasov . . . . .	106
4.3.3	Quelques exemples . . . . .	109
4.3.4	Prise en compte des collisions . . . . .	110
4.3.5	Prise en compte des conditions aux limites . . . . .	110
4.3.6	Propriétés de l'équation de Vlasov . . . . .	111
4.4	Limite dans un potentiel de surface . . . . .	113

4.4.1	Notations et modèle de base . . . . .	113
4.4.2	Passage à la limite . . . . .	116
4.4.3	Applications . . . . .	122
4.5	Limite SHE du modèle Boltzmann 1D . . . . .	124
4.5.1	Introduction . . . . .	124
4.5.2	Passage à la limite . . . . .	127
4.5.3	Propriétés et généralisations possibles du modèle SHE . . . . .	131
4.6	Limite SHE-Énergie Transport . . . . .	132
4.6.1	Établissement du modèle . . . . .	132
4.6.2	Propriétés et application . . . . .	136
4.7	Résultats numériques . . . . .	138



# Chapter 1

## Introduction

Les technologies spatiales impliquent la quasi-totalité des disciplines scientifiques et technologiques, que ce soit la mécanique des structures, la mécanique des fluides, le contrôle, l'automatique, l'informatique, l'électronique, etc. Dans ce travail, on se restreindra aux aspects liés aux plasmas: ceux de l'environnement spatial (l'ionosphère), ceux créés par des conditions de fonctionnement anormal du satellite (décharges induites), ceux utilisés à des fins technologiques (propulsion par plasma). Bien entendu, là encore, il s'agit d'un choix restrictif, bien d'autres aspects des plasmas pouvant être liés aux technologies spatiales.

L'objectif de cet ouvrage est de fournir une initiation à la démarche de modélisation mathématique en physique, laquelle peut se décomposer en une série d'étapes (nécessairement imbriquées les unes dans les autres):

1. Considération du problème physique,
2. Description par un jeu adéquat d'équations,
3. Réduction, simplification de ce jeu d'équations à l'aide de considérations d'échelles, d'adimensionnement, et de limites asymptotiques, afin de parvenir au jeu d'équations définitif ('le modèle'),
4. Etude (lorsque c'est possible) des propriétés mathématiques de ce système,
5. Choix d'une méthode numérique adaptée,
6. Mise en oeuvre sur ordinateur, choix de cas tests, validation, interprétation des résultats, visualisation, exploitation du code à des fins de prédiction ou de production.

Dans ce cours, on se concentrera sur les trois premiers points, ainsi que sur certains aspects du dernier, les autres points étant développés abondamment dans d'autres ouvrages.

La démarche du modélisateur est indépendante de l'application considérée. Les méthodologies développées dans cet ouvrage peuvent être transposées à d'autres contextes scientifiques (avec les adaptations nécessaires).

Cet exposé est plutôt conçu pour un public ayant une formation de mathématique et souhaitant s'initier à la modélisation physique. Cependant, les notions mathématiques manipulées

restent relativement élémentaires, de façon à ne pas dérouter des lecteurs plus physiciens. C'est ainsi que sont rappelés à titre d'exercice un certain nombre de propriétés importantes des équations de Maxwell, à destination d'un lectorat plus mathématicien, et à l'inverse, les notions de solutions faibles des problèmes hyperboliques sont exposées succinctement et élémentairement, afin que l'exposé reste abordable pour un non mathématicien.

# Chapter 2

## L'environnement spatial: quelques notions de base

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux plasmas de l'environnement terrestre qui influent sur le fonctionnement des satellites. Après avoir situé brièvement quelques échelles, nous étudions successivement, des plus lointains objets aux plus proches: le soleil, la magnétosphère terrestre et l'ionosphère. Au passage, nous aurons donné une brève présentation des plasmas. On pourra trouver un exposé plus complet dans [34].

### 2.1 Quelques échelles

Le soleil est une étoile de 1,4 millions de kilomètres de diamètre. En comparaison, le diamètre de la planète terre est d'environ 12000 kilomètres. La distance terre soleil (ou unité astronomique) est de 150 millions de kilomètres (voir figure 2.1).

Les satellites orbitent autour de la terre soit en orbite basse (quelques milliers de kilomètres d'altitude) ou géostationnaire (36000 kilomètres) (voir figure 2.2). L'orbite géostationnaire a la propriété que l'objet reste constamment au dessus du même point terrestre. L'utilisation des satellites est très variable: observation de la terre (à des fins civiles ou militaires), télécommunications, mesures scientifiques. Certains satellites scientifiques quittent une orbite terrestre pour explorer le système solaire. Ils traversent alors des milieux encore plus variés que ceux décrits dans la suite de ce chapitre.

### 2.2 Le soleil et le vent solaire

Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [31] ou à l'ouvrage [29].

#### 2.2.1 Le soleil

L'énergie produite par le soleil provient des réactions nucléaires qui convertissent l'Hydrogène en Hélium avec perte de masse. L'énergie de masse ainsi libérée correspond à l'énergie rayonnée

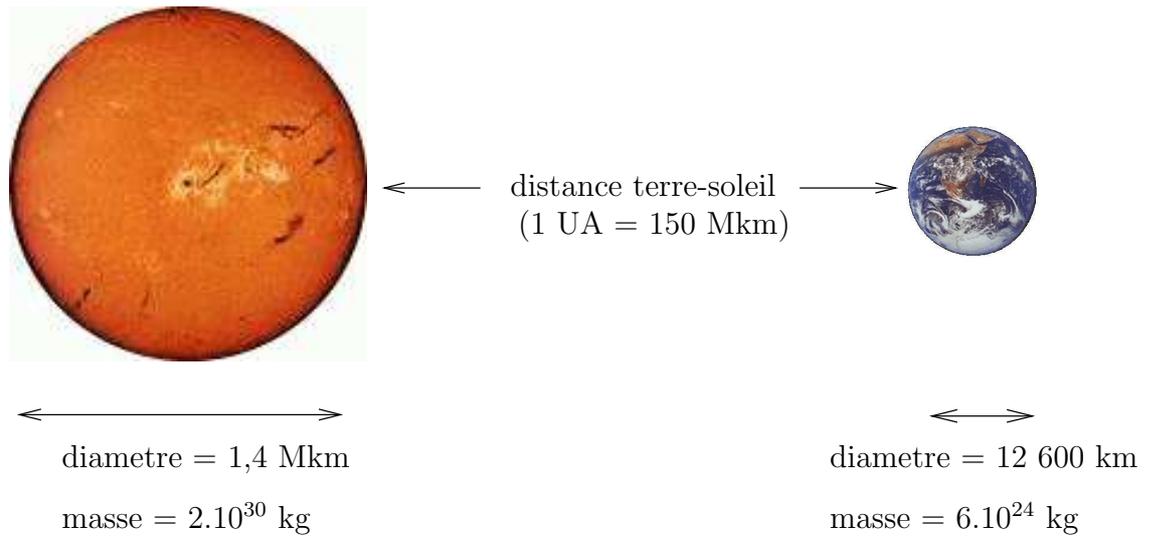
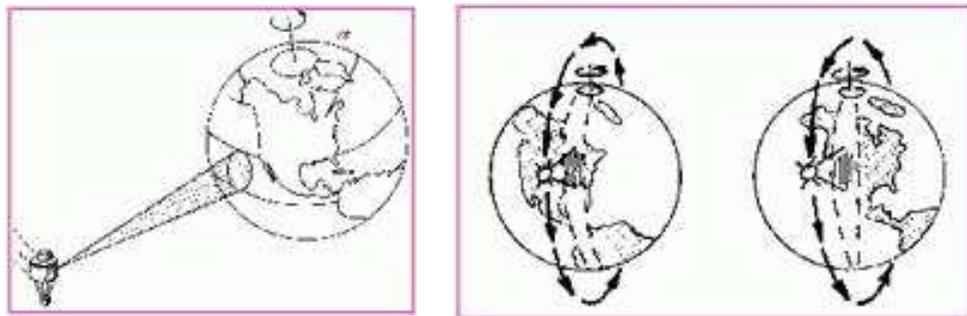


Figure 2.1: Distance Terre-Soleil

**Geostationary Satellite**

in equatorial orbit at  
36 000 km altitude  
stays over the same spot

can stare at evolving systems

Lower spatial resolution

**Polar-Orbiting Satellite**

about 850 km altitude travels over  
both north and south poles. Earth  
rotates  $\simeq 13^\circ$  for each  $\simeq 100$  min orbit

can see whole globe at high resolution

Sees only small portion  
at any time

Figure 2.2: Orbites

par le soleil. L'énergie est libérée sous forme radiative (photons). A cause de l'extrême densité du coeur du soleil, les photons libérés subissent de très nombreuses collisions avec les ions avant de rejoindre la surface du soleil. Leur trajet à l'intérieur du soleil dure en moyenne plusieurs millions d'années.

La surface visible du soleil est la photosphère. Elle est beaucoup plus froide que le coeur (environ 4000 Kelvin). Au dessus de la photosphère vient la chromosphère. C'est dans cette couche que se produit l'émission par l'Hydrogène de la raie Lyman  $\alpha$ , dont les photons sont responsables de l'ionisation de l'ionosphère terrestre. La température croît avec l'altitude dans la chromosphère, jusque dans la couronne solaire (que l'on peut observer durant les éclipses (voir figure 2.3) ou à l'aide de coronographes), où la température du plasma peut atteindre plusieurs millions de Kelvins.

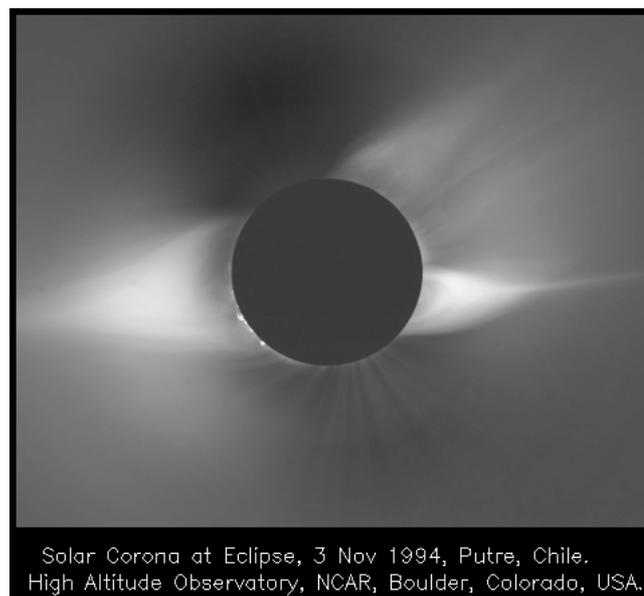


Figure 2.3: Eclipse

Le soleil est en rotation (sa période est d'environ 27 jours). La vitesse de rotation est différente selon la latitude (l'équateur tourne plus vite que les régions polaires).

Les tâches solaires sont des régions de fort champ magnétique. Elles attestent de l'activité magnétique solaire: en période de forte activité, le nombre des tâches augmente. L'activité solaire suit un cycle de 11 ans (en réalité 22 ans si on tient compte de la polarité du champ magnétique cf figure 2.4). L'activité a également varié au cours des siècles (on dispose d'enregistrements depuis Galilée) et est plus importante actuellement qu'il y a deux siècles.

### 2.2.2 Le vent solaire

Le vent solaire est le plasma émis par la couronne solaire. Il entraîne le champ magnétique avec lui, selon la loi du 'champ gelé' de la magnétohydrodynamique. La loi du champ gelé

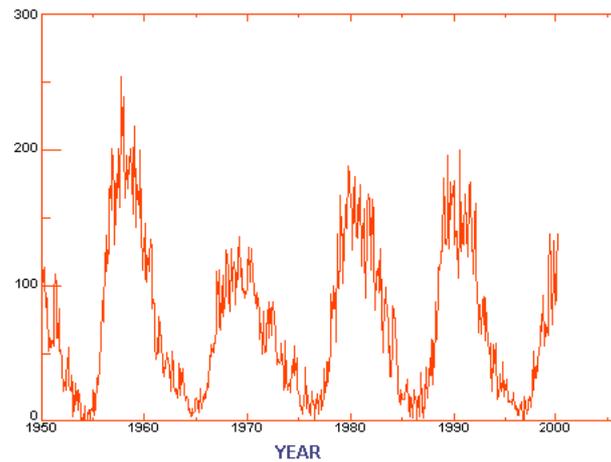


Figure 2.4: Activité solaire

établit que, dans un plasma, sous certaines conditions, le champ magnétique est passivement transporté par le fluide. Du fait de la rotation solaire et de l'ancrage du pied des lignes de champ magnétique dans la couronne solaire (toujours selon le principe du champ gelé), les lignes de champ magnétique dans le vent solaire ont la forme de spirales (cf figure 2.5).

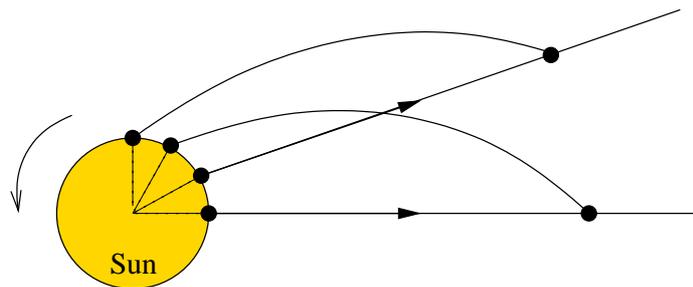


Figure 2.5: Expansion radiale du plasma

Dans la couronne solaire, la polarité du champ magnétique (i.e. son orientation sud-nord ou nord-sud) change le long d'une ligne neutre qui oscille autour de l'équateur solaire (cf figure 2.6). Ainsi, dans le plan de l'écliptique (plan dans lequel orbite la terre), le vent solaire transporte un champ magnétique qui suivant les cas peut être parallèle ou antiparallèle au champ magnétique terrestre. Cela a des conséquences sur la dynamique du plasma magnétosphérique terrestre. La topologie où le champ magnétique solaire est antiparallèle au champ magnétique terrestre favorise la pénétration des particules du vent solaire dans la magnétosphère terrestre.

Plusieurs types de vents solaires existent: un vent 'lent' et un vent 'rapide', ce dernier étant produit par des régions de la couronne solaire appelés 'trous coronaux' et qui sont là encore l'indication d'une forte activité magnétique. Lorsque le vent rapide rattrape le vent lent, il se produit une compression hydrodynamique, qui engendre une onde de choc dans le plasma.

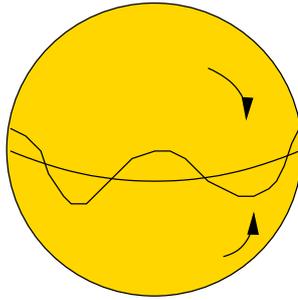


Figure 2.6: Ligne neutre

Ces ondes de choc s'appellent 'régions d'interaction' ou CIR (pour 'Corrotational Interaction Region').

Les éruptions solaires sont liées à des reconfigurations du champ magnétique, lequel libère soudainement des particules (électrons et protons) auparavant confinées par le champ. Ces éruptions produisent des éjections de matières brutales dans le vent solaire et des chocs hydrodynamiques. Les protons peuvent être accélérés jusqu'à des énergies de 100 MeV.

### 2.2.3 Effets de l'activité solaire sur l'environnement terrestre

L'activité solaire produit trois types de phénomènes pouvant interagir avec l'environnement terrestre: des ondes électromagnétiques (ou des photons), le vent solaire et des protons énergétiques produits par les éruptions. Les ondes électromagnétiques effectuent le trajet terre-soleil en 8 minutes, les protons énergétiques mettent 1 heure, et les ondes de choc du vent solaire, 2 jours.

Les ondes électromagnétiques ou de manière équivalente, les photons, sont responsables de l'ionisation de la haute atmosphère et de la création de l'ionosphère côté jour (l'ionosphère disparaît la nuit par recombinaison). Les perturbations de l'ionosphère sont responsables des perturbations des communications radio. Les ondes électromagnétiques sont également responsables du chauffage de l'atmosphère (qui a notamment pour conséquence un freinage accru des satellites).

Le vent solaire, en interagissant avec la magnétosphère terrestre, induit des variations du champ magnétique terrestre. C'est ce qu'on appelle l'activité géomagnétique. Le champ magnétique terrestre a une valeur d'environ  $5 \cdot 10^{-5}$  Tesla. Les variations du champ sont de l'ordre de  $10^{-8}$  Tesla. Les particules du vent solaire interagissant avec la magnétosphère terrestre subissent un trajet compliqué. Elles précipitent sur la terre au niveau des régions aurorales (régions où peuvent s'observer les aurores boréales) après avoir été accélérées dans la queue de la magnétosphère. Elles sont responsables d'une charge importante des satellites.

Les protons énergétiques créent par interaction avec l'ionosphère des particules secondaires qui contribuent à perturber l'état de l'ionosphère. Par ailleurs, ces protons énergétiques produisent des inhomogénéités dans le plasma interplanétaire qui diffusent les rayons cosmiques (particules cosmiques de très forte énergie, de l'ordre de 50000 MeV) protégeant de ce fait la

terre et son environnement de ces rayonnements.

Il est important de connaître et de prédire à l'avance avec précision l'état du milieu interplanétaire, afin de concevoir et de dimensionner correctement les satellites.

## 2.3 Qu'est ce qu'un plasma ?

Pour plus de détails, voir [12], [28], [17].

### 2.3.1 Définition générale

Un plasma est un gaz de particules ionisées où les atomes sont dissociés en ions et électrons. Les particules composant le plasma sont donc électriquement chargés, et par conséquent susceptibles d'interagir entre elles par interaction électromagnétique. Il s'agit là d'une différence fondamentale entre un plasma et un gaz au sens usuel, lequel est constitué de particules électriquement neutres et n'interagissant entre elles que par contact (ou par le biais de forces à très courte portée).

Une proportion importante de la matière dans l'univers est à l'état de plasma (par exemple la matière des étoiles, des nébuleuses, du gaz interstellaire, etc.). Pour qu'un plasma subsiste, il faut que sa température soit supérieure à l'énergie d'ionisation des atomes le constituant. Cette dernière étant de l'ordre de quelques eV (électron Volt), la température d'un plasma est généralement supérieure à une dizaine de milliers de Kelvin (en vertu de la correspondance:

$$1\text{eV} = 11600 \text{ Kelvin } ).$$

Aussi, dans notre environnement quotidien, avons nous peu d'occasion de 'croiser' un plasma (tout au plus celui des lampes au néon ou celui d'un écran plat à plasma). De manière générale, compte tenu de la températures, ils nous serait difficile de coexister avec un plasma.

### 2.3.2 Plasmas froids et plasmas chauds

On distingue les plasmas froids et les plasmas chauds.

Les plasmas froids ont des températures inférieures à quelques eV (c'est à dire à quelques dizaines de milliers de Kelvins). Ce sont donc des plasmas partiellement, voire faiblement ionisés, en vertu de la remarque précédente. Des exemples de tels plasmas sont l'ionosphère, les décharges luminescentes (celles d'un tube au néon, d'une lampe à mercure, ...). Dans ces plasmas, la densité de molécules neutres est donc en général très supérieure à la densité des espèces chargées (ions et électrons).

Les plasmas chauds ont des températures supérieures à plusieurs dizaines d'eV (plusieurs centaines de milliers de Kelvins). Dans certains plasmas, on atteint facilement des températures de l'ordre du keV ( $10^3$  eV), voire du MeV ( $10^6$  eV). Des exemples de plasmas chauds sont les plasmas stellaires (soleil, étoiles, etc), le vent solaire, les plasmas artificiels utilisés pour la fusion thermonucléaire (plasmas des Tokamaks, plasmas obtenus par irradiation de cibles par faisceaux lasers intenses, etc). Dans ce cas, il n'y a quasiment plus de molécules neutres.

Les plasmas chauds et froids ont des comportements radicalement différents en raison de la nature des collisions entre les particules à l'échelle microscopique. En effet, dans un plasma chaud, les particules chargées interagissent via l'interaction électrostatique (on dit encore Coulombienne). Or, lorsque, la vitesse relative des particules est très grande (ce qui est le cas dans un plasma chaud, puisque la température donne précisément une mesure de cette vitesse), l'interaction Coulombienne a peu d'effet. Les plasmas chauds sont donc essentiellement des milieux non collisionnels. Dans un plasma froid au contraire, les particules chargées interagissent avec l'espèce prédominantes, que constituent les molécules neutres. L'interaction est donc médiatisée par des forces à beaucoup plus courte portée que l'interaction Coulombienne. Il s'agit de forces dites de Van der Waals. Ces collisions dévient les particules de manière beaucoup efficace. Les plasmas froids sont donc des milieux collisionnels.

Les modèles mathématiques pour décrire ces deux grandes classes de plasmas sont différents. Dans ce travail, nous nous intéresserons surtout aux plasmas froids que sont l'ionosphère ou les plasmas de décharge électrostatique.

### 2.3.3 Autres aspects des plasmas

#### Champ magnétique

Les plasmas sont fortement influencés par la présence ou non d'un champ magnétique extérieur. En effet, un champ magnétique confine les particules chargées à se déplacer principalement le long des lignes de champ, selon une trajectoire hélicoïdale (cf figure 2.7). Les mouvements transverse au champ magnétique sont possibles (dérive en  $E \times B$ , diffusion, etc), mais sont beaucoup plus lents lorsque le champ magnétique est intense. Nous verrons que ces propriétés ont d'importantes conséquences sur la modélisation de l'ionosphère, par exemple.

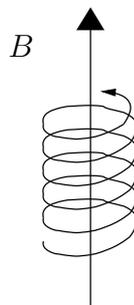


Figure 2.7: Trajectoire hélicoïdale

#### Quasineutralité

L'apparition d'une charge nue dans le plasma produit un champ électrique qui tend à rappeler les particules chargées et à rétablir la neutralité électrique. Par conséquent, la différence relative de densité entre les ions positifs et les électrons se maintient toujours à un niveau très faible,

sauf dans des régions très localisées (couches limites par exemple). On a donc les relations suivantes:

$$n_e - n_i \ll n_e, n_i, \quad n_e \approx n_i,$$

où  $n_e$  est la densité électronique et  $n_i$  la densité des ions positifs (supposant que ceux-ci ne portent qu'une seule charge positive). Ces relations traduisent la quasineutralité du plasma qui, bien que constitué de particules chargées, reste localement électriquement neutre.

Il existe des plasmas où par nature prévaut un déséquilibre de charges, comme par exemple les faisceaux de particules. Nous verrons dans ce travail un exemple de plasma quasineutre (l'ionosphère) et de plasma non quasineutre (la décharge primaire sur la structure d'un satellite).

### Oscillations de plasma

La force de rappel que le champ électrique exerce sur les particules s'apparente à la force de rappel exercée par un ressort sur une masse. En l'absence de frottements (dont le rôle dans les plasmas est joué par les collisions), la masse est soumise à des oscillations. Dans le cas des plasmas, la fréquence d'oscillation  $\omega_{pe}$  prend la valeur:

$$\omega_{pe}^2 = \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m_e}, \quad (2.3.1)$$

où  $n$  est la densité du plasma,  $q$  la charge élémentaire (positive),  $\varepsilon_0$ , la permittivité du vide et  $m_e$  la masse de l'électron. La constante de temps  $\omega_{pe}^{-1}$  est généralement la constante de temps la plus rapide dans les problèmes considérés. Elle représente une sérieuse difficulté numérique en raison des instabilités qu'elle peut provoquer.

La formule (2.3.1) donne la fréquence des oscillations associée aux électrons et est à ce titre appelée fréquence plasma électronique. Une fréquence plasma ionique  $\omega_{pi}$  peut être définie par une formule analogue en remplaçant la masse électronique  $m_e$  par la masse ionique  $m_i$ . Toutefois, la masse ionique est beaucoup plus grande que la masse électronique. L'ion le plus léger, l'ion  $H^+$  ou proton, est environ 2000 fois plus lourd que l'électron. Lorsqu'il s'agit d'un ion d'oxygène  $O^+$ , on atteint des rapports

$$\frac{m_i}{m_e} \approx 36000, \quad \frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \approx \frac{1}{200}.$$

La dynamique des électrons est donc beaucoup plus rapide que celle des ions.

C'est pourquoi il peut être utile de découpler les échelles liées aux électrons et aux ions. Si l'on s'intéresse au mouvement des électrons, on supposera les ions immobiles. Si l'on s'intéresse au mouvement des ions, il faudra 'moyenner' le mouvement des électrons sur un grand nombre de périodes plasma, afin d'éviter que le code numérique ne consomme toutes les ressources de calcul à 'calculer' les oscillations de plasma.

Les oscillations de plasmas constituent un exemple typique du couplage entre le plasma en tant que fluide et le champ électrique ou électromagnétique. De telles oscillations n'existent pas dans un fluide classique. Ce couplage fluide-électromagnétisme fait des plasmas des objets complexes à étudier et modéliser.

## 2.4 La magnétosphère terrestre

Pour plus de détails, on se reportera par exemple à [4] ou à l'ouvrage [34].

### 2.4.1 Les sources du plasma magnétosphérique

Le champ magnétique terrestre constitue un obstacle à l'écoulement de particules chargées du vent solaire (cf figure 2.8). En effet, on a vu que les particules chargées ne pouvaient que très difficilement se déplacer transversalement aux lignes de champ magnétique. il existe néanmoins des 'points faibles' de la carapace magnétique de la terre, situés près des pôles. Ainsi, la cavité magnétique terrestre, que l'on appelle la magnétosphère, est peuplée de plasmas de différentes sources:

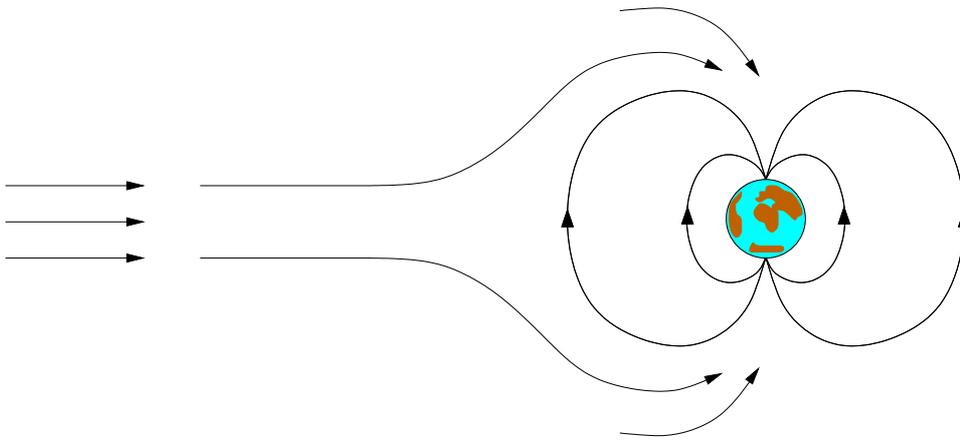


Figure 2.8: Magnétosphère terrestre

1. L'ionosphère (entre 100 et 1000 km d'altitude) est le plasma créé par ionisation des molécules de l'atmosphère neutre par le rayonnement solaire. Il s'agit d'un plasma froid (la température y est de l'ordre de  $10^3$  à  $10^4$  Kelvin), dont la densité est d'environ  $10^5$  à  $10^6$  électrons par  $\text{cm}^3$  au maximum, ce qui représente une toute petite fraction de la densité de neutres (environ  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  à la même altitude).
2. Le vent solaire est un plasma plus chaud (les protons y ont une température d'environ  $10^5$  K, les électrons, de  $10^6$  K. La vitesse du vent solaire est de l'ordre de 400 km/s au voisinage de la terre, ce qui en fait un écoulement supersonique. Le vent solaire bute sur l'obstacle que constitue la cavité magnétosphérique de la terre. Néanmoins, des particules peuvent pénétrer par les cornets polaires, qui sont les régions où les lignes de champ magnétique terrestre se reconnectent avec celles du champ magnétique interplanétaire d'origine solaire. Il s'agit là du plasma chaud magnétosphérique, principal responsable de la charge des satellites en orbite géostationnaire.

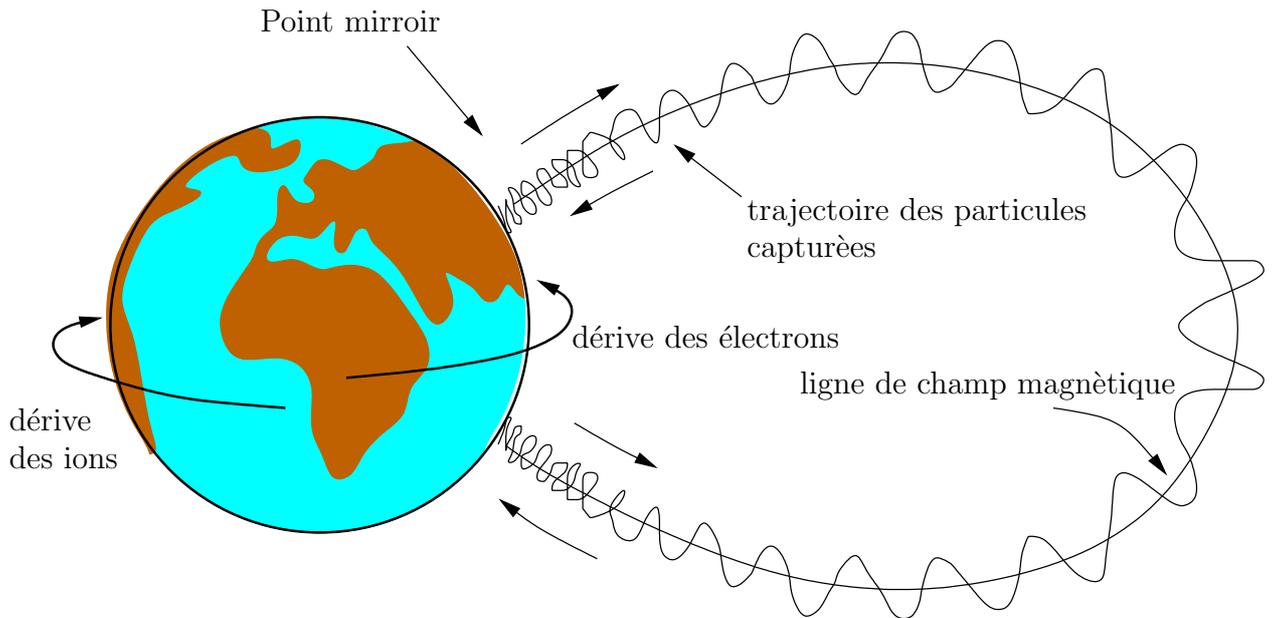


Figure 2.9: Trajectoire d'une particule le long d'une ligne du champ magnétique

3. Les rayons cosmiques sont des noyaux atomiques de haute énergie produits dans l'espace (par exemple, des résidus d'explosions d'étoiles ou supernovae). Ils entrent en collision avec les molécules neutres de l'atmosphère et produisent des neutrons. Ces neutrons se désintègrent en protons qui vont peupler la magnétosphère à l'intérieur d'une coquille appelée ceinture de radiation.

Sous l'effet du vent solaire, la magnétosphère est comprimée du côté du soleil (côté jour) et dilatée du côté nuit (cf figure 2.10). Les lignes de champ s'ouvrent sur le milieu interplanétaire à l'intérieur du cornet polaire, délimité par le cône auroral (cf figure 2.12). Du côté nuit, dans le plan équatorial, la queue de la magnétosphère se prolonge à l'infini, confinant le feuillet de plasma.

### 2.4.2 Circulation du plasma chaud

Le plasma chaud d'origine magnétosphérique pénètre dans la magnétosphère au niveau de la ligne neutre (ligne où la topologie du champ magnétique solaire change pour se reconnecter avec le champ magnétique terrestre (cf point N figure 2.10)). Il diffuse alors vers le côté opposé au soleil en suivant le bord externe de la magnétosphère. Puis, il est entraîné vers le plan équatorial de la queue pour former le feuillet de plasma. Là, il remonte en direction de la terre pour précipiter dans la haute atmosphère au niveau du cône auroral (cf figure 2.13). Lors de cette remontée, les tubes de champ magnétique se compriment adiabatiquement, augmentant l'énergie des particules jusqu'à plusieurs keV. Ces précipitation énergétiques provoquent les aurores boréales.

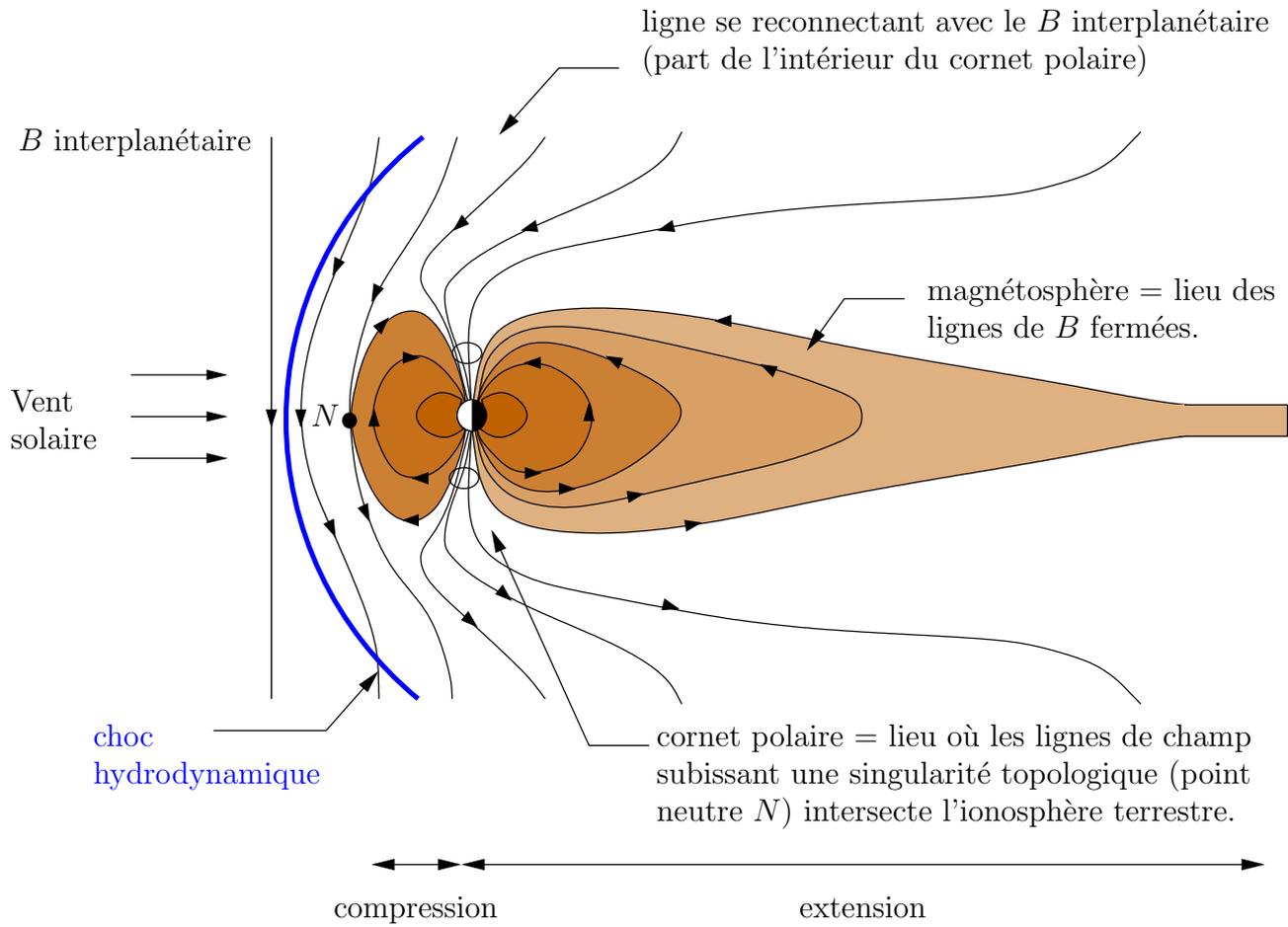


Figure 2.10: Compression et extension de la magnétosphère terrestre

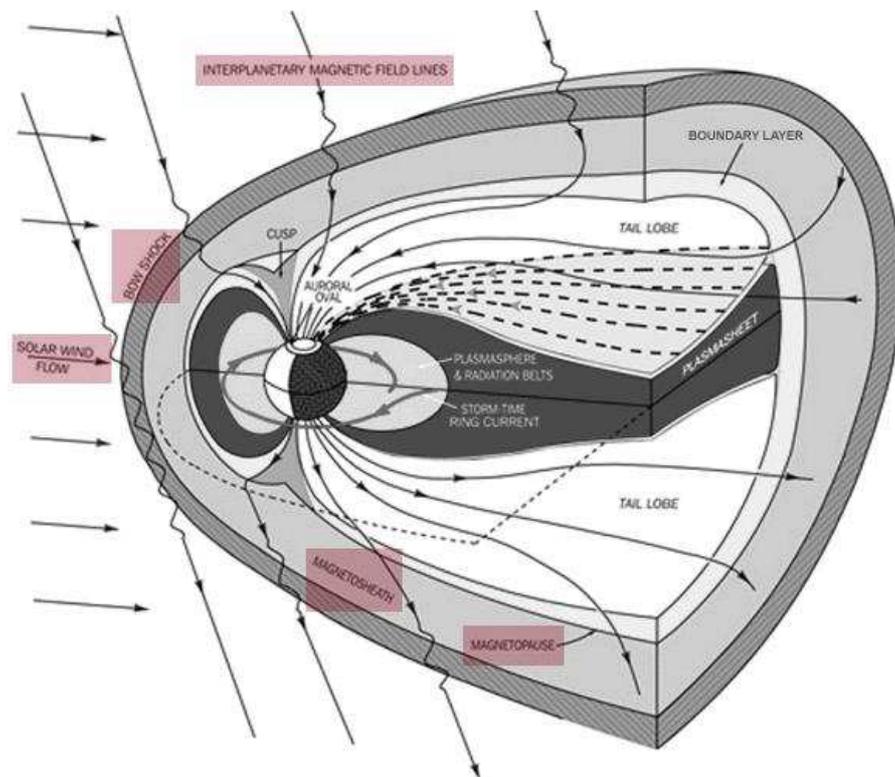


Figure 2.11: Vue 3D

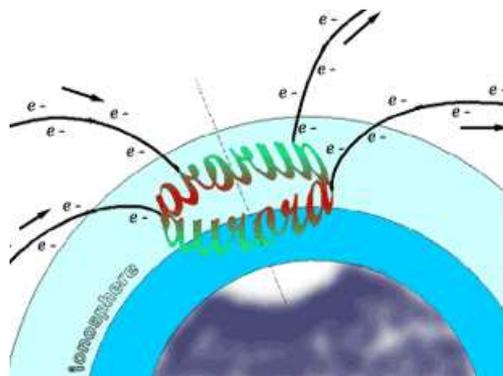


Figure 2.12: Réunion des lignes de champ dans le cône auroral

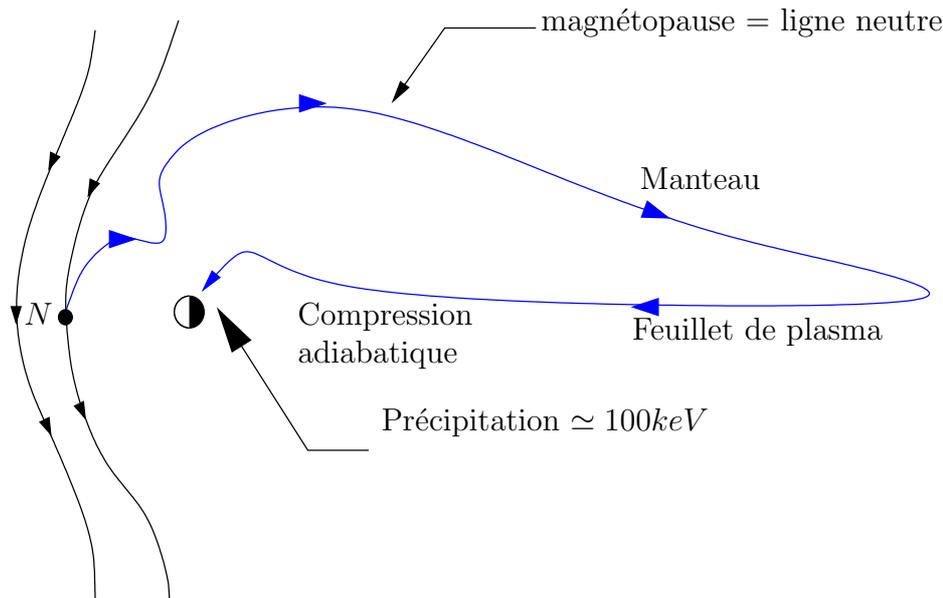


Figure 2.13: Circulation du plasma chaud magnétosphérique

Ainsi, le plasma du vent solaire s'écoule-t-il dans la direction opposée au soleil près du bord externe de la magnétosphère, et dans la direction du soleil à l'intérieur de celle-ci.

### 2.4.3 Circulation du plasma froid

Horizontalement, l'ionosphère est entraînée par la rotation terrestre (corrotation) et par le mouvement des molécules neutres (vent de neutres). Verticalement, l'ionosphère peuple les tubes de champ magnétique (puisque le mouvement le long des lignes de champ n'est pratiquement pas freiné). Aux basses latitudes, les tubes de champ sont fermés. Le volume occupé par le plasma est donc fermé (plasmasphère). Aux hautes latitudes (aurorales et polaires), les lignes de champ sont ouvertes sur le milieu interstellaire. Le plasma ionosphérique s'échappe le long des lignes de champ magnétique et constitue ce qu'on appelle le vent polaire (cf figure 2.14).

### 2.4.4 Conséquences sur les satellites

Les satellites en orbite géostationnaire rencontrent le plasma de la plasmasphère (plasma froid d'origine ionosphérique), les ceintures de radiation et le plasma chaud magnétosphérique.

Les satellites en orbite basse polaire interagissent avec le plasma froid ionosphérique et, aux hautes latitudes, avec les précipitation aurorales (provenant du retour du plasma magnétosphérique en provenance de la queue) et les particules des rayons cosmiques. Ces particules présentent un réel danger pour les tissus vivants et limitent l'utilisation de ces orbites pour les vols habités.

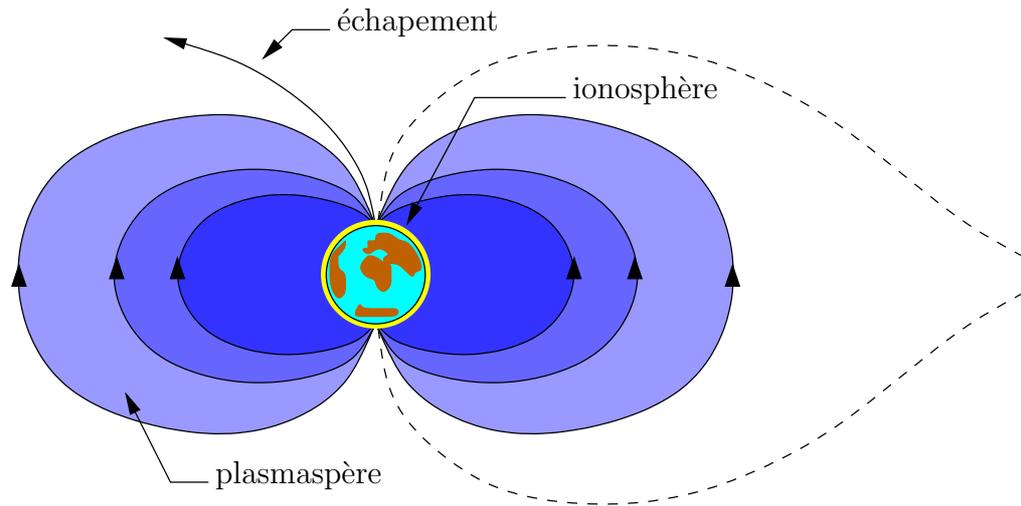


Figure 2.14: Circulation du plasma froid d'origine ionosphérique

## 2.5 L'ionosphère

On pourra se reporter à [3] ou [36] pour plus de détails. Pour une introduction, le lecteur pourra se reporter à l'adresse suivante

<http://www.oma.be/BIRA-IASB/Public/Research/Iono/Iono.fr.html>.

### 2.5.1 Structure stratifiée de l'ionosphère

L'atmosphère est ionisée sur toute la surface du globe à partir de 60km jusqu'à la magnétopause. L'ionosphère désigne la région de l'espace où la densité des particules ionisées est la plus élevée. Au delà de 1000km, c'est la magnétosphère : la densité des particules ionisées et neutres est très faible. Il y a donc peu de collisions et le mouvement des particules est régi par le champ magnétique terrestre.

L'origine des ions et des électrons réside principalement dans l'interaction du flux du rayonnement photonique solaire et des molécules de l'atmosphère neutre. Un photon d'énergie supérieure au seuil d'ionisation peut arracher un électron à une molécule créant ainsi un ion. Un autre phénomène est la précipitation des particules de haute énergie dans le cône polaire (donnant lieu aux aurores boréales). Cependant, d'autres phénomènes rentrent en jeu comme les transformations chimiques ions-neutres ou les recombinaisons ions-électrons par exemple. Ceci rend donc la modélisation de l'ionosphère très difficile.

La densité maximale de plasma est située dans la région F (voir ci-dessous) entre 200 et 400 km d'altitude avec des valeurs de  $4 \cdot 10^4$  à  $4 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$ . Ceci correspond à des fréquences de résonance naturelle du plasma de 1.8 à 18 MHz. Ainsi, l'ionosphère est une couche conductrice de plasma qui joue le rôle de réflecteur pour les ondes radio inférieures à 18 MHz. Son intérêt est donc grand car elle permet la transmission sur de grandes distances malgré la courbure de la terre.

Des analyses montrent cependant que les ondes radios de fréquence inférieures à 18 MHz ne sont pas toutes réfléchies aux mêmes altitudes (une mesure du temps de réflexion permet de faire cette conclusion). Ainsi, l'ionosphère est stratifiée en couches. La décomposition est faite en fonction des radiations solaires absorbées.

Région	Altitude	Description
D	< 90 km	absorbe les rayonnements les plus énergétiques (Hard X-Ray). Cette zone disparaît la nuit (en quelques minutes après le coucher du soleil)
E	< 105 km	absorbe les Soft X-Ray
F	105 à 600 km	absorbe les Extreme UV. subdivisée en deux zones : F1 (170 km) et F2 (250 km)

Ainsi, les ondes moyennes sont réfléchies par la couche E. Les ondes courtes sont réfléchies par la couche F, alors que les ondes ultra-courtes ne sont pas réfléchies (cf figure 2.15) : elles traversent l'ionosphère et permettent ainsi l'établissement de communications avec les satellites. La fréquence critique est donnée par  $N = 1,24 \cdot 10^{-8} f_{cr}^2$ , où  $N$  représente la concentration maximale d'électrons par  $\text{cm}^3$  et  $f_{cr}$  la fréquence critique.

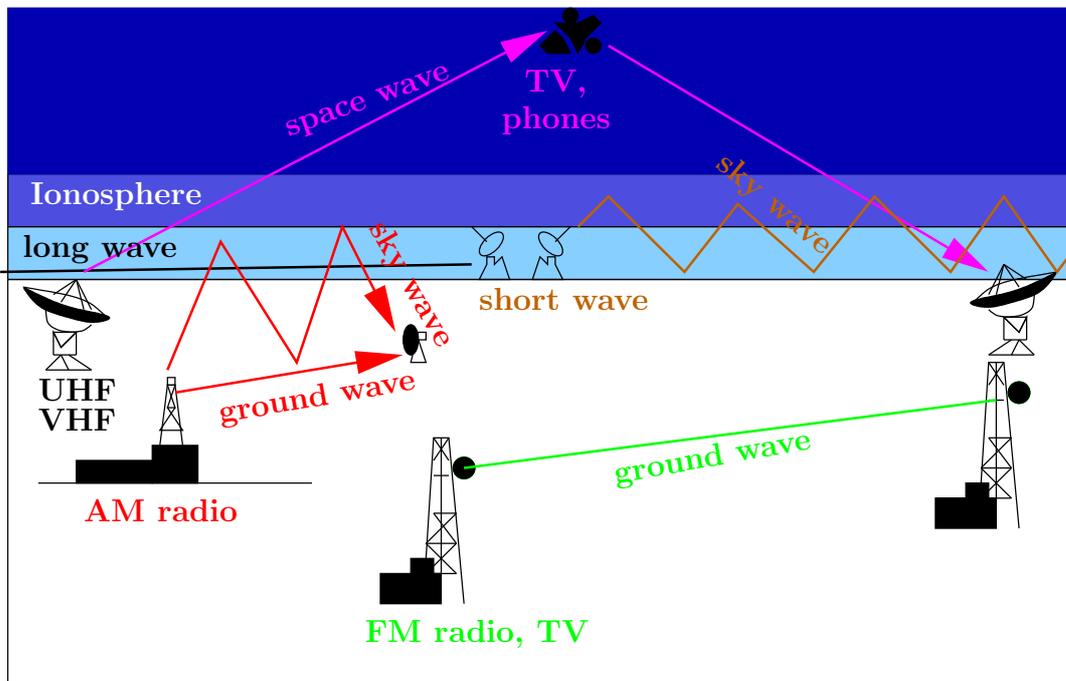


Figure 2.15: Propagation des ondes radio

Attention, les caractéristiques des couches  $E$  et  $F$  ainsi que la fréquence limite de 18 MHz varient en fonction de l'activité solaire ou d'instabilités ionosphériques. D'autre part, l'ionosphère est très perturbé dans les régions de hautes latitudes (précipitations) et à l'équateur (electrojet équatorial). Ces instabilités perturbent lors les signaux qui subissent des variations de phase et d'amplitude (phénomènes de scintillations).

En conclusion, la haute atmosphère et l'ionosphère sont stratifiées en couches, sous l'effet de la gravité et des différents mécanismes de création et de recombinaison du plasma (cf figure 2.16).

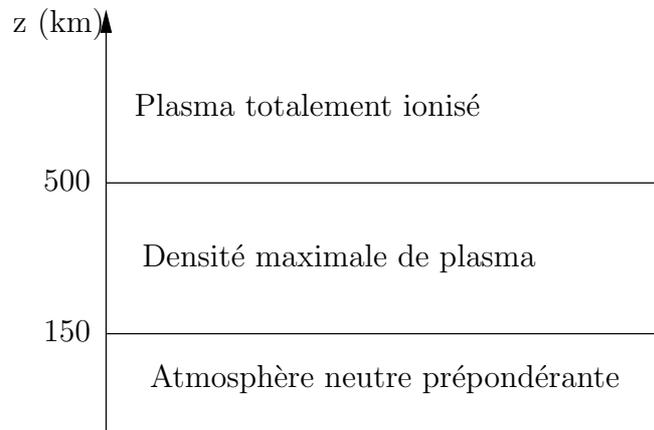


Figure 2.16: Stratification de l'ionosphère

- L'altitude où la densité de plasma est maximale ( $10^5$  à  $10^6$   $\text{cm}^{-3}$ ) se situe aux alentours de 200 à 400 km.
- Aux altitudes inférieures, l'atmosphère neutre joue un rôle prépondérant et la dynamique du plasma est fortement influencée par les collisions entre les ions ou les électrons d'une part et les neutres d'autre part. En particulier, les vents de neutres entraînent le plasma.
- Aux altitudes supérieures, la densité des neutres diminue très vite et le plasma peut être considéré comme totalement ionisé au delà des quelques milliers de km d'altitude. Il se connecte alors au plasma magnétosphérique.

Les lignes de champ magnétique relient des régions d'altitudes différentes (sauf au voisinage de l'équateur où le champ magnétique est quasiment horizontal). Ainsi, par le mouvement rapide des particules (et en particulier des électrons) le long des lignes de champ magnétique, les plasmas aux différentes altitudes sont interconnectés.

La structure stratifiée de l'ionosphère peut s'expliquer par le modèle de la couche de Chapman, présentée en appendice à la section 2.5.3.

### 2.5.2 Les sources du champ électrique et des courants ionosphériques

Deux sources principales contribuent à la génération de champs électriques de grande échelle dans l'ionosphère. En anglais, on parle de *ionospheric wind dynamo* et de *solar-wind magnetospheric dynamo*. Une troisième source (moins importante) de champ électrique est donnée par l'activité orageuse. Elle peut contribuer de manière importante à cette source de champ

électrique la nuit, moment où les ionisations ne sont plus dues qu'à des phénomènes de recombinaison et de chimie.

Ces champs électriques génèrent des courants. Ces courants sont les premiers phénomènes ayant permis de découvrir l'existence de l'ionosphère. En effet, en 1880, Steward observa une oscillation diurne des composantes du champ magnétique terrestre. Il attribua cette oscillation diurne à la présence d'un système de courants électriques fixe par rapport au Soleil (cf figure 2.17).

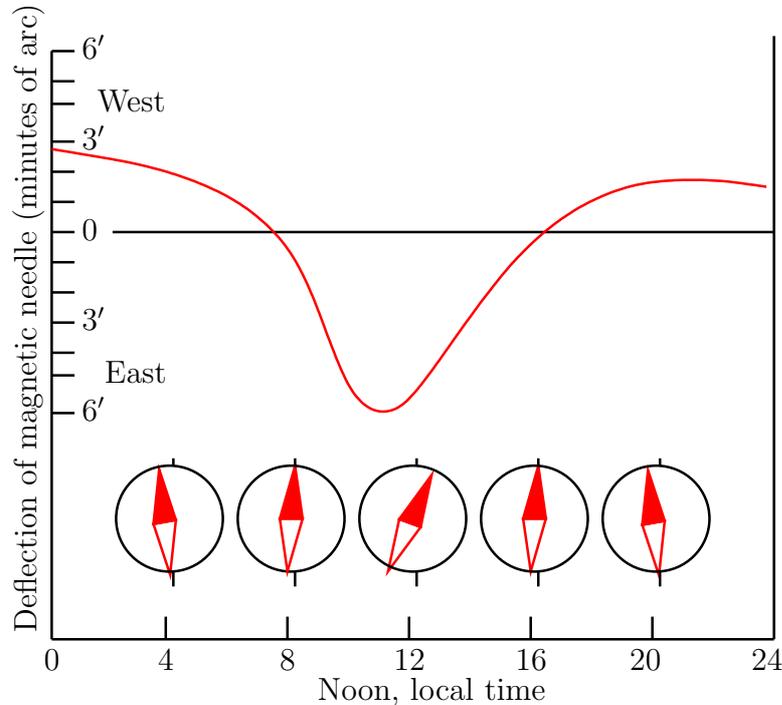


Figure 2.17: Oscillation diurne d'une boussole

### Dynamo ionosphérique

Aux altitudes inférieures, les vents de neutres entraînent le plasma, milieu conducteur, par le biais des collisions. Celui-ci, dans son mouvement, coupe les lignes de champ magnétique. Il en résulte un champ électrique induit, perpendiculaire à la fois au champ magnétique et au mouvement du plasma. C'est l'effet dynamo.

Mais les électrons peuvent se déplacer librement et très rapidement le long des lignes de champ magnétique. En effet, la conductivité alignée le long du champ magnétique est de 100 S/m (Siemens par mètre), alors que la conductivité orthogonale au champ magnétique est inférieure à  $10^{-4}$  S/m. Pour mémoire, l'eau de mer possède une conductivité de 4 S/m. Ainsi, dès qu'une différence de potentiel apparaît le long d'une ligne de champ, un très fort courant électronique vient immédiatement la compenser. Les lignes de champ magnétique sont donc des équipotentielles du champ électrique.

Par conséquent, le champ électrique apparu par effet dynamo dans les couches basses et denses de l'ionosphère va être instantanément propagé aux altitudes élevées. Il va mettre en mouvement à son tour le plasma des couches élevées, même si, à cette altitude, le vent de neutres est négligeable.

Ce courant est plus important le jour dans la couche E qui a tendance à diminuer la nuit et être transféré à la couche F.

Un des objectifs du chapitre 3 sera de fournir un modèle mathématique (le modèle dynamo) pour ce phénomène de couplage.

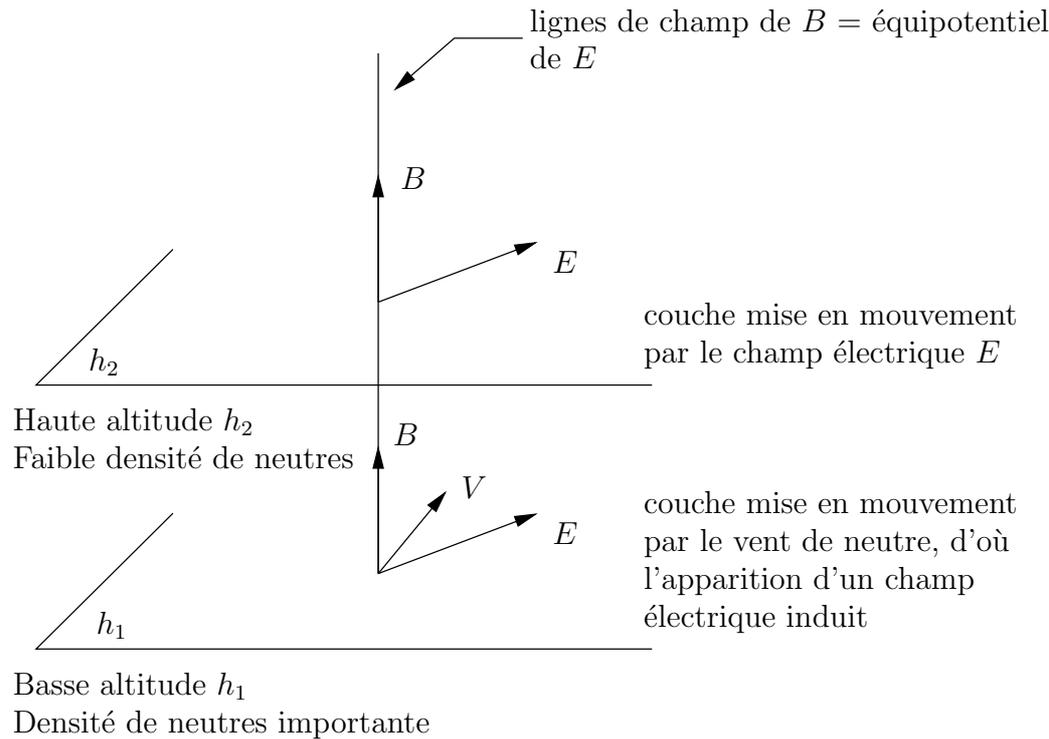


Figure 2.18: Effet dynamo-rotor dans l'ionosphère

### Transport dans les zones aurorales et polaires

Des structures particulières apparaissent dans les zones aurorales et polaires car le couplage avec la magnétosphère y est plus important qu'ailleurs (cf section 2.4). C'est également dans ces régions que les particules énergétiques précipitées du soleil peuvent arriver jusqu'à l'ionosphère et inversement, que les ions ionosphériques peuvent s'échapper vers le milieu interplanétaire.

Nous ne traiterons pas de ces questions et renvoyons à la bibliographie.

### 2.5.3 Appendice: modèle de la couche de Chapman

La formule de Chapman donne le taux de production d'ionisation en fonction de l'altitude  $h$ . Le taux de production d'ionisation est le nombre d'électrons (ou d'ions) créés par unité de volume et de temps. Ces particules sont produites par l'ionisation d'une molécule neutre suite à l'absorption d'un photon solaire. Le taux d'ionisation est évidemment fonction de l'intensité de la radiation ionisante  $I$ , c'est à dire du nombre de photons de cette radiation traversant l'unité de surface d'une surface plane perpendiculaire au faisceau.

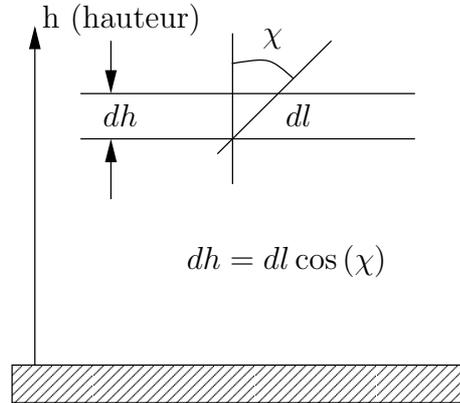


Figure 2.19: Radiation incidente pénétrant dans l'atmosphère

Pour le calcul, il faut tenir compte de l'angle zénithal du soleil qui est l'angle  $\chi$  entre la direction du soleil et la verticale. Considérons une épaisseur d'atmosphère  $dh$ . Pendant la traversée de cette couche, la radiation subit une absorption  $dI$  proportionnelle à son intensité  $I$  et au trajet effectué dans l'atmosphère, qui, compte tenu de l'angle zénithal, est égal à  $dh/\cos\chi$  (cf figure 2.19). Soit  $\alpha$  ce coefficient de proportionnalité, appelé coefficient d'absorption. Ainsi:

$$\frac{dI}{I} = \alpha \frac{dh}{\cos\chi}. \quad (2.5.1)$$

Le coefficient d'absorption est proportionnel à la densité  $n_n$  de molécules neutres susceptibles d'interagir avec la radiation. On peut donc écrire:

$$\alpha = \sigma n_n \quad (2.5.2)$$

Compte tenu des dimensions physiques ( $\alpha$  est homogène à l'inverse d'une longueur,  $n_n$  à l'inverse d'un volume),  $\sigma$  a la dimension physique d'une surface, et s'appelle à ce titre section efficace d'absorption. Elle ne dépend que de la nature des molécules neutres (ainsi que de la fréquence de la radiation considérée, mais nous omettrons de discuter ce point).

On intègre (2.5.1) entre l'altitude  $h$  courante et  $+\infty$  en tenant compte de ce que  $\alpha$  (par le biais de  $n_n$ ) comme  $I$  dépendent de  $h$ . En revanche, on suppose que l'angle zénithal  $\chi$  est indépendant de  $h$ , ce qui revient à négliger la courbure de la terre. On trouve:

$$\ln\left(\frac{I_\infty}{I(h)}\right) = \frac{1}{\cos\chi} \int_h^\infty \alpha(z) dz,$$

où  $I_\infty$  est l'intensité incidente de la radiation avant pénétration dans l'atmosphère. On peut donc écrire:

$$I = I_\infty \exp\left(-\frac{\tau(h)}{\cos \chi}\right), \quad \tau(h) = \int_h^\infty \alpha(z) dz. \quad (2.5.3)$$

La quantité  $\tau(h)$  s'appelle l'épaisseur optique.

On cherche maintenant à obtenir une expression de  $\tau$ . On fait l'hypothèse d'une atmosphère en équilibre hydrostatique. Ainsi, le gradient de pression doit équilibrer la force de gravité. Soit  $T$  la température supposée constante de l'atmosphère. Suivant la loi des gaz parfaits, la pression s'écrit  $p = n_n k_B T$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann (d'une valeur d'environ  $10^{-23}$  Joule/Kelvin). La condition d'équilibre s'écrit donc

$$\frac{\partial p}{\partial h} = -mgn_n,$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur (supposée constante) et  $m$  la masse des molécules neutres. De l'équation d'équilibre, on déduit

$$\frac{1}{n_n} \frac{\partial n_n}{\partial h} = -\frac{mg}{k_B T}.$$

La quantité  $H = k_B T / mg$  s'appelle l'échelle de hauteur. C'est une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère. Il en résulte l'expression de la densité de neutres en fonction de l'altitude:

$$n_n = n_{n0} \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \quad (2.5.4)$$

où  $n_{n0}$  est la densité de l'atmosphère neutre au niveau du sol (altitude 0). Insérant cette expression dans (2.5.3), on trouve l'épaisseur optique:

$$\tau(h) = \sigma n_{n0} H \exp\left(-\frac{h}{H}\right) = \sigma n_n H. \quad (2.5.5)$$

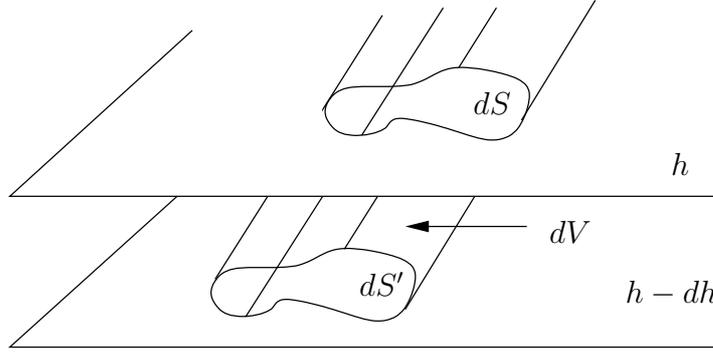
On relie maintenant le taux de production d'ionisation  $Q$  aux quantités déjà calculées. Soit  $dS$  une surface élémentaire sur le plan horizontal situé à l'altitude  $h$ . Le nombre de photons traversant cet élément de surface pendant le temps  $dt$  est, conformément à la définition de l'intensité  $I$  donnée plus haut, égal à

$$dN(h) = I(h) (dS \cos \chi) dt,$$

où le facteur  $\cos \chi$  provient de la projection de la surface sur le plan normal à la direction de la radiation incidente.

Après traversée d'une épaisseur  $dh$ , le pinceau considéré intersecte une surface  $dS'$  d'étendue identique sur le plan horizontal d'altitude  $h - dh$  (cf figure 2.20). Le nombre de photons traversant  $dS'$  est donc

$$dN(h - dh) = I(h - dh) (dS \cos \chi) dt,$$

Figure 2.20: Volume d'ionosphère d'épaisseur  $dh$  intercepté par un faisceau de radiation

Compte tenu de ce que  $I(h - dh) = I(h) - dI(h) + o(h)$ , le nombre de photons absorbés dans le volume cylindrique  $dV$  s'appuyant sur les surfaces  $dS$  et  $dS'$ , pendant l'intervalle de temps  $dt$  est de

$$\Delta N(h) = dI(h)(dS \cos \chi) dt .$$

Le volume  $dV$  vaut par ailleurs

$$dV = (dS \cos \chi) \frac{dh}{\cos \chi} = dS dh .$$

Soit maintenant  $\eta$  l'efficacité de l'ionisation, c'est à dire le nombre de paires d'électrons-ions produites pour un photon incident absorbé. Le nombre d'électrons produits pendant le temps  $dt$  dans le volume  $dV$  est donc

$$\Delta N'(h) = \eta \Delta N(h) = \eta dI(h) (dS \cos \chi) dt .$$

Le taux de production d'ionisation, compte tenu de sa définition donnée plus haut est donc

$$Q = \frac{\Delta N'}{dV dt} = \eta \frac{dI}{dh} \cos \chi = \eta \alpha I . \quad (2.5.6)$$

En reportant les formules (2.5.1) à (2.5.5) dans (2.5.6), on trouve la formule suivante pour le taux de production d'ionisation:

$$Q = (\eta \sigma n_{n0} I_{\infty}) \exp \left( - \left( \frac{h}{H} + \frac{\sigma n_{n0} H}{\cos \chi} e^{-h/H} \right) \right) , \quad (2.5.7)$$

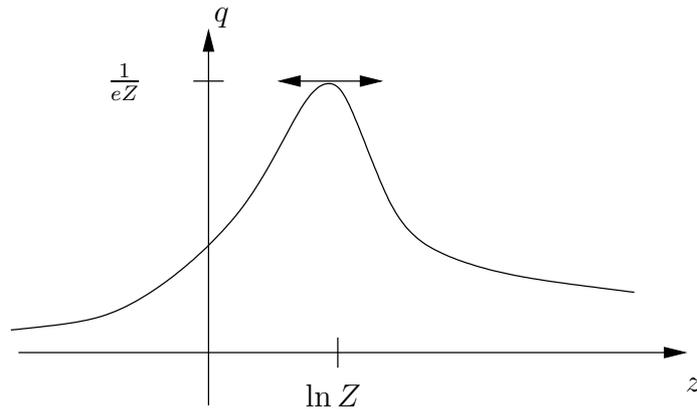
qui est la formule de Chapman.

Pour analyser cette formule, il est préférable d'introduire quelques quantités auxiliaires. On pose:

$$Q_0 = \eta \sigma n_{n0} I_{\infty} , \quad q = \frac{Q}{Q_0} , \quad z = \frac{h}{H} , \quad Z = \frac{\sigma n_{n0} H}{\cos \chi} ,$$

et l'on réécrit (2.5.7):

$$q = e^{-(z+Ze^{-z})} , \quad (2.5.8)$$

Figure 2.21: Graphe de  $q(z)$ 

Il est facile de voir que cette fonction possède un unique maximum en  $z = \ln Z$  (cf figure 2.21).

L'interprétation de ce maximum est simple. Pour des altitudes supérieures, la densité de l'atmosphère neutre devient faible, donc, même si la radiation est intense, l'ionisation produite reste faible. Pour des altitudes inférieures, une proportion importante de la radiation a été absorbée par les couches supérieures de l'atmosphère (cf figure 2.22).

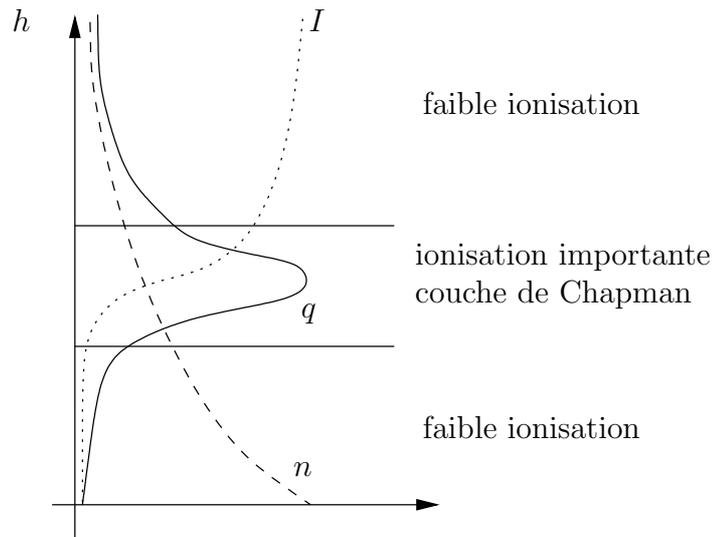


Figure 2.22: Structure stratifiée de l'ionosphère

Par ailleurs, on observe que  $q \rightarrow 0$  quand l'angle zénithal  $\chi \rightarrow \pi/2$ , ce qui veut dire que la production d'ionisation disparaît lorsque le soleil se couche !

Il peut être instructif de calculer quelques ordres de grandeur. Pour une température d'une centaine de Kelvin, une masse moléculaire (pour la molécule  $O_2$ ) d'environ quarante fois la

masse du proton, on obtient que  $H$  est de l'ordre de quelques km. Prenant une efficacité  $\eta \approx 0,1$ , une section efficace  $\sigma \approx 10^{-20} \text{m}^2$  (une section efficace est généralement du même ordre de grandeur que la section d'un atome, c'est à dire de l'ordre de l'Angstroem carré. On rappelle que  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ), la densité de l'atmosphère au sol égale à  $3 \cdot 10^{25} \text{m}^{-3}$  et une intensité incidente de  $3 \cdot 10^{15}$  photons par seconde et par  $\text{m}^2$ , on obtient au zénith ( $\chi = 0$ ):

$$Q_0 \approx 10^{20} \text{m}^{-3} \text{s}^{-1}, \quad Z \approx 10^9, \quad \ln Z \approx 25.$$

Ainsi, le maximum de production d'ionisation est atteint à un altitude  $z_{\text{max}} = H \ln Z \approx 100$  km et vaut environ  $Q_{\text{max}} = Q_0/(eZ) \approx 10^{10}$  paires électrons-ions par  $\text{m}^3$  et par s. Le calcul sous estime un peu le maximum de densité de plasma (200 à 400 km) mais donne un ordre de grandeur correct.

Pour passer de la production de l'ionisation à la densité de plasma, il faut un modèle décrivant l'équilibre entre la production et la recombinaison. Un tel modèle a été proposé par Chapman [10]. Il conduit à une densité de la forme (2.5.8). Nous renvoyons pour les calculs à [10] ou [3].

Le modèle de Chapman est un modèle très simplifié:

- Il ne tient pas compte de la sphéricité de la terre (dépendance de  $\chi$  par rapport à  $h$ ).
- L'atmosphère est composée de plusieurs constituants, de masses, donc d'échelles de hauteur différentes.
- La radiation est constitué d'un spectre de longueurs d'ondes différentes. La section efficace d'absorption dépend de la longueur d'onde.
- La radiation peut être absorbée par d'autres mécanismes d'interaction que l'ionisation, comme par exemple l'excitation des nuages électroniques des atomes ou la dissociation des molécules composées.

Par ailleurs, une fois produite, l'ionisation peut se recombiner, ou encore être transportée. C'est ainsi que l'ionisation peut persister la nuit même en l'absence de production.

Cependant, la formule de Chapman donne un accord qualitatif correct avec les observations et permet de comprendre un certain nombre d'aspects de la structure de l'ionosphère.

**Exercice 2.5.1** *Prouver que la fonction (2.5.8) admet un unique minimum.*

**Exercice 2.5.2** *Reprendre le calcul des ordres de grandeurs donné plus haut.*

## 2.6 Conclusion

La description très sommaire qui précède montre que le "vide" interplanétaire dans lequel évoluent les satellites artificiels est très loin d'être un milieu vraiment vide. Au contraire, c'est un milieu extrêmement agressif, peuplé de particules et de rayonnements très énergétiques. Les satellites doivent être conçus pour résister à ce milieu. Les mesures de protection (utilisation

de composants 'durcis' à l'épreuve des radiations) doivent être accompagnées d'opérations de prévision (développement à l'échelle mondiale d'une "météorologie spatiale" (space weather prediction)).

Sous l'influence des particules et des rayonnements, les satellites accumulent des charges électrostatiques. Lorsque celles-ci deviennent trop importantes, des claquages se produisent (décharges électrostatiques) qui peuvent avoir des effets très destructeurs. Nous verrons au chapitre 4 un exemple de claquage concernant les panneaux des générateurs solaires. Par ailleurs, les turbulences du plasmas ionosphérique peuvent engendrer des problèmes de communication entre la terre et les satellites. Nous développerons au chapitre 3 une modélisation de la turbulence dans l'ionosphère.

# Chapter 3

## Modélisation des irrégularités ionosphériques

### 3.1 Introduction

L'ionosphère joue un rôle important dans la propagation des ondes radio dans certaines gammes de fréquences, aussi bien pour les communications terrestres, que pour les liaisons terre-satellite. Néanmoins, l'ionosphère est très loin d'être un milieu stable et calme. Elle est le siège d'instabilités qui engendrent des structures complexes. En particulier, la densité du plasma y est très inhomogène, ce qui en fait un milieu d'indice optique aléatoire et fluctuant. Les inhomogénéités de l'indice optique provoquent la diffusion des ondes électromagnétiques, ce qui nuit aux communications radio (voir par exemple [23]). La compréhension de la dynamique des irrégularités ionosphériques permet de concevoir et d'améliorer les dispositifs de communication entre la terre et les satellites. L'objet de ce chapitre est d'établir et d'étudier un modèle mathématique de ce phénomène.

Notre point de départ sera le modèle des équations de l'hydrodynamique (équations d'Euler) pour chacune des espèces de particules (électrons et ions) couplées aux équations de Maxwell pour le champ électromagnétique. Grâce à l'analyse des paramètres adimensionnels caractéristiques du problème, il sera possible de ramener le modèle à un système d'équations plus simple, fondé sur les équations de conservation de la densité du plasma d'une part et l'équation de continuité d'autre part. Des simplifications supplémentaires conduiront à un modèle bidimensionnel décrivant la dynamique de l'ionosphère dans un plan perpendiculaire au champ magnétique terrestre. C'est ce dernier modèle, dit modèle striations, qui sera étudié. Nous montrons que certains états stationnaires sont instables, ce qui explique la formation des irrégularités. Nous explorerons alors la possibilité de décrire la dynamique moyenne à grande échelle de ce plasma, grâce à une modélisation des effets de ces irrégularités. La démarche s'appuiera sur l'approche statistique de la turbulence en mécanique des fluides qui conduira à introduire dans le modèle des termes de diffusion stabilisateurs. La stabilité du "modèle striations turbulent" et sa pertinence pour les applications numériques seront ensuite analysées.

## 3.2 Modèle d'Euler-Maxwell

### 3.2.1 Notations et unités

Nous considérons un plasma constitué de deux espèces de particules: des électrons de charge  $-q$  et des ions de charge  $+q$ . La charge élémentaire  $q$  vaut  $q \approx 10^{-19}$  Coulomb. L'ionosphère est en réalité constituée de plusieurs espèces d'ions, mais nous négligerons ce point. Toutes les quantités relatives aux électrons seront indexées par  $e$  et celles relatives aux ions, par  $i$ . Nous noterons  $n_e(x, t)$ ,  $n_i(x, t)$ , les densités électroniques et ioniques, dépendant de la position  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  et du temps  $t$ . Les densités se mesurent en  $\text{m}^{-3}$ . De même, les vitesses moyennes des fluides électroniques et ioniques seront notées  $u_e(x, t)$ ,  $u_i(x, t)$ . Ce sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dont l'unité de mesure est le  $\text{ms}^{-1}$ .

Les masses électroniques et ioniques seront respectivement notées  $m_e$  et  $m_i$ . On rappelle que  $m_e \approx 10^{-30}$  kg. Pour les ions, nous prendrons l'exemple de l'ion  $O^+$  dont la masse est approximativement  $m_i \approx 40000 m_e$ . Ainsi, on peut introduire le 'petit' paramètre:

$$\varepsilon^2 = \frac{m_e}{m_i} \ll 1, \quad (3.2.1)$$

Les températures des fluides électroniques et ioniques seront supposées constantes et égales pour simplifier. Nous noterons  $T$  cette température commune, qui se mesure en Kelvin. Elle est associée à une énergie thermique (énergie cinétique caractéristique du mouvement aléatoire des particules du fluide) égale à  $k_B T$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann valant  $k_B \approx 10^{-23}$  JK $^{-1}$ . La quantité  $k_B T/q$  qui est homogène à un potentiel électrique s'appelle le potentiel thermique. Un potentiel thermique égal à 1 Volt correspond à une température de 11600 Kelvin.

On notera  $E(x, t)$  et  $B(x, t)$  les champs électrique et magnétique. Un champ électrique se mesure en Volt par mètre ( $\text{Vm}^{-1}$ ) et un champ magnétique, en Tesla. Notons qu'un champ électrique est homogène au produit d'un champ magnétique par une vitesse et donc que 1 Tesla = 1  $\text{Vsm}^{-2}$ . L'ionosphère est plongée dans le champ magnétique terrestre, que nous noterons  $B_0$ , qui vaut approximativement  $B_0 \approx 5 \cdot 10^{-5}$  T.

La propagation électromagnétique est caractérisée par les constantes  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ , que sont la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du vide. La quantité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

est la vitesse de la lumière.  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  se mesurent respectivement en Farad par mètre et Henry par mètre. Le Farad est une unité de capacité (1 Farad = 1 Coulomb par Volt) et le Henry est une unité d'inductance (1 Henry = 1 Volt seconde par Ampère), où l'Ampère est l'unité de courant électrique (1 Ampère = 1 Coulomb par seconde).  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  valent respectivement

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{Fm}^{-1} \approx 10^{-11} \text{Fm}^{-1}, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Hm}^{-1} \approx 10^{-6} \text{Hm}^{-1}.$$

On en déduit

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}.$$

### 3.2.2 Equations de conservation des densités de particules

Les équations de conservation des densités d'électrons et d'ions s'écrivent:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, \quad (3.2.3)$$

où  $\nabla \cdot$  désigne l'opérateur divergence.

Pour comprendre la signification de ces équations, il convient de faire quelques rappels sur les équations de conservation. On se donne un champ de vecteurs  $u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \geq 0$ , où  $d$  est la dimension de l'espace considéré. On suppose  $u$  suffisamment régulier pour que les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX}{dt} = u(X(t), t), \quad X(s) = x, \quad (3.2.4)$$

soient définies pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$  et uniques. On note  $X(t; s, x)$  l'unique solution de (3.2.4). Pour tout ouvert borné  $\Omega$  de frontière régulière, on note  $\Omega(t)$  son image par l'application  $x \rightarrow X(t; 0, x)$ . On dit qu'une quantité  $\rho(x, t)$  est conservée par le flot associé à la vitesse  $u$  si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx = 0, \quad (3.2.5)$$

(voir figure 3.1 pour une illustration géométrique de (3.2.5)).

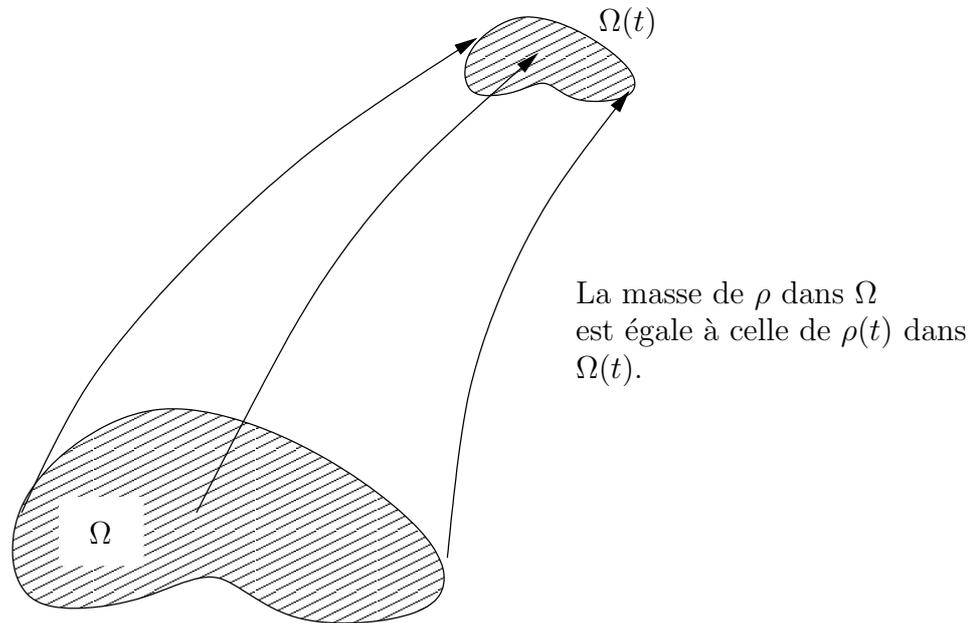


Figure 3.1: Conservation de la masse

**Exercice 3.2.1** Montrer qu'une condition suffisante pour que  $X(t; s, x)$  soit définie et unique pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^d$  est que

$$u \in C^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}),$$

où  $C^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , telles que:

$$\max_{x, y \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}} \frac{|u(x, t) - u(y, t)|}{|x - y|} < \infty.$$

**Exercice 3.2.2** Supposant que  $\rho \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  (espace des fonctions continuellement différentiables sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ), montrer que  $\rho$  est une quantité conservée par le flot de  $u$  si et seulement s'il vérifie l'équation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (3.2.6)$$

*Suggestion: se ramener au domaine  $\Omega$  fixe en utilisant le changement de variables  $x = X(t; 0, x_0)$  et utiliser l'exercice suivant.*

**Exercice 3.2.3** Soit

$$J(t; s, x) = \det \left( \frac{\partial X(t; s, x)}{\partial x} \right).$$

Sous l'hypothèse que  $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ , montrer que  $J$  satisfait l'équation différentielle:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J (\nabla \cdot u)(X(t; s, x), x). \quad (3.2.7)$$

**Exercice 3.2.4** Soit  $\rho(x, t)$  une solution de classe  $C^1$  de (3.2.6), telle que  $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$ . Montrer que nécessairement,  $\rho$  s'écrit:

$$\rho(x, t) = \rho_0(X(0; t, x)) \exp - \int_0^t (\nabla \cdot u)(X(s; t, x), s) ds. \quad (3.2.8)$$

**Exercice 3.2.5** Que deviennent les équations (3.2.5) et (3.2.8) lorsque  $\rho$  est solution de :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = Q, \quad (3.2.9)$$

où  $Q(x, t)$  est une fonction donnée continue (appelée *taux de création volumique de la quantité  $\rho$* ). Dans ce cas, l'équation (3.2.9) s'appelle non plus équation de conservation mais équation de bilan.

Revenant aux équations (3.2.2), (3.2.3), nous voyons qu'elles expriment que les densités d'électrons et d'ions sont des quantités conservées par les flots respectivement associés aux vitesses moyennes des fluides électroniques et ioniques.

### 3.2.3 Equations de bilan d'impulsion des particules

L'équation de bilan d'impulsion pour les électrons s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_e n_e u_{ek}) + \nabla \cdot (m_e n_e u_{ek} u_e) = -\frac{\partial p_e}{\partial x_k} - q n_e (E_k + (u_e \times B)_k) + n_e F_{ek}, \quad (3.2.10)$$

où l'indice  $k$  dénote la  $k$ -ème composante d'un vecteur ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ). Au membre de droite de (3.2.10),  $p_e$  désigne la pression électronique et  $F_e$  les forces extérieures (autres que la pression et la force de Lorentz  $q(E + u_e \times B)$ ) s'exerçant sur les électrons.

L'équation (3.2.10) exprime un bilan d'impulsion. Conformément à l'exercice 3.2.5, le taux de création d'impulsion dirigée selon la  $k$ -ème coordonnée dans un volume  $\Omega(t)$  qui suit le mouvement du fluide est égal à l'intégrale sur le volume  $\Omega(t)$  de la somme des densités volumiques des forces de pression, extérieure et de Lorentz:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (m_e n_e u_{ek})(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left[ -\frac{\partial p_e}{\partial x_k} - q n_e (E_k + (u_e \times B)_k) + n_e F_{ek} \right] dx, \quad (3.2.11)$$

Nous allons maintenant spécifier l'expression des termes de forces au membre de droite de (3.2.10). D'une part, nous ferons l'hypothèse d'un fluide isotherme à la température  $T$  donnée, identique pour les électrons et les ions. L'hypothèse que la température est une donnée extérieure est importante, car elle nous économisera l'écriture d'une équation de bilan de l'énergie du fluide. Elle n'est évidemment qu'une approximation. Le fait de supposer la température constante, uniforme, et identique pour les électrons et les ions constitue en revanche une restriction qu'il est facile de lever, mais que nous maintiendrons par souci de simplicité. Par cette hypothèse, la relation entre la pression et la densité s'exprime par la loi d'état des gaz parfaits isothermes:

$$p_e = n_e k_B T, \quad (3.2.12)$$

La force de Lorentz  $q(E + u_e \times B)$  est la force qui s'exerce sur toute particule individuelle de charge  $q$  en mouvement dans des champs électriques et magnétiques. Considérant dans (3.2.10) l'évolution de la densité d'impulsion, il faut multiplier cette expression par la densité volumique d'électrons  $n_e$ .

Dans l'ionosphère, les collisions entre les électrons et les molécules d'air neutre peuvent être décrites par une force de friction s'écrivant:

$$F_e = -\nu_e m_e (u_e - u_n), \quad (3.2.13)$$

où  $u_n$  est la vitesse moyenne des molécules d'air et  $\nu_e$  est la fréquence des collisions électrons-neutres, que l'on supposera constante pour simplifier (en fait, c'est une fonction de la densité de l'air, qui dépend fortement de l'altitude). En présence de cette seule force, et dans une situation homogène spatialement (c'est à dire si les quantités sont indépendantes de  $x$ ), l'équation de bilan d'impulsion s'écrirait

$$\frac{\partial u_{ek}}{\partial t} = -\nu_e (u_{ek} - u_{nk}),$$

ce qui représente une convergence exponentiellement rapide (avec le taux  $\nu_e$ ) de  $u_{ek}$  vers  $u_{nk}$ . Ainsi, la friction avec le vent de neutres a-t-elle tendance à équilibrer la vitesse des électrons et celle des molécules d'air.

On remarquera que l'on ne tient pas compte des collisions des électrons entre eux ou avec les ions. En effet, dans l'ionosphère, les densités électroniques et ioniques sont beaucoup plus faibles que la densité de neutres. La fréquence de collision avec une espèce donnée étant proportionnelle à la densité de cette espèce, on comprend que les collisions avec les espèces chargées soient négligeables devant les collisions avec les neutres.

**Exercice 3.2.6** *En utilisant l'équation de conservation de la densité (3.2.2), montrer que l'équation de conservation de l'impulsion (3.2.10) peut aussi s'écrire:*

$$\frac{\partial u_{ek}}{\partial t} + u_e \cdot \nabla u_{ek} = -\frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x_k} - \frac{q}{m_e} (E_k + (u_e \times B)_k) + \frac{1}{m_e} n_e F_{ek}, \quad (3.2.14)$$

où  $u \cdot \nabla$  est l'opérateur:

$$u \cdot \nabla = \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

L'opérateur

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla,$$

s'appelle dérivée particulière relative au champ de vitesse  $u$ . L'équation (3.2.14) exprime la dérivée particulière (dans le champ de vitesse  $u_e$ ) de la  $k$  ème composante de la vitesse.

L'équation de bilan d'impulsion pour les ions s'écrit de manière analogue:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i u_{ik}) + \nabla \cdot (m_i n_i u_{ik} u_i) = -\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + q n_i (E_k + (u_i \times B)_k) + n_i F_{ik}, \quad (3.2.15)$$

On remarquera le changement de signe de la charge dans la force de Lorentz dû à la charge positive des ions. La force extérieure s'exerçant sur les ions s'écrit:

$$F_i = -\nu_i m_i (u_i - u_n), \quad (3.2.16)$$

où  $\nu_i$  est la fréquence de collisions ions-neutres, là encore supposée constante pour simplifier.

### 3.2.4 Equations de Maxwell

Les équations régissant l'évolution du champ électromagnétique sont les équations de Maxwell:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 j, \quad (3.2.17)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.2.18)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (3.2.19)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3.2.20)$$

où  $\rho(x, t)$  et  $j(x, t)$  désignent respectivement les densités de charge et de courant électrique:

$$\rho(x, t) = q(n_i - n_e), \quad (3.2.21)$$

$$j(x, t) = q(n_i u_i - n_e u_e), \quad (3.2.22)$$

Les équations (3.2.17) à (3.2.20) s'appellent respectivement équations de Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday, Maxwell-Gauss et équation de conservation du flux de  $B$ .

Les équations de Maxwell ont également une forme intégrale qui traduit les propriétés de conservation du champ électromagnétique (tout comme l'équation (3.2.6) traduit la conservation de  $\rho$  au sens de (3.2.5)). Les exercices qui suivent ont pour but de faire découvrir ces propriétés de conservation (voir également [35], [30], [25]).

**Exercice 3.2.7** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière  $S = \partial\Omega$  supposée régulière. Soit  $dS(x)$  la mesure euclidienne sur la surface  $S$ , et pour  $x \in S$ ,  $\nu(x)$  la normale unitaire à  $\Omega$ , orientée vers l'extérieur (voir figure 3.2). En supposant que  $E(x, t)$  et  $B(x, t)$  sont des fonctions régulières, montrer que:

$$\int_S B \cdot \nu \, dS(x) = 0, \quad (3.2.23)$$

$$\int_S E \cdot \nu \, dS(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x) \, dx. \quad (3.2.24)$$

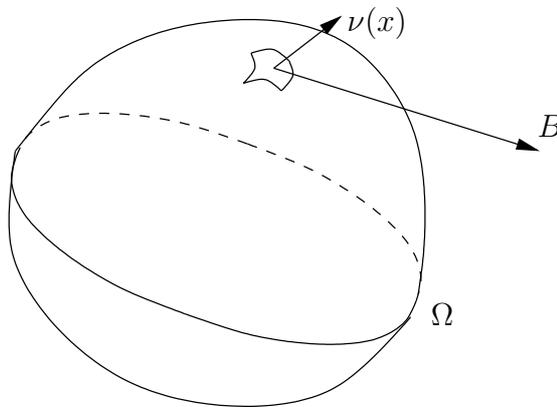
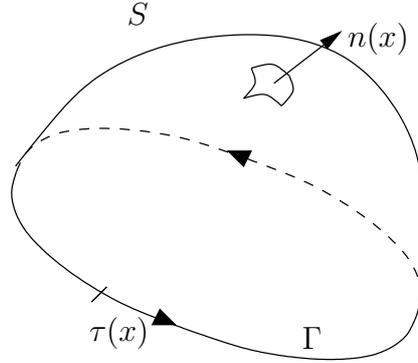


Figure 3.2: Flux de  $B$  à travers une surface fermée

La propriété (3.2.23) s'appelle conservation du flux de  $B$  et indique que le flux de  $B$  à travers toute surface fermée est nul. La propriété (3.2.24) s'appelle théorème de Gauss. La quantité  $\int_{\Omega} \rho(x) \, dx$  est la charge totale contenue dans  $\Omega$ . Le théorème de Gauss exprime que le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égale à la charge totale contenue dans le volume divisée par  $\varepsilon_0$ .

**Exercice 3.2.8** Soit  $S$  une surface fermée orientable de  $\mathbb{R}^3$  dont le bord  $\Gamma = \partial S$  est une courbe fermée régulière. Le choix d'une orientation de  $S$  (c'est à dire, le choix d'un sens positif de la normale à  $S$ ) définit une orientation de  $\Gamma$  (par exemple par la règle du tire-bouchon: le vissage du tire-bouchon, dont la rotation définit une orientation de  $\Gamma$ , provoque l'avancée de la pointe dans la direction de la normale (cf figure 3.3)). On note  $d\Gamma$  l'abscisse curviligne sur  $\Gamma$  et pour un point  $x \in \Gamma$ ,  $\tau(x)$  le vecteur tangent à  $\Gamma$ , orienté dans le sens positif. Montrer que:

Figure 3.3: Surface  $S$ 

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot \nu dS(x) + \int_{\Gamma} E \cdot \tau(x) d\Gamma(x) = 0, \quad (3.2.25)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S E \cdot \nu dS(x) - \int_{\Gamma} B \cdot \tau(x) d\Gamma(x) = -\mu_0 \int_S j \cdot \nu dS(x). \quad (3.2.26)$$

Pourquoi le second terme du membre de gauche de (3.2.25) dépend-il seulement de  $\Gamma$  et non de  $S$  (pourvu que  $\partial S = \Gamma$ ) ?

La propriété (3.2.25) s'appelle théorème de Faraday, et (3.2.26), théorème d'Ampère.

Le théorème de Faraday spécifie que le potentiel électromoteur le long d'une courbe fermée  $\Gamma$  (i.e. le deuxième terme au membre de gauche de (3.2.25), avec un signe  $-$ ) est égal au taux de variation temporel du flux de  $B$  à travers cette surface. C'est le principe de la dynamo de vélo: le mouvement de la roue fait tourner une boucle métallique dans le champ magnétique permanent d'un aimant. A cause de ce mouvement, le flux magnétique à travers la boucle varie, ce qui crée un potentiel électromoteur dans la boucle. Celui-ci permet la circulation d'un courant électrique qui alimente le circuit extérieur. On parle de champ électrique "induit" par la variation du flux magnétique.

Le théorème d'Ampère peut s'énoncer de manière légèrement différente. On appelle courant de déplacement la quantité

$$j_D = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t},$$

et courant total, la quantité  $j_T = j + j_D$ , somme du courant de particules  $j$  et du courant de déplacement. On peut réécrire (3.2.26) selon

$$\int_{\Gamma} B \cdot \tau(x) d\Gamma(x) = \mu_0 \int_S (j + j_D) \cdot \nu dS(x) = \mu_0 \int_S j_T \cdot \nu dS(x). \quad (3.2.27)$$

et énoncer que la circulation de  $B$  le long d'une courbe fermée est égale au flux du courant total à travers cette courbe, multiplié par  $\mu_0$ .

**Exercice 3.2.9** *Montrer, à partir des équations de conservation des densités (3.2.2) et (3.2.3), que*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0. \quad (3.2.28)$$

*En déduire que la quantité au membre de droite de (3.2.27) dépend seulement de  $\Gamma$  et non de  $S$  (pourvu que  $\partial S = \Gamma$ ).*

L'équation (3.2.28) s'appelle l'équation de continuité.

**Exercice 3.2.10** *Soient  $E(x, t)$  et  $B(x, t)$ , des solutions régulières des équations de Maxwell (3.2.17) et (3.2.18) associées aux données initiales  $E(x, 0) = E_0(x)$  et  $B(x, 0) = B_0(x)$ .*

*(i) Montrer que si la divergence du champ magnétique est nulle à l'instant initial:*

$$\nabla \cdot B_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

*alors elle reste identiquement nulle pour tout temps:*

$$\nabla \cdot B(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall t > 0.$$

*(ii) Montrer que si l'équation de Maxwell-Gauss est satisfaite par la donnée initiale:*

$$\nabla \cdot E_0(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

*et si l'équation de continuité (3.2.28) est satisfaite pour tout temps, alors l'équation de Maxwell-Gauss est satisfaite pour tout temps également:*

$$\nabla \cdot E(x, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall t > 0.$$

Ainsi, l'équation de Gauss et la conservation du flux de  $B$  apparaissent comme des contraintes sur les champs, qui sont satisfaites à tout instant, dès qu'elles sont satisfaites à  $t = 0$  et que l'équation de continuité est satisfaite (pour l'équation de Maxwell-Gauss).

**Exercice 3.2.11** On suppose que  $(E, B)$  ne dépendent que de  $(x_1, x_2)$ , et que  $\rho = 0$  et  $j = 0$ .  
 (i) On note  $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$ ,  $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$ . Montrer que le système de Maxwell se décompose en deux systèmes découplés:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \text{Rot}_2 \mathcal{B}_3 = 0, \quad (3.2.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial t} + \text{rot}_2 \mathcal{E} = 0, \quad (3.2.30)$$

$$\nabla_2 \cdot \mathcal{E} = 0, \quad (3.2.31)$$

et

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_3}{\partial t} - \text{rot}_2 \mathcal{B} = 0, \quad (3.2.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \text{Rot}_2 E_3 = 0, \quad (3.2.33)$$

$$\nabla_2 \cdot \mathcal{B} = 0, \quad (3.2.34)$$

où les opérateurs  $\text{Rot}_2 u$  du champ scalaire  $u(x_1, x_2)$  et  $\text{rot}_2 A$ ,  $\nabla_2 \cdot A$  du champ de vecteurs  $A = (A_1(x_1, x_2), A_2(x_1, x_2))$  sont définis par:

$$\text{Rot}_2 u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad \text{rot}_2 A = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}, \quad \nabla_2 \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}.$$

Les ondes électromagnétiques solutions respectivement des systèmes (3.2.29)-(3.2.31) et (3.2.32)-(3.2.34) sont dites respectivement en polarisation Transverse Magnétique (TM) et Transverse Electrique (TE). En effet, dans le premier cas, le champ magnétique  $y$  est transverse au plan de propagation  $(x_1, x_2)$ . Dans le second cas, c'est le champ électrique qui est transverse.

(ii) Dans le système (3.2.29)-(3.2.31), on suppose de plus que  $\mathcal{E}$  et  $B_3$  ne dépendent que de  $x_1$  et de  $t$ . Montrer qu'alors,  $E_1$  est une constante indépendante de  $x_1$  et  $t$  et que  $E_2$  et  $B_3$  sont solutions de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x_1} = 0, \quad (3.2.35)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0, \quad (3.2.36)$$

Les ondes correspondantes sont dites en polarisation Transverse Electrique Magnétique (TEM), puisque les champs électriques et magnétiques sont tous deux transverses à la direction de propagation  $x_1$ .

(iii) En notant  $u = E_2$ ,  $v = cB_3$  et  $x = x_1$ , montrer que  $u$  est solution de l'équation des ondes monodimensionnelle:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2.37)$$

Introduisant  $w = u + v$ ,  $z = u - v$ , montrer que  $w$  et  $z$  satisfont:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.2.38)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (3.2.39)$$

En déduire que la solution de (3.2.37) en fonction de  $u_0$  et  $v_0$  est donnée par

$$u(x, t) = (u_0 + v_0)(x - ct) + (u_0 - v_0)(x + ct).$$

Les équations (3.2.38) et (3.2.39) s'appellent équations de transport. Dans le cas général multidimensionnel, il est faux que les équations de Maxwell se décomposent en deux équations de transport. Par contre, on peut toujours mettre les équations de Maxwell sous forme de deux équations des ondes vectorielles:

**Exercice 3.2.12** Montrer dans le cas général que  $E$  et  $B$  satisfont à des équations des ondes vectorielles découplées:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E &= -\mu_0 \frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \Delta B &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times j. \end{aligned}$$

Il est cependant généralement impossible de découpler les équations pour  $E$  et  $B$  au niveau des conditions aux limites.

### 3.2.5 Bilan des équations décrivant le plasma

On peut donc résumer le système d'équations décrivant le plasma jusqu'ici:

Le fluide électronique est décrit par sa densité  $n_e$  et sa vitesse moyenne  $u_e$ , solutions du système:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, \quad (3.2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_e n_e u_{ek}) + \nabla \cdot (m_e n_e u_{ek} u_e) = -\frac{\partial p_e}{\partial x_k} - q n_e (E_k + (u_e \times B)_k) + n_e F_{ek}. \quad (3.2.41)$$

Le fluide ionique est décrit par sa densité  $n_i$  et sa vitesse moyenne  $u_i$ , solutions de:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, \quad (3.2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i u_{ik}) + \nabla \cdot (m_i n_i u_{ik} u_i) = -\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + q n_i (E_k + (u_i \times B)_k) + n_i F_{ik}, \quad (3.2.43)$$

avec

$$p_e = n_e k_b T, \quad p_i = n_i k_b T,$$

$$F_e = -\nu_e m_e (u_e - u_n), \quad F_i = -\nu_i m_i (u_i - u_n).$$

Ces équations sont couplées au système de Maxwell pour les champs  $E$  et  $B$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 J, \quad (3.2.44)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.2.45)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (3.2.46)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3.2.47)$$

via les sources du champ:

$$\rho(x, t) = q(n_i - n_e), \quad (3.2.48)$$

$$j(x, t) = q(n_i u_i - n_e u_e), \quad (3.2.49)$$

Ce système est très complexe. Dans la section suivante, nous allons chercher à déterminer les termes les plus importants, grâce à l'introduction de nouvelles variables sans dimension physique. On va donc procéder à un 'adimensionnement' des équations.

## 3.3 Adimensionnement du modèle

### 3.3.1 Principe

Le principe de l'adimensionnement est le suivant:

1. On se donne un certain jeu de grandeurs caractéristiques en liaison avec le système étudié: par exemple, dans le cas de l'ionosphère, on s'intéressera à une région de l'espace de quelques centaines de kilomètres d'étendue. On choisira donc comme longueur caractéristique  $\tilde{x} = 100$  km.
2. On utilise ces grandeurs caractéristiques comme "unité de mesure". On les appellera "grandeurs de référence". On exprime toutes les variables par rapport à ces grandeurs de référence. Par exemple, si  $\tilde{x}$  est la longueur de référence, on introduira  $x'$ , variable de position "adimensionnée", égale à  $x' = x/\tilde{x}$ .
3. On exprime le système d'équations dans ce nouveau jeu de variables et d'inconnues. Lors de ce passage, il apparaît un certain nombre de paramètres sans dimension, qui expriment des rapports d'échelles entre les phénomènes physiques décrits par le modèle et les échelles de référence choisies. De la valeur de ces rapports, (beaucoup plus petits que, de l'ordre de ou beaucoup plus grands que 1), on peut déterminer quels termes du modèle sont significatifs et quels termes peuvent être négligés.

La détermination de ce jeu de grandeurs de référence n'est pas unique, y compris pour un même phénomène donné. Il dépend beaucoup des échelles auxquelles on veut analyser le phénomène. C'est la raison pour laquelle, suivant l'analyse souhaitée, des modèles différents du même phénomène peuvent être utilisés.

### 3.3.2 Jeu de grandeurs de référence pour la modélisation de l'ionosphère

Dans le cas de la modélisation de l'ionosphère, on choisit le jeu de grandeurs de référence suivantes (notées avec des tildes):

- Longueur de référence  $\tilde{x}$ : taille du système étudié  $L$ . On choisit  $L \approx 10^5$  m.
- vitesse de référence  $\tilde{u}$ : on a vu que l'ionosphère est mise en mouvement par le vent de neutres. l'ordre de grandeur des vitesses atteintes par le plasma dans l'ionosphère est le même que celle du vent de neutres. Ainsi, on choisit  $\tilde{u} = U_n$ , où  $U_n$  est une valeur caractéristique du vent de neutres. On prendra  $U_n \approx 10^2$  ms<sup>-1</sup>.
- Temps de référence  $\tilde{t}$ : Il suit des choix de la longueur et de la vitesse de référence:  $\tilde{t} = \tilde{x}/\tilde{u} = L/U_n$ . On a donc  $\tilde{t} \approx 10^3$  s.
- Energie de référence  $\tilde{W}$ : Puisque l'essentiel de l'énergie provient du mouvement de l'ionosphère, on choisit comme énergie de référence, l'énergie cinétique du fluide animé de la vitesse caractéristique  $\tilde{u}$ . Comme la masse des électrons est très petite devant celle des ions, seuls, les ions contribuent de manière significative à cette énergie. Ainsi, on choisit  $\tilde{W} = m_i U_n^2$ . Avec une masse ionique de l'ordre de  $10^4$  fois la masse électronique, on obtient  $\tilde{W} \approx 10^{-22}$  J.
- Densité de référence  $\tilde{n}$ : on choisit la densité caractéristique de l'ionosphère à son maximum de densité, soit environ  $10^5$  cm<sup>-3</sup> ou encore  $\tilde{n} \approx 10^{11}$  m<sup>-3</sup>.
- Champ magnétique  $\tilde{B}$ : on verra que le champ magnétique induit par le mouvement du plasma est très faible devant le champ magnétique terrestre  $B_0$ . On choisit donc  $\tilde{B} = B_0 \approx 10^{-5}$  T.
- Champ électrique  $\tilde{E}$ . C'est le champ électrique induit par le mouvement du plasma à travers les lignes du champ magnétique terrestre. Il a donc pour valeur  $\tilde{E} = U_n B_0 \approx 10^{-3}$  Vm<sup>-1</sup>.
- Densité de charge de référence  $\tilde{\rho}$ : on la lie à la densité caractéristique du plasma par  $\tilde{\rho} = q\tilde{n} \approx 10^{-8}$  Cm<sup>-3</sup>.
- Densité de courant de référence  $\tilde{j}$ : comme pour la densité de charge, on écrit:  $\tilde{j} = q\tilde{n}\tilde{u} \approx 10^{-6}$  Am<sup>-2</sup>.

On supposera par ailleurs que les fréquences de collision électrons-neutres  $\nu_e$  et ions-neutres  $\nu_i$  sont constantes (indépendantes de  $t$  et de  $x$ ), ce qui n'est pas nécessairement justifié. Mais cette hypothèse simplifiera la présentation et il est facile d'étendre l'analyse à des fréquences de collisions variables. On prendra  $\nu_e \approx 10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\nu_i \approx 10 \text{ s}^{-1}$ .

On introduit alors les variables et inconnues adimensionnées (notées avec des primes), selon:

$$\begin{aligned} (n_e, n_i) &= \tilde{n}(n'_e, n'_i), & (u_e, u_i, u_n) &= \tilde{u}(u'_e, u'_i, u'_n) \\ E &= \tilde{E}E', & B &= \tilde{B}B', & \rho &= \tilde{\rho}\rho', & j &= \tilde{j}j'. \end{aligned}$$

**Exercice 3.3.1** Retrouver les valeurs numériques des grandeurs de références détaillées plus haut, en admettant celles des longueur, vitesse, densité et champ magnétique.

### 3.3.3 Le système d'Euler-Maxwell adimensionné

Dans toute la suite, on omettra les primes. Il est convenu désormais que toutes les notations  $n_e, n_i, u_e, u_i, E$ , etc. désignent des quantités adimensionnées.

#### Equations de conservations des densités

Il est facile de voir que l'adimensionnement choisi ne change pas les équations de conservation des densités électroniques et ioniques:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, \quad (3.3.2)$$

#### Equations de bilan d'impulsion

L'adimensionnement des équations d'impulsion électronique et ionique fait apparaître cinq paramètres sans dimension:

- Le rapport des masses électronique et ionique:

$$\varepsilon^2 = \frac{m_e}{m_i}. \quad (3.3.3)$$

On rappelle que

$$\varepsilon^2 \approx 10^{-4}.$$

- Le rapport de l'énergie thermique à l'énergie de référence  $\tilde{W}$ :

$$\eta^2 = \frac{k_B T}{m_i U_n^2}, \quad (3.3.4)$$

On appelle vitesse thermique des ions (respectivement des électrons) et on notera  $u_{T,i}$  (resp.  $u_{T,e}$ ) les quantités

$$u_{T,i} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_i}}, \quad u_{T,e} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}. \quad (3.3.5)$$

$u_{T,i}$  et  $u_{T,e}$  sont des mesures de la composante aléatoire de la vitesse des ions et des électrons. Bien qu'ayant la même température, les deux espèces ont des vitesses thermiques très différentes, en raison de l'importante différence de masses. On peut interpréter le paramètre  $\eta$  comme le rapport de la vitesse thermique ionique à la vitesse du vent de neutres:

$$\eta = \frac{u_{T,i}}{U_n}.$$

et l'on a:

$$\frac{u_{T,e}}{U_n} = \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Avec les valeurs numériques choisies plus haut, on a

$$u_{T,i} \approx 10^3 \text{ms}^{-1}, \quad u_{T,e} \approx 10^5 \text{ms}^{-1}, \quad \eta^2 \approx 10^2.$$

- Le paramètre noté  $\bar{\omega}$  égal à:

$$\bar{\omega} = \frac{qB_0}{m_i} \tilde{t} = \omega_{c,i} \tilde{t}, \quad (3.3.6)$$

où

$$\omega_{c,i} = \frac{qB_0}{m_i},$$

est la fréquence cyclotron ionique dans le champ magnétique terrestre. En effet une particule chargée de masse  $m_i$  en mouvement dans un champ magnétique uniforme  $B_0$  effectue dans le plan perpendiculaire à  $B_0$  un mouvement de rotation avec une fréquence angulaire égale à  $\omega_{c,i}$  (voir exercice 3.3.2). Dans le cas de l'ionosphère, l'application numérique donne:

$$\omega_{c,i} \approx 10^2 \text{s}^{-1}, \quad \bar{\omega} \approx 10^5.$$

On peut évidemment définir une fréquence cyclotron électronique:

$$\omega_{c,e} = \frac{qB_0}{m_e},$$

et l'on a évidemment

$$\omega_{c,e} \tilde{t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{\omega}.$$

- Les nombres  $\bar{\nu}_e$  et  $\bar{\nu}_i$  définis par

$$\bar{\nu}_e = \frac{m_e}{m_i} \nu_e \tilde{t}, \quad \bar{\nu}_i = \nu_i \tilde{t}. \quad (3.3.7)$$

Le nombre  $\bar{\nu}_i$  (respectivement  $\varepsilon^{-2}\bar{\nu}_e$ ) représente le nombre typique de collisions avec des molécules neutres que les ions (respectivement les électrons) subissent pendant un temps caractéristique  $\tilde{t}$ . Ils représentent un indice de l'importance des collisions entre les particules chargées du plasma et le vent de neutres. Dans notre cas, l'application numérique donne:

$$\bar{\nu}_e \approx 10^2, \quad \bar{\nu}_i \approx 10^4,$$

Ayant défini ces paramètres adimensionnels, il est possible d'écrire les équations de conservation de l'impulsion des électrons et des ions adimensionnées:

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (n_e u_{ek}) + \nabla \cdot (n_e u_{ek} u_e) \right) + \eta^2 \frac{\partial n_e}{\partial x_k} = -\bar{\omega} n_e (E_k + (u_e \times B)_k) - \bar{\nu}_e n_e (u_e - u_n)_k, \quad (3.3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_i u_{ik}) + \nabla \cdot (n_i u_{ik} u_i) + \eta^2 \frac{\partial n_i}{\partial x_k} = +\bar{\omega} n_i (E_k + (u_i \times B)_k) - \bar{\nu}_i n_i (u_i - u_n)_k, \quad (3.3.9)$$

**Exercice 3.3.2** (i) Soit  $B$  un champ magnétique uniforme supposé dirigé selon le troisième axe de coordonnées:  $B = b e_3$  avec  $b$  constante réelle positive. Résoudre les équations du mouvement d'une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  dans ce champ:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = q(v \times B).$$

Montrer que le mouvement en projection sur  $e_3$  est un mouvement rectiligne uniforme et que le mouvement en projection sur le plan perpendiculaire à  $e_3$  est un mouvement de rotation à la vitesse angulaire  $\omega_c = qB/m$ . Ce mouvement de rotation s'appelle la rotation de Larmor.

(ii) Reprendre la question en présence à la fois de champs électrique et magnétique uniformes. Montrer que dans le plan perpendiculaire à  $B$ , la particule décrit une cycloïde correspondant à la superposition d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation dans la direction de  $E \times B$  (dérive en  $E \times B$ ), à une vitesse moyenne égale à  $\frac{|E_\perp|}{|B|}$ , où  $E_\perp$  est la projection de  $E$  sur le plan perpendiculaire à  $B$ .

**Exercice 3.3.3** Etablir la forme adimensionnelle des équations de bilan d'impulsion (3.3.8), (3.3.9).

## Equations de Maxwell

L'adimensionnement des équations des sources du champ est immédiate et donne:

$$\rho(x, t) = n_i - n_e, \quad (3.3.10)$$

$$j(x, t) = n_i u_i - n_e u_e, \quad (3.3.11)$$

L'adimensionnement des équations de Maxwell fait intervenir deux autres paramètres sans dimension:

- Le rapport de la vitesse caractéristique du vent de neutres à la vitesse de la lumière:

$$\beta^2 = \frac{U_n^2}{c^2} \quad (3.3.12)$$

On calcule aisément que  $\beta^2 \approx 10^{-12}$ . La vitesse caractéristique du plasma est très petite devant la vitesse de la lumière. On utilisera cette propriété pour simplifier notablement les équations de Maxwell.

- la quantité  $\gamma$  suivante:

$$\gamma = \frac{\mu_0 q \tilde{n} U_n L}{B_0} = \frac{\mu_0 \tilde{j} L}{B_0} \quad (3.3.13)$$

On se reportera ci-dessous pour l'interprétation physique de  $\gamma$ . Avec les valeurs numériques envisagées, on vérifie que  $\gamma \approx 10^{-4}$ .

**Exercice 3.3.4** Dans cet exercice, les quantités sont supposées avoir leur dimension physique. Considérant  $\rho = 0$  et une densité de courant  $j$  donnée par

$$j(x, t) = I \delta(x_1) \delta(x_2) e_3,$$

où  $I$  est une constante et  $\delta$  désigne la mesure de Dirac. La distribution  $j$  modélise un courant d'intensité  $I$  concentré sur l'axe  $e_3$ . Montrer que les équations de Maxwell se réduisent aux équations de la magnétostatique:

$$\nabla \times B = \mu_0 j, \quad \nabla \cdot B = 0,$$

dont l'unique solution tendant vers 0 quand  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$  est donnée par

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\theta,$$

où  $e_\theta = r^{-1}(-x_2, x_1, 0)$ .

Suivant l'exercice 3.3.4 la quantité  $\mu_0 \tilde{j} L = (\mu_0 \tilde{j} L^2)/L = \hat{B}$  représente l'ordre de grandeur du champ magnétique créée par la densité de courant  $\tilde{j}$ , à une distance caractéristique de l'ordre de  $L$ . Par conséquent, le paramètre  $\gamma$  peut s'interpréter comme le rapport du champ magnétique caractéristique créé par le plasma au champ magnétique terrestre. La valeur très faible de  $\gamma$  montre que l'on pourra négliger le champ magnétique induit au regard du champ magnétique terrestre. Une autre interprétation de  $\gamma$  fait appel au concept d'énergie électromagnétique (exercice suivant):

**Exercice 3.3.5** Soient  $E(x, t)$ ,  $B(x, t)$ , des solutions régulières des équations de Maxwell (3.2.17), (3.2.18). Dans cet exercice, les différentes grandeurs ont leur dimension physique. Montrer que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{|E|^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} |B|^2 \right) + \nabla \cdot \left( c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \times B \right) = -j \cdot E. \quad (3.3.14)$$

(i) Montrer que la quantité

$$W_{em} = \varepsilon_0 \frac{|E|^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} |B|^2,$$

a la dimension d'une densité d'énergie (énergie  $\times$  inverse d'un volume) et que le vecteur

$$P = c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \times B,$$

a la dimension d'une densité de flux d'énergie (énergie  $\times$  vitesse  $\times$  inverse d'un volume), alors que la quantité  $j \cdot E$  a la dimension d'un taux de variation de densité d'énergie (énergie  $\times$  inverse d'un volume  $\times$  inverse d'un temps).  $W_{em}$  s'appelle densité d'énergie électromagnétique,  $P$  est le flux d'énergie électromagnétique ou vecteur de Poynting. Enfin,  $-j \cdot E$  est la dissipation d'énergie par effet Joule.

(ii) Quelle relation de bilan exprime (3.3.14) ?

(iii) Vérifier que la quantité  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  a la dimension d'une résistance.  $Z_0$  s'appelle l'impédance du vide.

On peut alors écrire

$$\gamma = \left( \frac{\hat{B}^2/\mu_0}{B_0^2/\mu_0} \right)^{1/2},$$

qui représente le rapport de l'énergie électromagnétique induite par le plasma à l'énergie magnétique terrestre

Les équations de Maxwell adimensionnées s'écrivent maintenant:

$$\beta^2 \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\gamma j, \quad (3.3.15)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.3.16)$$

$$\frac{\beta^2}{\gamma} \nabla \cdot E = \rho, \quad (3.3.17)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3.3.18)$$

Le paramètre  $\beta^2/\gamma$  apparaissant dans l'équation de Maxwell-Gauss (3.3.18) vaut, pour le jeu de valeurs numériques envisagées:  $\beta^2/\gamma \approx 10^{-8}$

**Exercice 3.3.6** Etablir les équations de Maxwell adimensionnées (3.3.15)-(3.3.18).

**Exercice 3.3.7** Dans cet exercice, les différentes grandeurs ont leur dimension physique. Nous considérons une densité de courant  $j = 0$  et une densité de charge  $\rho = Q\delta(x)$ , où  $Q$  est une constante indépendante de  $t$  et  $\delta$ , la distribution de Dirac tridimensionnelle (i.e.  $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ ). La distribution  $\rho$  modélise une charge ponctuelle placée à l'origine. Montrer que les équations de Maxwell se réduisent aux équations de l'électrostatique:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \nabla \times E = 0,$$

soit encore, en introduisant le potentiel électrostatique  $\phi$ :

$$E = -\nabla\phi, \quad -\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho.$$

Montrer qu'elles ont pour unique solution telle que  $\phi$  tend vers 0 à l'infini:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|x|^2} \frac{x}{|x|}.$$

On peut écrire

$$\frac{\beta^2}{\gamma} = \frac{U_n^2}{c^2} \frac{B_0}{\mu_0 q \tilde{n} U_n L} = \frac{\varepsilon_0 \tilde{E}}{q \tilde{n} L} = \frac{\tilde{E}}{\hat{E}},$$

où  $\tilde{E} = B_0 U_n$  est le champ électrique de référence et  $\hat{E}$  est la quantité

$$\hat{E} = \frac{q \tilde{n} L}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q \tilde{n} L^3}{L^2}.$$

La quantité  $\tilde{n} L^3$  est le nombre d'électrons dans le volume de référence, et donc,  $Q = q \tilde{n} L^3$  est la charge contenue dans ce volume. En vertu de l'exercice 3.3.7,

$$\hat{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{L^2},$$

est l'ordre de grandeur du champ électrique créé par ces charges à une distance égale à la longueur de référence. Par conséquent,  $\hat{E}$  est une mesure du champ électrique créé par les charges du plasma. Le fait que  $\beta^2/\gamma$  soit beaucoup plus petit que 1 indique que le champ créé par les charges du plasma est beaucoup plus important que la valeur de référence choisie, laquelle représente le champ électrique induit par le mouvement des charges à travers le champ magnétique terrestre. Nous verrons dans la prochaine section comment on peut exploiter ce fait pour se ramener à un modèle quasineutre.

**Remarque 3.3.1** Généralement, dans un plasma à l'équilibre thermique à la température  $T$ , on choisit plutôt comme valeur de référence du champ électrique la valeur  $\tilde{E} = k_B T / q L = U_T / L$  où l'on rappelle que  $U_T$  est le potentiel thermique (cf section 3.2.1).

Le paramètre  $\beta^2/\gamma$  de l'équation de Maxwell-Gauss adimensionnée doit être alors remplacé par le paramètre

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{E}}{\hat{E}} = \frac{k_B T}{q L} \frac{\varepsilon_0}{q \tilde{n} L} = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{q^2 \tilde{n}} \frac{1}{L^2}.$$

La quantité

$$\lambda_D = \left( \frac{\varepsilon_0 k_B T}{q^2 \tilde{n}} \right)^{1/2},$$

a donc la dimension d'une longueur et s'appelle longueur de Debye ou longueur d'écran. Remarquer que

$$\lambda_D = \frac{u_{T,e}}{\omega_{p,e}} = \frac{u_{T,i}}{\omega_{p,i}},$$

où  $u_{T,e}$  (resp.  $u_{T,i}$ ) est la vitesse thermique électronique (resp. ionique), définie en (3.3.5) et  $\omega_{p,e}$  (resp.  $\omega_{p,i}$ ) est la fréquence plasma électronique (resp. ionique) définie en (2.3.1).  $\lambda_D$  est donc la distance typique parcourue par une particule du plasma pendant une période d'oscillation plasma.

Dans l'exemple qui nous intéresse, les phénomènes thermiques ne jouent pas un rôle prédominant. C'est pourquoi nous avons choisi une autre valeur du champ électrique de référence, celle liée au phénomène qui met en mouvement le plasma.

### Bilan: modèle d'Euler-Maxwell adimensionné

Le modèle d'Euler-Maxwell adimensionné s'écrit de la manière suivante:

- Pour les électrons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e u_e) &= 0, & (3.3.19) \\ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (n_e u_{ek}) + \nabla \cdot (n_e u_{ek} u_e) \right) + \eta^2 \frac{\partial n_e}{\partial x_k} &= \\ &= -\bar{\omega} n_e (E_k + (u_e \times B)_k) - \bar{\nu}_e n_e (u_e - u_n)_k, & (3.3.20) \end{aligned}$$

- Pour les ions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i u_i) &= 0, & (3.3.21) \\ \frac{\partial}{\partial t} (n_i u_{ik}) + \nabla \cdot (n_i u_{ik} u_i) + \eta^2 \frac{\partial n_i}{\partial x_k} &= \\ &= +\bar{\omega} n_i (E_k + (u_i \times B)_k) - \bar{\nu}_i n_i (u_i - u_n)_k, & (3.3.22) \end{aligned}$$

- pour les sources du champ:

$$\rho(x, t) = n_i - n_e, \quad (3.3.23)$$

$$j(x, t) = n_i u_i - n_e u_e, \quad (3.3.24)$$

- Pour les équations de Maxwell:

$$\beta^2 \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\gamma j, \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.3.26)$$

$$\frac{\beta^2}{\gamma} \nabla \cdot E = \rho, \quad (3.3.27)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3.3.28)$$

où les paramètres sans dimension ont les valeurs caractéristiques données par le tableau ci-dessous:

Paramètre	Valeur	Signification
$\varepsilon^2$	$10^{-4}$	Rapport des masses
$\eta^2$	$10^2$	Energie thermique / Energie cinétique du plasma
$\bar{\omega}$	$10^5$	Fréquence cyclotron ionique adimensionnée
$\bar{\nu}_e$	$10^2$	Fréquence de collision électron-neutre adimensionnée
$\bar{\nu}_i$	$10^4$	Fréquence de collision ion-neutre adimensionnée
$\beta^2$	$10^{-12}$	Vitesse des neutres / Vitesse de la lumière
$\gamma$	$10^{-4}$	Champ magn. du plasma / Champ magn. terrestre
$\beta^2/\gamma$	$10^{-8}$	Champ élec. induit / Champ élec. du plasma

Tableau 1. Valeur des paramètres adimensionnés intervenant dans le modèle d'Euler-Maxwell pour l'ionosphère.

Dans la section suivante, nous exploiterons les valeurs des paramètres pour simplifier le modèle et établir le modèle "dynamo tridimensionnel".

## 3.4 Le modèle dynamo tridimensionnel

### 3.4.1 Suppression des termes négligeables

Dans le modèle d'Euler-Maxwell adimensionné (3.3.19)- (3.3.28), certains termes sont beaucoup plus petits que les autres. Nous allons donc les négliger et établir par ce procédé limite un

nouveau modèle, le modèle dynamo tridimensionnel. Sur le plan mathématique, les passages à la limite que suppose cette procédure peuvent être redoutablement complexes, et constituent encore pour l'essentiel des problèmes ouverts. Nous ne développerons donc pas les aspects rigoureux au sens mathématique de cette étape.

Les paramètres adimensionnels caractérisant les différents phénomènes n'apparaissent que dans les équations de bilan d'impulsion (3.3.20), (3.3.22) et dans les équations de Maxwell-Ampère (3.3.25) et de Maxwell-Gauss (3.3.27).

### Bilan d'impulsion électronique (3.3.20)

L'équation (3.3.20) fait apparaître quatre termes dont les ordres de grandeur sont respectivement:  $\varepsilon^2 = 10^{-4}$ ,  $\eta^2 = 10^2$ ,  $\bar{\omega} = 10^5$ ,  $\bar{\nu}_e = 10^2$ . On néglige donc le terme en facteur de  $\varepsilon^2$ , qui correspond à l'inertie des électrons, et on obtient:

$$n_e(E + u_e \times B) + \frac{\bar{\nu}_e}{\bar{\omega}} n_e (u_e - u_n) = -\frac{\eta^2}{\bar{\omega}} \nabla n_e. \quad (3.4.1)$$

Comme on le verra plus loin, cette équation permet d'obtenir la valeur de  $u_e$  comme fonction locale des autres inconnues.

### Bilan d'impulsion ionique (3.3.22)

L'équation (3.3.22) possède quatre termes dont les ordres de grandeur sont respectivement: 1,  $\eta^2 = 10^2$ ,  $\bar{\omega} = 10^5$ ,  $\bar{\nu}_e = 10^2$ . On néglige le terme d'ordre 1, qui correspond là encore à l'inertie des ions. On obtient:

$$n_i(E + u_i \times B) - \frac{\bar{\nu}_i}{\bar{\omega}} n_i (u_i - u_n) = \frac{\eta^2}{\bar{\omega}} \nabla n_i. \quad (3.4.2)$$

De même que pour  $u_e$ ,  $u_i$  devient une fonction locale des autres inconnues.

### Equation de Maxwell-Ampère (3.3.25)

L'équation (3.3.25) contient trois termes, d'ordre respectifs  $\beta^2 = 10^{-12}$ , 1 et  $\gamma = 10^{-4}$ . On peut donc négliger tous les autres termes devant le terme d'ordre 1: on obtient:

$$\nabla \times B = 0. \quad (3.4.3)$$

Avec l'équation de conservation du flux (3.3.28), (3.4.3) constitue l'équation d'un champ magnétique dans l'approximation quasi-statique, lorsqu'il n'y a pas de courant électrique.

### Equation de Maxwell-Gauss (3.3.27)

L'équation (3.3.27) contient deux termes, d'ordre respectifs  $\beta^2/\gamma = 10^{-8}$  et 1. On peut donc négliger l'autre terme devant le terme d'ordre 1: on obtient:

$$\rho = 0. \quad (3.4.4)$$

Cette équation traduit la quasi-neutralité du plasma (la densité de charge est partout nulle).

### 3.4.2 Résolution des équations de Maxwell

Après les passages aux limites du paragraphe précédent, le système de Maxwell et les équations des sources du champ s'écrivent:

$$\nabla \times B = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.4.6)$$

$$\rho = 0, \quad (3.4.7)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3.4.8)$$

$$\rho(x, t) = n_i - n_e, \quad (3.4.9)$$

$$j(x, t) = n_i u_i - n_e u_e, \quad (3.4.10)$$

Nous allons maintenant résoudre ces équations de Maxwell "simplifiées". L'équation (3.4.5) implique l'existence d'un potentiel magnétique, c'est à dire d'une fonction scalaire  $\psi: x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \psi(x) \in \mathbb{R}$  tel que

$$B = -\nabla\psi. \quad (3.4.11)$$

L'équation (3.4.8) donne alors :

$$\Delta\psi = 0, \quad (3.4.12)$$

c'est à dire que  $\psi$  est harmonique.

Pour progresser, il est utile de spécifier des conditions aux limites. On se donne un domaine  $\Omega$  fermé de l'ionosphère (par exemple, un cube de 100 km de côté). On suppose que le plasma ne perturbe pas le champ magnétique terrestre  $B_0$  à l'extérieur de  $\Omega$ , car on est intéressé à l'évolution de structures de plasma localisées de quelques dizaines à quelques centaines de km d'étendue spatiale. Par conséquent, sur le bord de  $\Omega$ , on spécifie  $\psi = \psi_0$  où  $\psi_0$  est le potentiel magnétique du champ magnétique terrestre. Bien entendu,  $\psi_0$  à l'intérieur de  $\Omega$  est solution du problème aux limites:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_0 &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \psi_0 &= \psi_0|_{\partial\Omega} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

D'après (3.4.12) et l'hypothèse sur les conditions aux limites,  $\psi$  est également solution du même problème aux limites:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \psi &= \psi_0|_{\partial\Omega} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Par unicité de la solution du problème de Dirichlet pour le Laplacien [6], on en déduit que  $\psi = \psi_0$  dans  $\Omega$  c'est à dire

$$B = B_0 \text{ (champ magnétique terrestre),} \quad (3.4.13)$$

On suppose que  $B_0$  est indépendant de  $t$  (ce qui est correct à l'ordre recherché car l'ordre de grandeur des perturbations du champ magnétique terrestre vaut environ  $10^{-3}$  en valeur relative). Ainsi:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0,$$

et l'équation de Maxwell-Faraday (3.4.6) se réduit à

$$\nabla \times E = 0,$$

soit

$$E = -\nabla\phi, \quad (3.4.14)$$

où  $\phi$  est le potentiel électrostatique.

En revanche, l'équation de Maxwell-Gauss (3.4.7) ne permet plus de calculer  $\phi$ , puisque celle-ci se réduit maintenant à l'unique contrainte de quasi-neutralité, que l'on peut écrire avec (3.4.9):

$$n_e = n_i := n, \quad (3.4.15)$$

où  $n$  désignera désormais la densité commune des électrons et des ions (densité de plasma). Il faut donc trouver une autre équation pour calculer  $\phi$ . C'est l'équation de continuité (3.2.28) qui nous fournira l'équation recherchée. Mais auparavant, nous allons nous attacher à résoudre les équations d'impulsion (3.4.1) et (3.4.2).

Dans toute la suite, pour simplifier, on supposera que  $B_0$  est uniforme dans  $\Omega$ . On introduit un système de coordonnées dans lequel la troisième composante est parallèle et dans le même sens que  $B_0$ . En variables adimensionnées  $B_0$  est un vecteur unitaire (puisque sa norme est utilisée pour définir le champ magnétique de référence) que l'on notera  $b$ . Ainsi, il vient:

$$B_0 = b = e_3, \quad (3.4.16)$$

où  $e_3$  est le vecteur unitaire de la troisième direction de coordonnées.

Bien entendu, en toute rigueur,  $B_0$  varie dans l'étendue du domaine  $\Omega$ . Cependant, l'approximation d'un champ magnétique terrestre uniforme est valable aux moyennes latitudes et pour des altitudes inférieures à quelques centaines de km.

### 3.4.3 Interprétation des paramètres $\bar{\nu}_e/\bar{\omega}$ , $\bar{\nu}_i/\bar{\omega}$ , $\bar{\eta}^2/\bar{\omega}$

On veut simplifier plus avant les équations de bilan d'impulsion. Pour cela, il faut calculer les paramètres  $\bar{\nu}_e/\bar{\omega}$ ,  $\bar{\nu}_i/\bar{\omega}$ ,  $\bar{\eta}^2/\bar{\omega}$  et comprendre les phénomènes physiques auxquels ils sont associés.

On calcule aisément

$$\frac{\bar{\nu}_e}{\bar{\omega}} = \frac{\nu_e}{\omega_{c,e}} := \kappa_e, \quad (3.4.17)$$

$$\frac{\bar{\nu}_i}{\bar{\omega}} = \frac{\nu_i}{\omega_{c,i}} := \kappa_i, \quad (3.4.18)$$

$$\frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\omega}} = \frac{k_B T}{q \tilde{E} L},$$

où l'on rappelle que  $\nu_e$  et  $\omega_{c,e}$  (resp.  $\nu_i$  et  $\omega_{c,i}$ ) désignent la fréquence de collision avec les neutres et la fréquence cyclotron pour les électrons (resp. pour les ions). Ainsi, les paramètres  $\kappa_e$  et  $\kappa_i$  représentent le nombre de collisions des particules avec les neutres pendant une période de rotation de Larmor (la rotation de Larmor étant le mouvement de rotation dans le champ magnétique, voir exercice 3.3.2). Ils caractérisent l'importance relative des collisions et du champ magnétique.

La quantité  $q\tilde{E}L$  est homogène à une énergie. Elle donne l'ordre de grandeur de l'énergie du champ électrique induit par le mouvement du plasma à travers les lignes de champ magnétique. Le paramètre  $\eta^2/\bar{\omega}$  compare l'énergie thermique  $k_B T$  à cette énergie du champ induit.

Grâce aux valeurs du tableau 1, on trouve:

$$\kappa_e \approx 10^{-3}, \quad \kappa_i \approx 10^{-1}, \quad \frac{\eta^2}{\bar{\omega}} \approx 10^{-3}.$$

Les bilans d'impulsion (3.4.1) et (3.4.2) font intervenir des termes d'ordre 1, d'ordre  $\kappa_i \approx 10^{-1}$ , d'ordre  $\kappa_e \approx 10^{-3}$  et d'ordre  $\eta^2/\bar{\omega} \approx 10^{-3}$ . On peut a priori négliger les termes d'ordre  $10^{-3}$ . Cependant, la limite  $\kappa_e \rightarrow 0$  est singulière et nécessite quelques précautions. Dans l'immédiat, nous nous contenterons de négliger les termes en facteur de  $\eta^2/\bar{\omega}$ , ce qui revient à négliger les effets thermiques. La limite  $\eta^2/\bar{\omega} \rightarrow 0$  correspond à une limite de température nulle, c'est à dire à un modèle de plasma froid.

En négligeant les termes en facteur de  $\eta^2/\bar{\omega}$  et en utilisant (3.4.16), nous obtenons les équations de bilan d'impulsion suivantes:

$$E + u_e \times b + \kappa_e (u_e - u_n) = 0. \quad (3.4.19)$$

$$E + u_i \times b - \kappa_i (u_i - u_n) = 0. \quad (3.4.20)$$

Pour cela, nous avons simplifié par les densités (égales) que l'on considère comme non nulles partout.

On peut réécrire les équations de bilan sous la forme:

$$\kappa_e u_e + u_e \times b = -E + \kappa_e u_n := F_e. \quad (3.4.21)$$

$$\kappa_i u_i - u_i \times b = E + \kappa_i u_n := F_i. \quad (3.4.22)$$

Nous sommes donc amenés à examiner la résolution d'une équation du type

$$\kappa u + \epsilon u \times b = F. \quad (3.4.23)$$

où  $\epsilon = \pm 1$  (valant +1 pour les électrons et -1 pour les ions),  $\kappa > 0$  et  $F$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , donnés. Nous étudions ce problème dans la section suivante.

### 3.4.4 Résolution de l'équation (3.4.23)

On rappelle qu'on identifie  $b$  au vecteur unitaire de la troisième coordonnée  $b = e_3$ . L'équation (3.4.23) est une équation linéaire dont l'inconnue est le vecteur  $u$  et qui peut s'écrire matriciellement:

$$\mathbb{K}u = F, \quad \mathbb{K} = \kappa \begin{pmatrix} 1 & \epsilon\kappa^{-1} & 0 \\ -\epsilon\kappa^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.24)$$

On en déduit facilement

$$u = \mathbb{M}F, \quad \mathbb{M} := \mathbb{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{1+\kappa^2} & -\frac{\epsilon}{1+\kappa^2} & 0 \\ \frac{\epsilon}{1+\kappa^2} & \frac{\kappa}{1+\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.4.25)$$

La matrice  $\mathbb{M}$  s'appelle la matrice de mobilité. Elle connecte en effet la vitesse au champ électrique local  $F$ .

A la différence d'un milieu non magnétisé, la mobilité n'est pas ici un scalaire, mais une matrice. Pour comprendre l'influence des différents termes de la matrice, on décompose le vecteur  $F$  dans une base  $(e_1, e_2, e_3 = b)$ :

$$F = F_1 e_1 + F_3 e_3.$$

En effet, on peut toujours choisir  $(e_1, e_2)$  pour que la projection de  $F$  sur  $e_2$  soit nulle. Il suffit de choisir  $e_1$  dans le plan engendré par  $F$  et  $b$ , et orthogonal à  $b$  (voir figure 3.4).

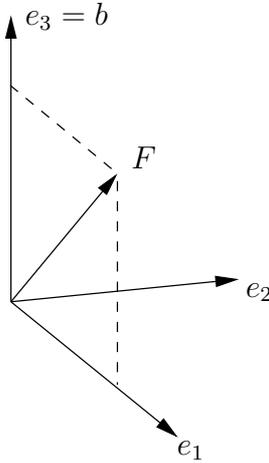


Figure 3.4: Trièdre  $(e_1, e_2, e_3 = b)$

**Exercice 3.4.1** Vérifier que

$$F_3 e_3 = (F \cdot b)b, \quad F_1 e_1 = b \times (F \times b), \quad F_1 e_2 = b \times F. \quad (3.4.26)$$

On note

$$F_{\parallel} = F_3 e_3, \quad F_{\perp} = F_1 e_1.$$

$F_{\parallel}$  (resp.  $F_{\perp}$ ) est la composante du champ  $F$  parallèle (resp. perpendiculaire) au champ magnétique.

**Définition 3.4.1** *On définit:*

$$\mu_{\parallel} = \kappa^{-1} : \quad \text{mobilité alignée avec le champ magnétique,} \quad (3.4.27)$$

$$\mu_{\perp} = \frac{\kappa}{1+\kappa^2} : \quad \text{mobilité de Pedersen,} \quad (3.4.28)$$

$$\mu_H = \frac{1}{1+\kappa^2} : \quad \text{mobilité Hall.} \quad (3.4.29)$$

Grâce aux définitions 3.4.1, on peut réécrire la matrice de mobilité:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -\epsilon\mu_H & 0 \\ \epsilon\mu_H & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (3.4.30)$$

ainsi que  $u = \mathbb{M}F$ :

$$u = \mu_{\perp}F_1e_1 + \epsilon\mu_HF_1e_2 + \mu_{\parallel}F_3e_3 \quad (3.4.31)$$

$$= \mu_{\perp}F_{\perp} + \epsilon\mu_H(b \times F) + \mu_{\parallel}F_{\parallel} \quad (3.4.32)$$

$$= u_{\perp} + u_{\parallel}, \quad (3.4.33)$$

avec

$$u_{\perp} = \mu_{\perp}F_{\perp} + \epsilon\mu_H(b \times F),$$

$$u_{\parallel} = \mu_{\parallel}F_{\parallel}.$$

$u_{\parallel}$  (resp.  $u_{\perp}$ ) est la composante de  $u$  parallèle (resp. perpendiculaire) à  $B$ .  $u_{\parallel}$  est proportionnel à  $F_{\parallel}$  au travers de la mobilité alignée. La composante perpendiculaire  $u_{\perp}$  est elle même la somme de deux termes. Le premier est parallèle à  $F_{\perp}$  et est proportionnel à celui-ci au travers de la mobilité de Pedersen. Le second est perpendiculaire à la fois à  $F$  et à  $B$  et est proportionnel à  $F_{\perp}$  au travers de la mobilité Hall. Ainsi, les composantes parallèles et perpendiculaires de  $F$  ne sont pas multipliées par le même facteur. De plus, il y a naissance d'une troisième composante de la vitesse, orthogonale à la fois à  $F$  et à  $B$ .

**Exercice 3.4.2** *Montrer que pour obtenir les expressions des mobilités ioniques en variables physiques, il suffit de multiplier les expressions (3.4.27)-(3.4.29) par  $1/B_0$ . Cet exercice montre que la dimension physique d'une mobilité est la même que celle de l'inverse d'un champ magnétique. Quelle est cette dimension (sans utiliser le Tesla) ?*

Pour mieux comprendre les différences entre les mobilités, il est instructif de considérer leur comportement lorsque  $\kappa \rightarrow 0$ , c'est à dire, lorsque le nombre de collisions pendant une période de rotation de Larmor est très petite devant 1. Notons qu'il s'agit du cas intéressant la physique de l'ionosphère, en particulier pour les électrons, puisque  $\kappa_e \approx 10^{-3}$ , mais également dans une certaine mesure pour les ions puisque  $\kappa_i \approx 10^{-1}$ .

L'examen des formules (3.4.27)-(3.4.29) montre immédiatement que, lorsque  $\kappa \rightarrow 0$ :

$$\mu_{\parallel} = \kappa^{-1} \rightarrow \infty, \quad (3.4.34)$$

$$\mu_{\perp} = O(\kappa) \rightarrow 0, \quad (3.4.35)$$

$$\mu_H \rightarrow 1, \quad (3.4.36)$$

$$(3.4.37)$$

Le comportement de la matrice de mobilité est singulier. Alors que certains termes tendent vers 0, d'autres tendent vers l'infini. La limite  $\kappa \rightarrow 0$  dans les équations d'impulsion doit donc être menée avec précaution.

Interprétons ces différences de comportement (voir également figure 3.5).

- Dans la direction parallèle au champ magnétique, seules les collisions avec les neutres freinent le mouvement des particules. A la limite  $\kappa \rightarrow 0$ , les collisions sont très faibles et les vitesses atteintes en présence d'un champ électrique fini deviennent infinies. D'où  $\mu_{\parallel} \rightarrow \infty$ .
- Dans le plan perpendiculaire à  $B$ , en l'absence de collisions, il n'y a de mouvement possible que dans la direction de  $F \times B$ . En effet, d'après l'exercice 3.3.2, le mouvement d'une particule chargée dans le plan perpendiculaire à  $B$  en présence d'un champ électrique  $F$  s'effectue selon une cycloïde, résultat de la superposition du mouvement de rotation de Larmor et d'un mouvement de translation dans la direction de  $F \times B$  (c'est ce qui est désigné sous le nom de dérive en  $E \times B$ ). Par conséquent, à la limite  $\kappa \rightarrow 0$ , on doit retrouver ce mouvement, c'est à dire, un transport nul dans la direction parallèle à  $F_{\perp}$  (d'où  $\mu_{\perp} \rightarrow 0$ ), et fini dans la direction de  $F \times B$  (d'où  $\mu_H$  tend vers une valeur finie).
- Dans la direction  $F_{\perp}$ , il n'y a donc pas de mouvement possible en l'absence de collisions. Lorsque  $\kappa$  est petit mais non nul, un mouvement dans la direction de  $F_{\perp}$  devient possible. Il est proportionnel à  $\kappa$ , c'est à dire en particulier à la fréquence de collision. Ainsi, en présence d'un champ magnétique les collisions favorisent le mouvement dans la direction de  $F_{\perp}$ , au contraire de ce qui se passe dans la direction parallèle à  $B$ . On peut dire que les collisions permettent aux particules de 'sauter' d'une cycloïde à l'autre.

### 3.4.5 Résolution des équations d'impulsion (3.4.21)-(3.4.22)

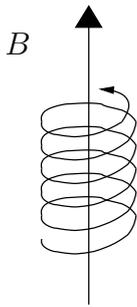
Nous pouvons maintenant appliquer les considérations de la section précédente à la résolution des équations de bilan d'impulsion (3.4.21)-(3.4.22). On obtient immédiatement

$$u_e = \mathbb{M}_e F_e = \mathbb{M}_e (-E + \kappa_e u_n), \quad (3.4.38)$$

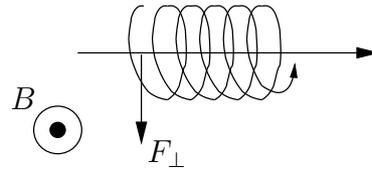
$$u_i = \mathbb{M}_i F_i = \mathbb{M}_i (E + \kappa_i u_n), \quad (3.4.39)$$

avec

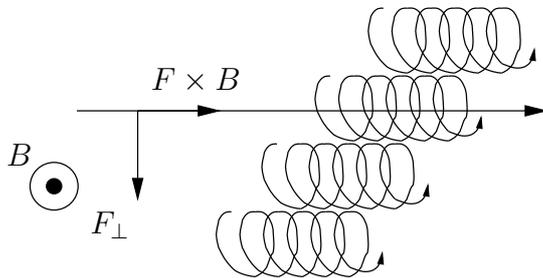
$$\mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \mu_{e\perp} & -\mu_{eH} & 0 \\ \mu_{eH} & \mu_{e\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{e\parallel} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} \mu_{i\perp} & \mu_{iH} & 0 \\ -\mu_{iH} & \mu_{i\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{i\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.4.40)$$



Dans la direction parallèle à  $B$ , lorsqu'il n'y a pas de collisions, rien n'entrave le mouvement des particules d'où  $\mu_{\parallel} \rightarrow \infty$ .



Dans la direction perpendiculaire à  $B$  en l'absence de collision, seule la dérive en  $F \times B$  agit ( $\mu_{\parallel} \rightarrow 1$ ) et il n'y a pas de transport dans la direction  $F_{\perp}$  ( $\mu_P \rightarrow 0$ ).



En présence de collision, le transport dans la direction  $F_{\perp}$  est une marche au hasard qui fait "sauter" la particule d'une cycloïde à une autre

Figure 3.5:

et  $\mu_{e\parallel}$ ,  $\mu_{e\perp}$ ,  $\mu_{eH}$  (resp.  $\mu_{i\parallel}$ ,  $\mu_{i\perp}$ ,  $\mu_{iH}$ ) obtenus à partir de (3.4.27)-(3.4.29) en remplaçant  $\kappa$  par  $\kappa_e$  (resp.  $\kappa_i$ ).

### 3.4.6 équations sur le potentiel $\phi$

On rappelle que le passage à la limite dans l'équation de Maxwell-Gauss effectué à la section 3.4.1 impose la quasi-neutralité  $n_e = n_i = n$ . Par ailleurs, les deux équations de conservation des densités (électroniques et ioniques) restent valables:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu_e) = 0, \quad (3.4.41)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu_i) = 0, \quad (3.4.42)$$

Par différence, on en déduit:

$$\nabla \cdot (n(u_i - u_e)) = \nabla \cdot j = 0, \quad (3.4.43)$$

L'équation (3.4.43) est l'expression de l'équation de continuité (3.2.28) lorsque la densité de charge est nulle (ou plus généralement indépendante de  $t$ ). On utilise maintenant les équations (3.4.39) et (3.4.38) pour exprimer  $j$ :

$$\begin{aligned} j &= n(u_i - u_e) \\ &= n[\mathbb{M}_i(E + \kappa_i u_n) - \mathbb{M}_e(-E + \kappa_e u_n)] \\ &= n[(\mathbb{M}_i + \mathbb{M}_e)E + (\kappa_i \mathbb{M}_i - \kappa_e \mathbb{M}_e)u_n]. \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= (\mathbb{M}_i + \mathbb{M}_e) \\ &= \begin{pmatrix} \mu_{e\perp} + \mu_{i\perp} & -\mu_{eH} + \mu_{iH} & 0 \\ \mu_{eH} - \mu_{iH} & \mu_{e\perp} + \mu_{i\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{e\parallel} + \mu_{i\parallel} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & \mu_H & 0 \\ -\mu_H & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.4.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= (\kappa_i \mathbb{M}_i - \kappa_e \mathbb{M}_e) \\ &= \begin{pmatrix} -\kappa_e \mu_{e\perp} + \kappa_i \mu_{i\perp} & \kappa_i \mu_{iH} + \kappa_e \mu_{eH} & 0 \\ -(\kappa_i \mu_{iH} + \kappa_e \mu_{eH}) & -\kappa_e \mu_{e\perp} + \kappa_i \mu_{i\perp} & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_e \mu_{e\parallel} + \kappa_i \mu_{i\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.4.45) \end{aligned}$$

On en déduit par (3.4.44):

$$\begin{aligned} j &= n(\mathbb{M}E + \mathbb{L}u_n) \\ &= n(-\mathbb{M}\nabla\phi + \mathbb{L}u_n), \quad (3.4.46) \end{aligned}$$

L'équation (3.4.43) donne donc:

$$-\nabla \cdot (n\mathbb{M}\nabla\phi) = \nabla \cdot (n\mathbb{L}u_n), \quad (3.4.47)$$

Le membre de droite de (3.4.47) est donné. Par conséquent,  $\phi$  est donné par une équation de type elliptique, pourvu que  $\mathbb{M}$  soit définie positive.

**Exercice 3.4.3** Montrer que  $\mathbb{M}$  est définie positive, si et seulement si  $\mu_{\perp} > 0$  et  $\mu_{\parallel} > 0$ .

Le potentiel  $\phi$  est donc défini de manière unique (pourvu que les conditions aux limites adéquates soient imposées) grâce à la théorie des problèmes aux limites pour les opérateurs elliptiques (voir par exemple [6]). La question des conditions aux limites est abordée plus loin. Remarque que  $\mathbb{M}$  n'est pas symétrique, mais la théorie des problèmes elliptiques ne l'exige pas.

**Remarque 3.4.1** Lorsque  $n$  s'annule, le problème elliptique (3.4.47) devient dégénéré. L'existence de solutions n'est alors plus garantie.

**Remarque 3.4.2** L'équation de Poisson (ou de Maxwell-Gauss) a disparu dans la limite quasi-neutre. C'est l'équation de continuité, sous la forme  $\nabla \cdot j = 0$  qui la remplace. On obtient une équation de type elliptique car  $j$  est une fonction locale de  $E = -\nabla\phi$  (en vertu de (3.4.46)). La matrice  $\Sigma = n\mathbb{M}$  s'appelle matrice de conductivité. La relation (3.4.46) s'écrit

$$j = \Sigma E + n\mathbb{L}u_n.$$

Une composante du courant provient du champ électrique par le biais de la matrice de conductivité. L'autre composante est due à la traînée des espèces chargées (ions et électrons) sur les neutres. Dans les modèles de plasmas quasi-neutres, c'est toujours l'équation de continuité qui remplace l'équation de Poisson pour le calcul du potentiel électrique.

### 3.4.7 Bilan du modèle dynamo tridimensionnel

Dans le modèle dynamo tridimensionnel, la densité évolue selon l'une des deux équations de conservation, qui sont équivalentes, en vertu de la relation  $\nabla \cdot j = 0$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu_e) = 0, \quad (3.4.48)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu_i) = 0. \quad (3.4.49)$$

Les vitesses  $u_e$  et  $u_i$  sont données par:

$$u_e = \mathbb{M}_e F_e = \mathbb{M}_e(-E + \kappa_e u_n), \quad (3.4.50)$$

$$u_i = \mathbb{M}_i F_i = \mathbb{M}_i(E + \kappa_i u_n), \quad (3.4.51)$$

Le champ électrique dérive d'un potentiel:

$$E = -\nabla\phi, \quad (3.4.52)$$

qui est solution de l'équation elliptique

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (3.4.53)$$

$$j = n(u_i - u_e), \quad (3.4.54)$$

On rappelle que

$$\mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_i}{1+\kappa_i^2} & \frac{1}{1+\kappa_i^2} & 0 \\ -\frac{1}{1+\kappa_i^2} & \frac{\kappa_i}{1+\kappa_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_e}{1+\kappa_e^2} & -\frac{1}{1+\kappa_e^2} & 0 \\ \frac{1}{1+\kappa_e^2} & \frac{\kappa_e}{1+\kappa_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_e^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.4.55)$$

### 3.4.8 Conditions aux limites

On suppose qu'à l'extérieur de  $\Omega$ , le plasma est à l'équilibre. Il n'y a donc pas de courant (un courant étant la réponse d'un plasma à un déséquilibre de charges). Les courants circulant dans  $\Omega$  doivent donc être tangents à  $\partial\Omega$  au bord. On en déduit une première condition aux limites:

$$j \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.4.56)$$

où  $\nu$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . (3.4.56) est une condition aux limites de type Neumann sur l'équation elliptique sur  $\phi$  résultant de (3.4.50), (3.4.54).

De (3.4.56) on déduit que  $u_e \cdot \nu = u_i \cdot \nu$ . Ainsi, au bord, vitesses électroniques et ioniques pointent dans le même sens par rapport à la normale. On a alors deux cas, selon que les vitesses pointent vers l'intérieur ou l'extérieur de  $\Omega$  (voir exercice 3.4.4).

- Si  $u_e \cdot \nu = u_i \cdot \nu < 0$ , le champ de vitesses pour l'équation de transport (3.4.48) ou (3.4.49) pointe à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . On doit donc imposer une condition aux limites sur la densité  $n$ . On suppose qu'à l'extérieur de  $\Omega$ , la densité de plasma est uniforme, égale à  $n_0 > 0$ . Ainsi, on impose:

$$n = n_0, \quad \forall x \in \partial\Omega \text{ tels que } u_e \cdot \nu = u_i \cdot \nu < 0. \quad (3.4.57)$$

- Si  $u_e \cdot \nu = u_i \cdot \nu > 0$ , le champ de vitesses pointe à l'extérieur du domaine  $\Omega$ , et il n'est pas possible d'imposer une condition aux limites. La valeur de  $n$  au bord est déterminée par la solution à l'intérieur de  $\Omega$ .

**Exercice 3.4.4** On considère  $u(x, t)$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $t > 0$ , solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.4.58)$$

où  $c \in \mathbb{R}$ . A (3.4.58), on associe la donnée initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$ , définie pour  $x \in [0, \infty)$ .

- *Premier cas:  $c > 0$ . Montrer que la solution de (3.4.58) associée à la donnée initiale  $u_0$  n'est pas unique. Montrer qu'en revanche, il existe une unique solution satisfaisant la condition aux limites additionnelle:*

$$u(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (3.4.59)$$

où  $g$  est donnée. On suppose  $u_0$  et  $g$  de classe  $C^1$  (continuellement différentiables). Montrer que  $u$  n'est  $C^1$  qu'à condition que  $u_0$  et  $g$  satisfassent des conditions de raccord que l'on précisera.

- *Deuxième cas:  $c < 0$ . Montrer que la solution de (3.4.58) associée à la condition initiale  $u_0$  est unique. Montrer qu'il n'existe pas de solution satisfaisant en outre la condition aux limites (3.4.59), sauf si  $g$  est égale à une fonction particulière que l'on déterminera.*

**Exercice 3.4.5** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière  $\Gamma$  régulière, et  $a(x)$  un champ de vecteurs  $x \in \Omega \rightarrow a(x) \in \mathbb{R}^d$ , de classe  $C^1$ , borné ainsi que ses dérivées. On note

$$\Gamma_{\pm} = \{x \in \Gamma, \pm a(x) \cdot \nu > 0\}, \quad \Gamma_0 = \{x \in \Gamma, a(x) \cdot \nu = 0\},$$

où  $\nu$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . Soit  $X(t; x)$  la solution de l'équation caractéristique

$$\frac{dX}{dt} = a(X), \quad X(0) = x, \quad (3.4.60)$$

Soient  $[t_*(x), t^*(x)]$ ,  $t_*(x) \leq 0 \leq t^*(x)$ , l'intervalle de définition de la courbe caractéristique  $X(t)$ . On suppose que l'ensemble des  $x$  tels que  $t_*$  ou  $t^*$  est infini, ou tel que  $X(t_*)$  ou  $X(t^*)$  appartient à  $\Gamma_0$  est de mesure nulle dans  $\Omega$ . Montrer alors que

$$X(t_*) \in \Gamma_-, \quad X(t^*) \in \Gamma_+.$$

On considère le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a \cdot \nabla)u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.4.61)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.4.62)$$

$$u|_{\Gamma_-} = g(x, t), \quad x \in \Gamma_-, \quad t \geq 0. \quad (3.4.63)$$

Montrer par la méthode des caractéristiques (voir exercice 3.2.4) que le problème (3.4.61)-(3.4.63) admet une unique solution que l'on explicitera.

**Remarque 3.4.3** L'existence de solutions pour le modèle dynamo tridimensionnel (3.4.48)-(3.4.54) assorti des conditions aux limites (3.4.56), (3.4.57) est à notre connaissance un problème ouvert.

**Remarque 3.4.4** On doit à Chapman la première théorie complète de la conductivité électronique dans l'ionosphère, en particulier l'observation que celle-ci doit avoir un caractère tensoriel (voir [11] et [1]). On pourra consulter [36] pour les différents aspects physiques liés au modèle dynamo 3D.

## 3.5 modèle dynamo quasi-bidimensionnel

### 3.5.1 Limite $\kappa_e \rightarrow 0$ et établissement du modèle

On s'intéresse à une limite purement formelle dans la mesure où la théorie rigoureuse n'est pas encore établie. Soit  $(n, u_e, u_i, \phi)$  "la" solution du problème dynamo tridimensionnel (3.4.48)-(3.4.54) avec les conditions aux limites (3.4.56)-(3.4.57). Cette solution dépend de  $\kappa_e$ . On sait que, dans le cas de l'ionosphère,  $\kappa_e$  est très petit (de l'ordre de  $10^{-3}$ ). On s'intéresse donc au modèle limite lorsque  $\kappa_e \rightarrow 0$ . Sauf nécessité, on n'explicitera pas la dépendance de la solution par rapport à  $\kappa_e$ .

On suppose que cette solution converge quand  $\kappa_e \rightarrow 0$  vers une solution  $(n^0, u_e^0, u_i^0, \phi^0)$ , de manière parfaitement régulière. Ainsi, toutes les dérivées de la solution sont supposées converger vers les dérivées de la limite.

On réécrit (3.4.50) en utilisant l'expression de  $\mathbb{M}_e$  (3.4.55):

$$u_{e3} = \kappa_e^{-1}(-E + \kappa_e u_n)_3, \quad (3.5.1)$$

$$u_{e\perp} = \frac{\kappa_e}{1 + \kappa_e^2}(-E + \kappa_e u_n)_\perp - \frac{1}{1 + \kappa_e^2}(-E + \kappa_e u_n)_\perp \times e_3, \quad (3.5.2)$$

où l'indice 3 désigne la troisième composante (parallèle à  $b = e_3$ ) et où l'indice  $\perp$  désigne la projection sur le plan perpendiculaire à  $e_3$ . L'équation (3.5.1) donne:

$$E_3 = \kappa_e(u_n - u_e)_3. \quad (3.5.3)$$

On rappelle que  $u_n$  est une donnée indépendante de  $\kappa_e$ .

Par hypothèse,  $u_{e3} \rightarrow u_{e3}^0$ . Donc,  $(u_n - u_e)_3$  reste borné et  $\kappa_e \rightarrow 0$ . Donc,  $E_3 \rightarrow 0 = E_3^0$ . On en déduit donc que  $\phi^0$  tel que  $E^0 = -\nabla\phi^0$  satisfait

$$\frac{\partial\phi^0}{\partial x_3} = 0, \quad (3.5.4)$$

c'est à dire  $\phi^0 = \phi^0(x_1, x_2)$  ne dépend que des coordonnées dans le plan perpendiculaire au champ magnétique.

Par ailleurs, la limite  $\kappa_e \rightarrow 0$  dans (3.5.2) entraîne:

$$u_{e\perp} \rightarrow u_{e\perp}^0 = E^0 \times e_3, \quad (3.5.5)$$

On remarque que la limite de  $u_{e3}$  est inconnue. En effet,  $u_{e3}^0$  résulte d'une forme indéterminée

$$u_{e3}^0 - u_{n3} = \lim_{\kappa_e \rightarrow 0} \left( -\frac{E_3}{\kappa_e} \right).$$

Dans le problème limite, on ne peut donc plus utiliser la vitesse électronique dans l'équation de transport de la densité (3.4.48). On utilise donc la vitesse ionique, ce qui donne:

$$\frac{\partial n^0}{\partial t} + \nabla \cdot (n^0 u_i^0) = 0. \quad (3.5.6)$$

L'équation de la vitesse ionique est inchangée:

$$u_i^0 = \mathbb{M}_i F_i^0 = \mathbb{M}_i (E^0 + \kappa_i u_n), \quad (3.5.7)$$

Comme  $E_3^0 = 0$ , on a

$$u_{i3}^0 = u_{n3}, \quad (3.5.8)$$

Ainsi, l'équation de transport de la densité se simplifie en:

$$\frac{\partial n^0}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot (n^0 u_{i\perp}^0) + \frac{\partial}{\partial x_3} (n^0 u_{n3}) = 0, \quad (3.5.9)$$

$$u_{i\perp}^0 = \mu_{i\perp} (E^0 + \kappa_i u_n)_\perp + \mu_{iH} (E^0 + \kappa_i u_n)_\perp \times e_3, \quad (3.5.10)$$

avec  $\nabla_\perp = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ ,  $\mu_{iH} = (1 + \kappa_i^2)^{-1}$ ,  $\mu_{i\perp} = \kappa_i \mu_{iH}$ .

**Remarque 3.5.1** Si  $u_{n3} = 0$ , la densité  $n^0$  est solution d'une équation de transport bidimensionnelle dans le plan perpendiculaire au champ magnétique:

$$\frac{\partial n^0}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot (n^0 u_{i\perp}^0) = 0.$$

Cependant, les données, telles que  $u_n$ , peuvent dépendre de  $x_3$ . Par conséquent,  $n^0$  dépend toujours de  $x_3$ , lequel reste un paramètre dans l'expression de  $u_{i\perp}^0$ . L'hypothèse  $u_{n3} = 0$  est souvent utilisée dans les applications numériques et se justifie par le fait que le vent de neutres est essentiellement horizontal. Elle nécessite donc que  $B$  soit vertical, ce qui n'est pas vrai aux latitudes équatoriales. De plus, elle n'est pas nécessaire à la théorie, et nous traiterons le cas où  $u_{n3}$  peut être arbitraire. En revanche, elle simplifie les simulations numériques.

Il reste à établir l'équation donnant  $\phi^0(x_1, x_2)$ . Pour cela, on remarque qu'on ne peut utiliser l'équation  $\nabla \cdot j = 0$  telle qu'elle, puisque la troisième composante  $j_3 = n(u_{i3} - u_{e3})$  est, comme  $u_{e3}$ , indéterminée. Pour éliminer  $j_3$ , on intègre l'équation de continuité par rapport à  $x_3$ . Pour simplifier, on suppose que le domaine  $\Omega$  est cylindrique, de génératrice parallèle à l'axe  $x_3$  (cf figure 3.6):

$$\Omega = \Sigma \times [a, b],$$

où  $\Sigma$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Sigma$  régulière et  $[a, b]$  est l'intervalle de variation de  $x_3$ . Ainsi,  $\phi^0$  est défini pour  $x_{\perp} = (x_1, x_2) \in \Sigma$ .

**Exercice 3.5.1** Reprendre le développement suivant sous l'hypothèse plus générale que  $\Omega$  intersecte toute droite parallèle à  $x_3$  selon un intervalle (éventuellement vide)  $[a(x_3), b(x_3)]$ .

On écrit:

$$\nabla \cdot j = \nabla_{\perp} \cdot j_{\perp} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} = 0.$$

D'où:

$$\nabla_{\perp} \cdot \left( \int_a^b j_{\perp}(x_{\perp}, x_3) dx_3 \right) + j_3(x_{\perp}, b) - j_3(x_{\perp}, a) = 0.$$

Maintenant, on utilise la condition aux limites (3.4.56), qui donne:

$$j_3(x_{\perp}, a) = j_3(x_{\perp}, b) = 0, \quad \forall x_{\perp} \in \Sigma.$$

On en déduit:

$$\nabla_{\perp} \cdot \left( \int_a^b j_{\perp}(x_{\perp}, x_3) dx_3 \right) = 0. \quad (3.5.11)$$

Par ailleurs, on a, lorsque  $\kappa_e \rightarrow 0$ :

$$j_{\perp} = n(u_{i\perp} - u_{e\perp}) \rightarrow j_{\perp}^0 = n(u_{i\perp}^0 - u_{e\perp}^0),$$

ce qui, grâce à (3.5.5), (3.5.10) donne:

$$j_{\perp}^0 = n^0 (\mu_{i\perp}(E^0 + \kappa_i u_{n\perp}) + \mu_{iH}(E^0 + \kappa_i u_{n\perp}) \times e_3 - E^0 \times e_3).$$

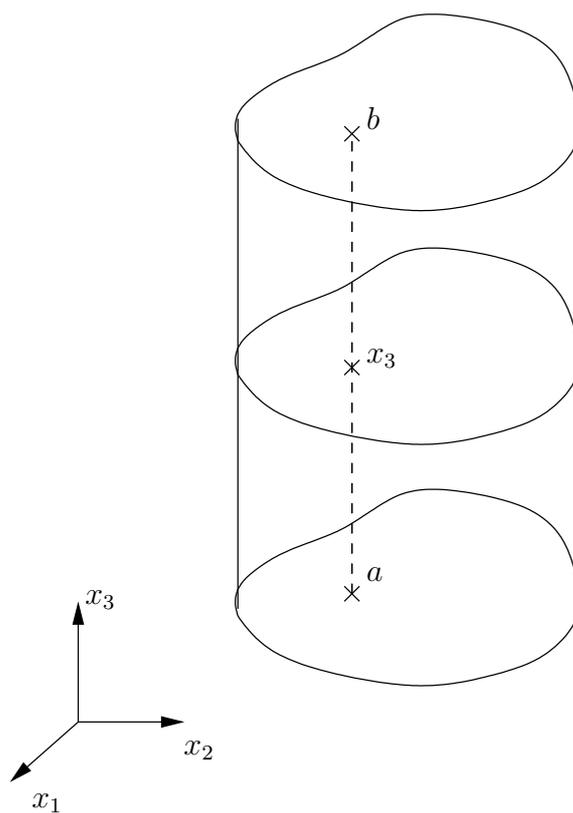


Figure 3.6:

Par conséquent, en faisant l'hypothèse que  $\mu_{i\perp}$  et  $\mu_{iH}$  ne dépendent pas de  $x_3$ , la quantité  $J^0$  définie par

$$J^0(x_\perp) = \int_a^b j_\perp^0(x_\perp, x_3) dx_3,$$

a pour expression

$$J^0 = N^0 (\mu_{i\perp}(E^0 + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle) + \mu_{iH}(E^0 + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle) \times e_3 - E^0 \times e_3), \quad (3.5.12)$$

avec

$$N^0 = \int_a^b n^0(x_\perp, x_3) dx_3, \quad (3.5.13)$$

$$\langle u_{n\perp} \rangle = \frac{1}{N^0} \int_a^b n^0 u_n(x_\perp, x_3) dx_3. \quad (3.5.14)$$

**Exercice 3.5.2** *Que deviennent ces expressions lorsque  $\mu_{i\perp}$  et  $\mu_{iH}$  dépendent de  $x_3$  ?*

L'équation pour  $\phi^0(x_1, x_2)$  est donc donnée par:

$$E^0 = -\nabla_\perp \phi^0, \quad (3.5.15)$$

$$\nabla_\perp \cdot J^0 = 0, \quad (3.5.16)$$

avec  $J^0$  donné par (3.5.12).

Ce résultat s'interprète physiquement de la manière suivante (cf figure 3.7): soit  $d\Sigma$  un élément de la surface  $\Sigma$ .  $N^0 d\Sigma$  est le nombre d'électrons (ou d'ions) contenus dans le tube de champ de section  $d\Sigma$  (ainsi,  $N^0$  est une densité surfacique, ou nombre de particules par unité de surface).

Si  $d\gamma$  est un élément de courbe tracée sur  $\Sigma$ ,  $d\vec{\gamma}$  le vecteur perpendiculaire à  $d\gamma$  et de module égal à la longueur de  $d\gamma$ , alors,  $J^0 \cdot d\vec{\gamma}$  représente le flux du courant  $j$  à travers une surface cylindrique s'appuyant sur  $d\gamma$  et de génératrice parallèle à  $x_3$ .

Si  $\gamma$  est une courbe fermée sur  $\Sigma$ , on a  $\nabla_\perp \cdot J^0 = 0$  ce qui implique que

$$\int_\gamma J^0 \cdot d\vec{\gamma} = 0,$$

et exprime que le flux de  $j$  à travers le cylindre s'appuyant sur  $\gamma$  et dont les génératrices sont les lignes de champ de  $B$  est nul. Cela est dû entre autres à la condition aux limites (3.4.56) qui exprime qu'aucun courant ne peut s'échapper par les sections supérieures ou inférieures du cylindre.

Enfin,  $\langle u_{n\perp} \rangle$  est la moyenne de la composante  $u_{n\perp}$  du vent de neutres le long d'une ligne de champ, pondérée par la densité du plasma  $n^0$  (c'est à dire par rapport à la mesure  $n^0 dx_3 / N^0$ ).

On peut expliciter l'équation résolue par  $\phi^0$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\perp \cdot (-N^0 (\mu_{i\perp} \nabla_\perp \phi^0 + (\mu_{iH} - 1)(\nabla_\perp \phi^0 \times e_3))) = \\ \nabla_\perp \cdot (-N^0 (\mu_{i\perp} \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle + \mu_{iH} \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle \times e_3)). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

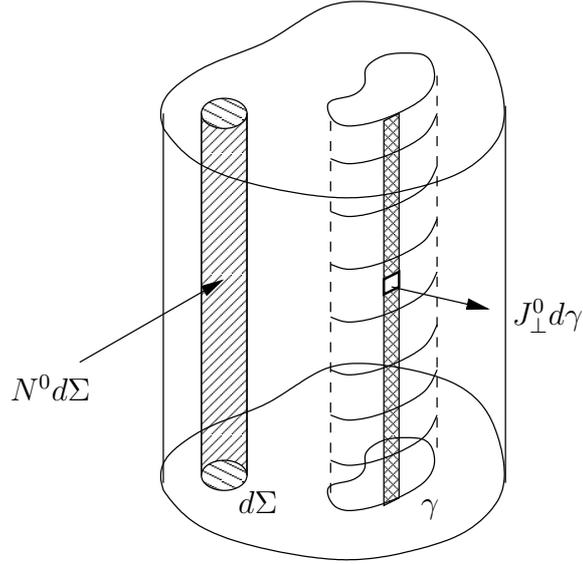


Figure 3.7:

Il s'agit d'une équation elliptique sous réserve que  $N^0 > 0$  et  $\mu_{i\perp} > 0$ .

Les conditions aux limites sont directement déduites de celles du modèle dynamo tridimensionnel (cf section 3.4.8). Soit  $\nu_\Sigma(x_\perp)$  la normale extérieure à la surface  $\Sigma$ . Le long de la surface latérale de  $\partial\Omega$ , on a  $\nu(x_\perp, x_3) = \nu_\Sigma(x_\perp)$  et  $j \cdot \nu = j_\perp \cdot \nu_\Sigma$ . On intègre alors (3.4.56) par rapport à  $x_3$  et, en servant de ce que  $\nu_\Sigma$  est indépendant de  $x_3$ , on obtient

$$J^0 \cdot \nu_\Sigma = 0. \quad (3.5.18)$$

La condition (3.4.57) est inchangée, à condition d'utiliser  $u_i^0$  qui seule, est déterminée:

$$n^0 = n_0, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{tel que} \quad u_i^0 \cdot \nu < 0.. \quad (3.5.19)$$

### 3.5.2 Bilan du modèle dynamo quasi-bidimensionnel

On résume les équations obtenues dans le modèle dynamo quasi-bidimensionnel (on omettra l'exposant "0" dans la suite). Le plasma est décrit par l'équation de conservation pour la densité  $n(x_\perp, x_3)$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot (n u_{i\perp}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (n u_{n3}) = 0, \quad (3.5.20)$$

$$u_{i\perp} = \mu_{i\perp} (E + \kappa_i u_{n\perp}) + \mu_{iH} (E + \kappa_i u_{n\perp}) \times e_3, \quad (3.5.21)$$

$$\mu_{i\perp} = \frac{\kappa_i}{1 + \kappa_i^2}, \quad \mu_{iH} = \frac{1}{1 + \kappa_i^2}, \quad (3.5.22)$$

$$n = n_0, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{tel que} \quad u_i \cdot \nu < 0.. \quad (3.5.23)$$

Le champ électrique  $E(x_\perp)$  est déterminé par l'équation de continuité intégrée sur une ligne de champ magnétique:

$$E = -\nabla_\perp \phi, \quad \phi = \phi(x_\perp), \quad (3.5.24)$$

$$\nabla_\perp \cdot J = 0, \quad (3.5.25)$$

$$J = N (\mu_{i\perp}(E + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle) + \mu_{iH}(E + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle) \times e_3 - E \times e_3), \quad (3.5.26)$$

$$J \cdot \nu_\Sigma = 0, \quad \forall x_\perp \in \partial\Sigma. \quad (3.5.27)$$

Ainsi, alors que la densité  $n$  est une donnée tridimensionnelle (dépendant de  $(x_\perp, x_3)$ ), le potentiel électrique est une donnée bidimensionnelle (dépendant uniquement de  $x_\perp$ ). C'est la raison de la dénomination quasi-bidimensionnelle donnée au modèle. Le lien entre les grandeurs tridimensionnelles et bidimensionnelles s'effectue grâce à:

$$N(x_\perp) = \int_a^b n(x_\perp, x_3) dx_3, \quad (3.5.28)$$

$$\langle u_{n\perp} \rangle(x_\perp) = \frac{1}{N} \int_a^b n^0 u_n(x_\perp, x_3) dx_3. \quad (3.5.29)$$

### 3.5.3 Modèle en couches

Il s'agit du modèle utilisé dans les simulations physiques. Il consiste à transposer à l'équation de conservation de la densité de plasma la démarche utilisée pour l'équation de continuité, et à intégrer par rapport à la coordonnée  $x_3$ . Toutefois, pour décrire correctement la nature stratifiée de l'ionosphère, on convient de décomposer l'intervalle  $[a, b]$  en sous intervalles  $x^{1/2} = a < x^{3/2} < \dots < x^{P+1/2} = b$  et à définir

$$N^k = \int_{x^{k-1/2}}^{x^{k+1/2}} n(x_\perp, x_3) dx_3.$$

Supposant  $u_{n3} = 0$  et intégrant l'équation de conservation de la densité (3.5.20) sur  $[x^{k-1/2}, x^{k+1/2}]$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^k}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot (N^k U_{i\perp}^k) &= 0, \\ U_{i\perp}^k &= \mu_{i\perp}(E + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle^k) + \mu_{iH}(E + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle^k) \times e_3, \\ \langle u_{n\perp} \rangle^k &= \frac{1}{N^k} \int_{x^{k-1/2}}^{x^{k+1/2}} n u_{n\perp}(x_\perp, x_3) dx_3. \end{aligned}$$

Les équations (3.5.24), (3.5.25), (3.5.26) pour le champ électrique  $E$  sont inchangées. Le couplage avec l'équation de conservation de la densité s'effectue grâce à:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^P N^k, \\ \langle u_{n\perp} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^P N^k \langle u_{n\perp} \rangle^k. \end{aligned}$$

**Exercice 3.5.3** *Que devient la condition aux limites (3.5.23) pour  $N^k$  ?*

Dans la pratique, seulement deux ou trois couches sont utilisées. L'une représente la couche basse où le vent de neutres est important. Les autres représentent les couches élevées où le vent de neutres est négligeable.

Le vent de neutres entraîne le plasma dans la couche basse. Le champ électrique induit par le mouvement du plasma (conducteur) à travers les lignes de champ magnétique entraîne alors les couches élevées. En effet, ce champ électrique, étant constant le long des lignes de champ magnétique, se propage instantanément aux couches les plus élevées. Celles-ci sont entraînées à leur tour dans le mouvement et créent un jeu de courants qui va réagir sur le champ électrique initial. L'équation de continuité intégrée sur les lignes de champ magnétique traduit cet équilibre des courants sur l'ensemble des couches.

Ce modèle correspond donc à la mise en équations (modélisation) de l'effet dynamo décrit à la section 2.5.2.

### 3.5.4 La limite $\kappa_i \rightarrow 0$ : le modèle "striations"

On a vu que  $\kappa_i \approx 10^{-1}$ . Ce n'est pas une valeur "très petite", mais elle est suffisamment petite pour que le modèle limite ait un intérêt au moins qualitatif. En réalité, il s'agit d'un modèle très utilisé pour décrire les inhomogénéités du plasma ionosphérique dont la taille est de l'ordre de 1 à 10 km. Ces irrégularités forment des striations, d'où le nom du modèle. Nous étudierons plus en détails ce phénomène plus loin.

On détermine donc la limite  $\kappa_i \rightarrow 0$  du modèle dynamo quasi-bidimensionnel (3.5.20)-(3.5.29). Les inconnues du modèle limite sont notées avec l'exposant "0". Là encore, il s'agit d'une limite formelle, et on suppose que les inconnues du modèle à  $\kappa_i$  fini convergent régulièrement ainsi que toutes leurs dérivées vers les valeurs limites. On a clairement:

$$u_{i\perp} \rightarrow u_{i\perp}^0 = E^0 \times e_3.$$

Par contre, pour trouver la limite de  $J$ , on doit développer  $\mu_{i\perp}$  et  $\mu_{iH}$  à l'ordre deux par rapport à  $\kappa_i$ :

$$\begin{aligned} \mu_{i\perp} &= \kappa_i + O(\kappa_i^2), \\ \mu_{iH} &= 1 + O(\kappa_i^2). \end{aligned}$$

D'où:

$$J = N(\kappa_i E + \kappa_i \langle u_{n\perp} \rangle \times e_3 + O(\kappa_i^2)).$$

On a  $J \rightarrow 0$ , ce qui ne permet pas de déterminer une équation pour le potentiel limite. Par conséquent, il faut considérer la limite de  $J/\kappa_i$ . On a:

$$\frac{J}{\kappa_i} \rightarrow \bar{J}^0 = N^0(E^0 + \langle u_{n\perp} \rangle \times e_3). \quad (3.5.30)$$

On obtient donc le modèle "striations" (on omet les exposants "0" et on renomme  $u_{i\perp} := u$ , vitesse du plasma transverse aux lignes de champ magnétique). L'équation d'évolution de la densité de plasma est donnée par:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot (nu) + \frac{\partial}{\partial x_3}(nu_{n3}) = 0, \quad (3.5.31)$$

$$u = E \times e_3, \quad (3.5.32)$$

$$n = n_0, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{tel que} \quad u \cdot \nu < 0.. \quad (3.5.33)$$

Le champ électrique  $E(x_{\perp})$  est déterminé par :

$$E = -\nabla_{\perp}\phi, \quad \phi = \phi(x_{\perp}), \quad (3.5.34)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot J = 0, \quad (3.5.35)$$

$$J = N(E + \langle u_{n\perp} \rangle \times e_3), \quad (3.5.36)$$

$$J \cdot \nu_{\Sigma} = 0, \quad \forall x_{\perp} \in \partial\Sigma, \quad (3.5.37)$$

et les deux systèmes sont couplés par:

$$N(x_{\perp}) = \int_a^b n(x_{\perp}, x_3) dx_3, \quad (3.5.38)$$

$$\langle u_{n\perp} \rangle(x_{\perp}) = \frac{1}{N} \int_a^b n^0 u_n(x_{\perp}, x_3) dx_3. \quad (3.5.39)$$

**Exercice 3.5.4** *Etablir qu'en variables physiques, les équations (3.5.31), (3.5.34) et (3.5.35) sont inchangées et que les équations (3.5.32) et (3.5.36) s'écrivent:*

$$u = \frac{E \times B}{|B|^2}, \quad (3.5.40)$$

$$J = N(E + \langle u_{n\perp} \rangle \times B), \quad (3.5.41)$$

L'équation (3.5.40) donne l'expression de la vitesse de dérive en  $E \times B$ . Dans (3.5.41), le terme  $\langle u_{n\perp} \rangle \times B$  représente le champ électrique d'induction créé par le mouvement du plasma (entraîné par les neutres) à travers les lignes de champ magnétique.  $E$  est le champ électrostatique qui doit s'établir pour assurer la conservation du courant:  $\nabla_{\perp} \cdot J = 0$ . Ce champ est dû à l'apparition de charges de polarisation, c'est à dire de déplacements des électrons par rapport aux ions. Ces charges sont très petites par rapport à la densité du plasma (i.e. on a  $n_i - n_e \ll n_e \approx n_i = n$ ), mais elles sont suffisantes pour créer un champ de polarisation macroscopique.

## 3.6 Modèle striations et instabilité de dérive

### 3.6.1 Modèle striations bidimensionnel

Dans cette section, on se restreint à un modèle striations bidimensionnel en ne considérant qu'une seule couche. Il s'agit du modèle obtenu à partir du modèle striations quasi-bidimensionnel (3.5.31)-(3.5.39) si l'on suppose que toutes les inconnues ne dépendent que de  $x_{\perp} = (x_1, x_2)$ , et si on suppose que  $u_{n3} = 0$ . On identifie alors  $x = x_{\perp}$  et on omet les symboles  $\perp$  et  $\langle \rangle$ . On introduit la vitesse relative des ions par rapport aux électrons:

$$h = u_i - u_e, \quad (3.6.1)$$

de sorte que l'on a:

$$j = nh, \quad (3.6.2)$$

Le modèle striations bidimensionnel s'écrit alors

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0, \quad (3.6.3)$$

$$u = \nabla \phi^{\perp}, \quad (3.6.4)$$

$$\nabla \cdot (nh) = 0, \quad (3.6.5)$$

$$h = -\nabla \phi - u_n^{\perp}, \quad (3.6.6)$$

où l'on note, pour un vecteur  $A = (A_1, A_2)$ ,  $A^{\perp} = (-A_2, A_1)$ . On a  $\underline{A}^{\perp} = -\underline{A} \times e_3$  où  $\underline{A}$  est le vecteur tridimensionnel construit à partir de  $A$  suivant  $\underline{A} = (A_1, A_2, 0)$ . L'opération indiquée par l'exposant  $\perp$  est donc la rotation de  $\pi/2$  dans le sens positif. On remarque que, pour une fonction scalaire  $\psi$ ,  $\nabla \cdot ((\nabla \psi)^{\perp}) = 0$ . Ainsi,  $u$  est un champ de vitesses à divergence nulle.

**Remarque 3.6.1** *A notre connaissance, il n'y a pas de théorie d'existence et d'unicité rigoureuse pour le problème (3.6.3)-(3.6.6).*

### 3.6.2 Instabilité de dérive en $E \times B$ : théorie phénoménologique

Dans un plasma, de nombreuses configurations d'équilibre (c'est à dire solutions des équations stationnaires du modèle) sont instables: une petite perturbation initiale de ces équilibres est amplifiée au cours du temps et conduit in fine le système vers une configuration d'équilibre différente de la condition initiale, ou dans certains cas, vers un régime chaotique sans configuration d'équilibre. Généralement, l'analyse de la stabilité des équations non linéaires est trop complexe et ne conduit qu'à des conclusions partielles. On se contente le plus souvent d'une analyse linéarisée: les équations sont linéarisées autour de l'équilibre et une analyse de Fourier permet alors de conclure à la stabilité ou l'instabilité. Cette méthode est restreinte à des équilibres homogènes (c'est à dire indépendants de la variable spatiale). Dans le cas d'équilibres inhomogènes, un substitut à l'analyse de Fourier peut être un calcul numérique approché du spectre de l'opérateur, mais la méthode n'est alors plus analytique.

Dans cette section, nous allons procéder à une analyse de stabilité linéarisée du modèle striations, pour mettre en évidence l'instabilité (dite de dérive en  $E \times B$ ) de certaines configurations d'équilibre. Nous donnons d'abord une vision phénoménologique de cette instabilité.

L'état d'équilibre consiste en une discontinuité de densité à la traversée de l'axe  $x_1$ :

$$n(x) = \begin{cases} \underline{n}, & x_2 < 0 \\ \bar{n} > \underline{n}, & x_2 > 0 \end{cases} .$$

Le champ électrique  $\nabla\phi$  est nul et le vent de neutres  $u_n$ , constant dans la direction  $x_2$ :  $u_n = (0, u_{n2})$ . On verra plus loin que ces fonctions sont des solutions au sens des distributions du système stationnaire (3.6.3)-(3.6.6).

On se donne maintenant une petite perturbation  $n_1$  qui consiste en une oscillation sinusoïdale de la surface de discontinuité:

$$(n + \varepsilon n_1)(x) = \begin{cases} \underline{n}, & x_2 < \varepsilon \sin(\xi_1 x_1) \\ \bar{n} > \underline{n}, & x_2 > \varepsilon \sin(\xi_1 x_1) \end{cases} .$$

Ici,  $\varepsilon$  représente la taille de la perturbation ( $\varepsilon \ll 1$ ) et  $\xi_1$  la fréquence spatiale de l'oscillation.

Le terme  $-u_n^\perp$  de la vitesse relative des ions par rapport aux électrons crée une accumulation de charge le long de l'interface sinusoïdale, dont le signe alterne en fonction de la monotonie de la sinusoïde, et qui dépend du sens de  $u_n$ . Par exemple, si  $u_n$  est orienté vers les  $x_2 > 0$  (i.e.  $u_{n2} > 0$ ),  $-u_n^\perp$  est orienté vers les  $x_1 > 0$ . Il y a donc accumulation des charges positives le long des portions croissantes de la sinusoïde et négatives le long des portions décroissantes. Un champ électrique de polarisation  $E$  prend donc naissance, qui, dans la configuration étudiée, est négatif dans les intervalles de convexité de la sinusoïde et positif dans les intervalles de concavité. La vitesse de dérive  $u = E \times B / |B|^2$  est donc orientée vers les  $x_2 > 0$ , là où la sinusoïde est convexe et vers les  $x_2 < 0$  là où elle est concave. Cette vitesse de dérive rappelle le plasma à sa position d'équilibre. il s'agit donc d'une configuration d'équilibre stable (cf figure 3.8).

Si maintenant on change le sens de  $u_n$ , tous les signes sont changés, et la vitesse de dérive  $u$  est orientée vers les  $x_2 < 0$  là où la sinusoïde est convexe et vers les  $x_2 > 0$  là où elle est concave. Elle va donc avoir tendance à amplifier la sinusoïde et l'amplitude de l'instabilité va croître jusqu'à une éventuelle saturation due aux phénomènes non linéaires. La configuration d'équilibre est dans ce cas instable (cf figure 3.9).

De telles instabilités s'observent dans l'ionosphère. Par exemple, le lâcher d'un nuage de Baryum (élément qui s'ionise très vite sous l'influence des photons solaires) crée une bulle de plasma plus dense dans un fond de plasma moins dense. Cette bulle évolue de manière disymétrique car un des bords est stable et l'autre instable au regard de l'instabilité de dérive (voir figure 3.10). Il se forme des structures allongées sur le bord instable de la bulle. De plus, ces structures sont fortement allongées dans la direction de  $B$  en raison de la propagation très rapide des électrons le long des lignes de champ magnétique. Ces structures s'appellent "striations ionosphériques".

Dans les sections suivantes, l'analyse de stabilité du modèle striations permet de retrouver ce phénomène. On considérera deux types d'états d'équilibres. Le premier concerne un profil de densité exponentiel. Le second traite un profil de densité discontinu, comme dans l'analyse

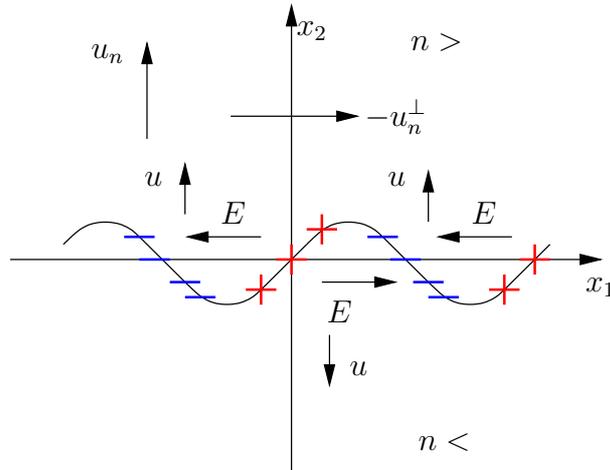


Figure 3.8: Configuration stable

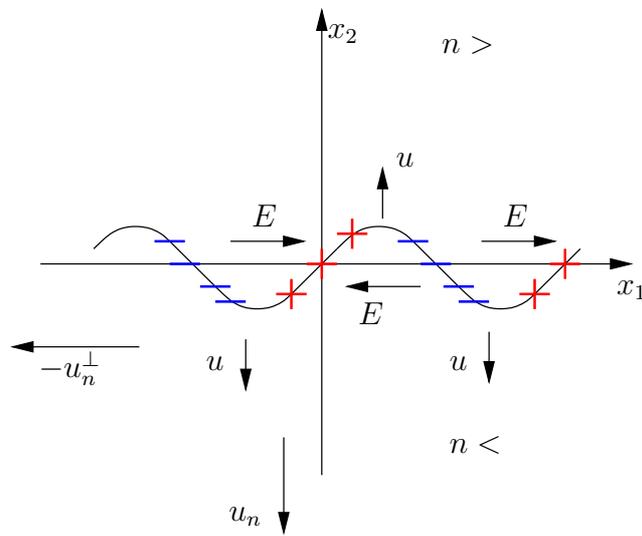


Figure 3.9: Configuration instable

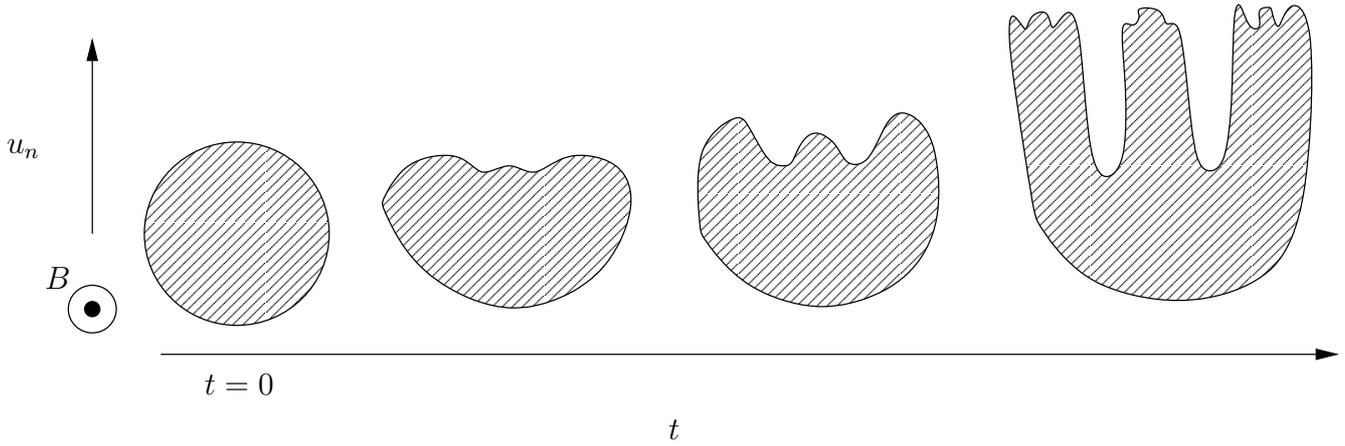


Figure 3.10: Evolution des instabilités

phénoménologique précédente. Chacun des exemples permet d'obtenir des informations quantitatives spécifiques sur l'instabilité.

L'observation des striations ionosphériques et leur modélisation, notamment à travers l'analyse de stabilité des modèles de plasma a donné lieu à une importante activité de recherches. On pourra se reporter à [19], pour une revue sur la physique de ces problèmes.

### 3.6.3 Analyse de stabilité du modèle striations; cas d'un profil de densité exponentiel

Pour représenter l'inhomogénéité du plasma, on postule que la densité de l'état non perturbé possède un profil exponentiel dans la direction  $x_2$ :

$$n_0 = N e^{x_2/\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (3.6.7)$$

où  $\lambda$  est la "longueur de gradient". La vitesse des neutres est supposée orientée dans la direction du gradient de  $n$  et indépendante de  $x$ :

$$u_n = (0, U). \quad (3.6.8)$$

Les autres quantités relatives à l'état non perturbé sont le potentiel  $\phi_0$ , supposé nul, et la vitesse relative des ions par rapport aux électrons  $h_0 = -u_{n0}^\perp$ , ce qui donne:

$$\phi_0 = 0, \quad h_0 = (U, 0). \quad (3.6.9)$$

On voit facilement que (3.6.7)-(3.6.9) constitue une solution stationnaire du modèle striations (3.6.3)-(3.6.6).

On introduit alors une perturbation

$$n = n_0(1 + \varepsilon n_1), \quad u = \varepsilon u_1, \quad \phi = \varepsilon \phi_1, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad (3.6.10)$$

avec  $\varepsilon \ll 1$ . On introduit (3.6.10) dans le modèle et on omet tous les termes d'ordre inférieur à  $\varepsilon$ . On obtient:

$$n_0 \frac{\partial n_1}{\partial t} + (u_1 \cdot \nabla) n_0 = 0, \quad (3.6.11)$$

$$u_1 = \nabla \phi_1^\perp = \left( -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right), \quad (3.6.12)$$

$$\nabla \cdot (n_0(h_1 + n_1 h_0)) = 0, \quad (3.6.13)$$

$$h_1 = -\nabla \phi_1 = \left( -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right), \quad (3.6.14)$$

Dans (3.6.11), on a utilisé le fait que  $\nabla \cdot u_1 = 0$ . Pour (3.6.14), on suppose que le vent de neutres, étant une donnée, ne contient pas de termes perturbatifs (i.e. ne dépend pas de  $\varepsilon$ ). On note que:

$$\nabla n_0 = \left( 0, \frac{n_0}{\lambda} \right).$$

Remarquer la forme de la perturbation de densité qui "module" le profil de densité exponentiel de l'état non perturbé.

Par la suite, on omet l'indice "1". Les équations (3.6.11)-(3.6.14) conduisent facilement, par élimination de  $u$  et de  $h$ , à

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0, \quad (3.6.15)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \Delta \phi + U \frac{\partial n}{\partial x_1} = 0, \quad (3.6.16)$$

On développe la solution en ondes planes:

$$n = \bar{n} \exp i \left( \xi_1 \frac{x_1}{\lambda} + \xi_2 \frac{x_2}{\lambda} - \omega t \frac{|U|}{\lambda} \right), \quad (3.6.17)$$

$$\phi = \bar{\phi} \lambda |U| \exp i \left( \xi_1 \frac{x_1}{\lambda} + \xi_2 \frac{x_2}{\lambda} - \omega t \frac{|U|}{\lambda} \right), \quad (3.6.18)$$

On a rapporté le vecteur d'onde  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  à l'échelle  $1/\lambda$  et la pulsation à l'échelle  $|U|/\lambda$ . De même, le potentiel est rapporté à l'échelle  $\lambda|U|$ ; rappelons néanmoins que toutes ces quantités sont sans dimension suite à l'adimensionnement effectué à la section 3.3.

**Exercice 3.6.1** *Comment s'expriment les échelles de nombre d'onde, pulsation et potentiel choisies en fonction des grandeurs physiques ?*

Insérant les expressions (3.6.17) et (3.6.18) dans (3.6.15), (3.6.16), on obtient:

$$-\omega \bar{n} + \xi_1 \bar{\phi} = 0, \quad (3.6.19)$$

$$i\sigma \xi_1 \bar{n} + (\xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2) \bar{\phi} = 0, \quad (3.6.20)$$

où  $\sigma = \text{signe}(U) \in \{-1, 1\}$ . Les équations (3.6.19), (3.6.20) s'écrivent matriciellement:

$$A \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -\omega & \xi_1 \\ i\sigma\xi_1 & \xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.6.21)$$

L'existence d'une perturbation non triviale  $(\bar{n}, \bar{\phi})$  équivaut à l'existence d'une solution non triviale de l'équation matricielle homogène (3.6.21), soit encore à la condition  $\det A = 0$ , qui s'écrit:

$$-\omega(\xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2) - i\sigma\xi_1^2 = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-i\sigma\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2} \\ &= \frac{-i\sigma\xi_1^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + i\xi_2), \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

**Définition 3.6.1** *La perturbation est stable si  $n$  et  $\phi$  restent bornés pour tout temps  $t \geq 0$ . Elle est instable dans le cas contraire. Une perturbation sable correspond donc à  $\Im m(\omega) \leq 0$  (où  $\Re e(\omega)$ ,  $\Im m(\omega)$  désignent les parties réelles et imaginaires du nombre complexe  $\omega$ ) et une perturbation instable, à  $\Im m(\omega) > 0$ . Un état stationnaire est dit stable si toutes les perturbations sont stables, quel que soit le vecteur d'onde  $\xi$ . Il est instable dès qu'il existe un vecteur d'onde  $\xi$  engendrant une perturbation instable.*

D'après (3.6.22), on a

$$\Im m(\omega) = \frac{-\sigma\xi_1^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2}. \quad (3.6.23)$$

- Si  $U > 0$ , c'est à dire  $\sigma > 0$ , on a  $\Im m(\omega) < 0$ : la perturbation est stable pour toute valeur du vecteur d'onde  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Cela correspond à la configuration de la figure 3.8.
- Si  $U < 0$ , c'est à dire  $\sigma < 0$ , on a  $\Im m(\omega) > 0$ : la perturbation est instable pour toute valeur de  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Cela correspond à la configuration de la figure 3.9.

La quantité  $\delta = (|U|/\lambda)|\Im m(\omega)|$  est le taux de croissance (dans le cas d'une instabilité) ou d'amortissement (dans un cas de stabilité) de l'onde. En effet, la solution est multipliée par un facteur  $e$  (ou divisée par  $e$ ) au bout d'un temps égal à  $\delta^{-1}$ . Dans le cas où  $\xi_2 = 0$ , c'est à dire, pour des perturbations se propageant perpendiculairement au gradient de densité, on a

$$\delta = \frac{|U|}{\lambda}. \quad (3.6.24)$$

Dans ce cas, le taux de croissance (d'amortissement) est indépendant de la longueur d'onde de la perturbation.

On peut résumer les conclusions de cette étude dans la

**Proposition 3.6.2** (i) la configuration d'équilibre (3.6.6), (3.6.9) du modèles striations est stable si et seulement si  $U \geq 0$ .

(ii) Dans le cas  $U < 0$ , tous les vecteurs d'onde  $\xi \neq 0$  sont instables et pour  $\xi_2 = 0$ , le taux de croissance est indépendant de  $\xi_1$ .

Il est légitime de se demander si le choix du profil exponentiel (3.6.7) pour la densité non perturbée représente correctement le profil de densité discontinu discuté à la section 3.6.2. En effet, le profil exponentiel présente deux inconvénients majeurs:

- La densité croît exponentiellement vers l'infini quand  $x_2 \rightarrow \infty$ , ce qui n'est pas physique, et peut induire des comportements mathématiques erronés.
- La densité décroît exponentiellement vers 0 quand  $x_2 \rightarrow -\infty$ . Or le problème elliptique dégénère lorsque la densité s'annule. Cette perte d'ellipticité peut entraîner des problèmes mathématiques, comme la non-existence ou la non-unicité des solutions.

Pour montrer que l'instabilité tient au modèle lui-même, et non au choix de l'état d'équilibre, nous allons étudier dans la section suivante la stabilité d'un profil de densité discontinu, comme à la section 3.6.2.

**Exercice 3.6.2** Montrer que pour un profil de densité exponentiel (3.6.7), l'état d'équilibre homogène (c'est à dire tel que  $u$ ,  $h$  et  $\nabla\phi$  soient indépendants de  $x$ ) le plus général est donné par:  $u_n = (V, U)$ ,  $u_0 = (V, 0)$ ,  $\phi_0 = -Vx_2$ ,  $h = (U, 0)$ . Montrer que le résultat de stabilité est inchangé par rapport au cas traité dans le cours ( $V = 0$ ).

### 3.6.4 Analyse de stabilité du modèle striations; cas d'une densité discontinue

Dans un premier temps, on considère une classe particulière de solutions du modèle striations (3.6.3)-(3.6.6): celles où la densité  $n$  est discontinue à travers une courbe paramétrée par  $x_2 = f(x_1, t)$ , où  $f$  est supposée de classe  $C^1$ :

$$n(x, t) = \begin{cases} \underline{n}, & x_2 < f(x_1, t) \\ \bar{n}, & x_2 > f(x_1, t) \end{cases}, \quad (3.6.25)$$

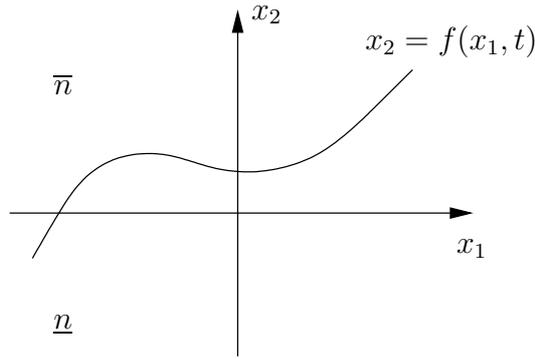
(cf figure 3.11). Pour donner un sens à des solutions discontinues, on développe tout d'abord le concept de solution faible, comme dans le cas des systèmes de lois de conservation [22].

En premier lieu, considérons  $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ , donnée et  $n$  une solution régulière (de classe  $C^1$  de:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (u \cdot \nabla)n = 0. \quad (3.6.26)$$

Soit  $\varphi(x, t)$  une fonction de classe  $C^1(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  à support compact dans  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  (autrement dit, nulle à l'extérieur de  $\bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$ ). Alors, en multipliant (3.6.26) et en utilisant la formule de Green, on déduit que:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)} n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) \right) dx dt = 0. \quad (3.6.27)$$

Figure 3.11: Courbe de discontinuité de  $n$ 

**Exercice 3.6.3** Montrer que  $n$  est solution régulière de classe  $C^1$  de (3.6.26) si et seulement si elle est  $C^1$  et vérifie (3.6.27) pour toute fonction test  $\varphi$  comme décrite ci-dessus.

La formulation (3.6.27) possède un sens dès que  $n$  est une fonction localement intégrable. On définit ainsi:

**Définition 3.6.3** Une fonction  $n$  appartenant à l'espace  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  des fonctions localement intégrables sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  est dite solution faible de (3.6.26) si et seulement si elle vérifie (3.6.27) pour toute fonction test  $\varphi$  comme décrite ci-dessus.

Toute fonction régulière est solution faible. Mais la réciproque n'est pas vraie. Nous allons déterminer à quelle condition sur la fonction  $f$  une fonction discontinue de la forme (3.6.25) est solution faible de (3.6.26).

**Lemme 3.6.4** Une fonction de la forme (3.6.25) est solution faible de (3.6.26) si et seulement si  $f$  est solution régulière de l'équation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = u_2, \quad (x_1, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (3.6.28)$$

où  $u_i = u_i(x_1, f(x_1, t), t)$ .

**Preuve:** On insère (3.6.25) dans (3.6.27). On obtient

$$0 = \underline{n} \int_{x_2 \leq f, t \geq 0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) \right) dx dt + \bar{n} \int_{x_2 \geq f, t \geq 0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) \right) dx dt.$$

Comme  $\varphi$  est à support compact, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) \right) dx dt = 0.$$

On en déduit:

$$0 = (\underline{n} - \bar{n}) \int_{x_2 \leq f, t \geq 0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) \right) dx dt. \quad (3.6.29)$$

On utilise maintenant la formule de Green. Le point de coordonnées  $(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  décrit un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Dans cet ouvert, l'ensemble

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad x_2 = f(x_1, t)\},$$

est une surface qui est le bord de l'ouvert

$$\Omega = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad x_2 < f(x_1, t)\}.$$

Notons  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_t)$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en un point  $(x, t)$  de  $\Sigma$ . La formule de Green donne:

$$\int_{x_2 \leq f, t \geq 0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) \right) dx dt = \int_{\Sigma} \varphi (u_1 \nu_1 + u_2 \nu_2 + \nu_t) d\Sigma(x, t),$$

où  $d\Sigma$  est la mesure surfacique sur  $\Sigma$ . Avec l'aide d'un peu de géométrie différentielle, on a:

$$\nu d\Sigma(x, t) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 1 \\ -\frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} dx_1 dt. \quad (3.6.30)$$

D'où (3.6.29) donne (supposant que  $\underline{n} \neq \bar{n}$ ):

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, \infty)} \varphi \left( -u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 - \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Big|_{x_2=f(x_1, t)} dx_1 dt = 0, \quad (3.6.31)$$

Comme (3.6.31) doit être vérifiée pour toute fonction test  $\varphi$ , on en déduit (3.6.28).  $\blacksquare$

#### Exercice 3.6.4 Prouver (3.6.30).

Maintenant, pour des densités de la forme (3.6.25), la vitesse  $u$  donnée par (3.6.4)-(3.6.6) peut être discontinue. Il faut donc généraliser le concept de solution faible de l'équation (3.6.26) au cas d'une vitesse discontinue. Tout d'abord, remarquons que la formulation faible (3.6.27) donne un sens à une solution  $n$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  dès que  $\nabla \cdot (u\varphi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  pour toute fonction test  $\varphi$  dans la classe considérée ci-dessus.

Oublions un moment la variable  $t$ . Si  $u$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}^2)^2$  et est telle que  $\nabla \cdot u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , alors,  $\nabla \cdot (u\varphi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ . En effet, puisque  $\nabla \cdot (u\varphi) = \varphi \nabla \cdot u + u \cdot \nabla \varphi$  et que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  à support compact, les hypothèses sur  $u$  entraînent bien que cette expression est localement intégrable. On note  $H_{div}(\mathbb{R}^2)$  cet espace:

$$H_{div}(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \text{tel que} \quad \nabla \cdot u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

Maintenant, supposons que  $u_n^\perp \in H^1(\mathbb{R}^2)$  et considérons  $\phi$ , la solution faible (dans l'espace de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ), du problème (3.6.5)-(3.6.6). Par définition (voir par exemple [6]),  $\phi$  est solution du problème variationnel:

$$\int_{\mathbb{R}^2} n(\nabla\phi + u_n^\perp)\nabla\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad (3.6.32)$$

qui admet une unique solution  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ . De plus, la norme  $H^1$  de  $\phi$  ne dépend que de la norme  $H^1$  de  $u_n^\perp$  et de la borne inférieure de  $n$ , à savoir, pour une fonction de la forme (3.6.25), de  $\min(\bar{n}, \underline{n})$ .

Par conséquent  $n\nabla\phi$  et  $u = \nabla\phi^\perp$  sont deux champs de vecteurs de  $L^2(\mathbb{R}^2)^2$  dont la divergence est dans  $L^2$ . On a en effet  $\nabla \cdot (n\nabla\phi) = -\nabla \cdot u_n^\perp \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $\nabla \cdot u = \nabla \cdot (\nabla\phi^\perp) = 0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Par conséquent, on a

$$n\nabla\phi \in H_{div}(\mathbb{R}^2), \quad u \in H_{div}(\mathbb{R}^2). \quad (3.6.33)$$

De plus, la norme de  $u$  dans  $H_{div}(\mathbb{R}^2)$  peut être estimée par la norme de  $\phi$  dans  $H^1$ . Si l'on restitue la variable de temps  $t$ , il est facile de réaliser que les valeurs minimales et maximales de  $n$  sont inchangées par l'équation (3.6.3). Ainsi, on en déduit facilement que la norme de  $u$  dans  $L^\infty([0, \infty), H_{div}(\mathbb{R}^2))$  est constante, dès que  $u_n^\perp \in L^\infty([0, \infty), H^1(\mathbb{R}^2))$ . Ainsi, la solution  $u$  de (3.6.4)-(3.6.6) est telle que  $\nabla \cdot (u\varphi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  pour toute fonction test  $\varphi$  et permet donc de définir une solution faible  $n$  de (3.6.26).

Il s'agit maintenant de savoir comment se généralise l'équation (3.6.28) lorsque  $u \in L^\infty([0, \infty), H_{div}(\mathbb{R}^2))$ . Pour cela, on utilise un lemme que l'on peut trouver par exemple dans [20].

**Lemme 3.6.5** *Soit  $\Gamma$  une courbe régulière de  $\mathbb{R}^2$  et  $u$  un champ de vecteurs de  $H_{div}(\mathbb{R}^2)$ . Alors, la trace normale  $u \cdot \nu$  (où  $\nu$  est la normale à  $\Gamma$ ) de  $u$  existe et appartient à l'espace  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .*

En effet, a priori, une fonction de  $H_{div}$  n'est pas continue. Il n'est donc pas possible de parler de ses valeurs sur les points de la courbe  $\Gamma$ . Néanmoins, ce lemme exprime que l'application définie sur le sous espace des fonctions régulières de  $H_{div}$  et qui à  $u$  associe sa trace normale  $u \cdot \nu$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de  $H_{div}$  sur  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Ainsi, la notion de "valeurs sur la courbe  $\Gamma$  de la trace normale de  $u$ " possède-t-elle un sens, même s'il s'agit d'un sens très faible. L'espace  $H^{-1/2}(\Gamma)$  est le dual de l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Pour la définition des espaces de Sobolev fractionnaires, on se reportera par exemple à [32].

Si, en particulier, la courbe  $\Gamma$  est celle des discontinuités de  $n$ , le lemme 3.6.5 exprime que la trace normale  $u \cdot \nu$  est définie de manière unique, et est donc d'une certaine manière continue à la traversée de  $\Gamma$ . En revanche, la trace tangentielle (c'est à dire  $u \cdot \tau$ , où  $\tau$  est le vecteur tangent à  $\Gamma$ ) n'est pas continue. En effet, d'après (3.6.33), on doit également avoir que  $n\nabla\phi \cdot \nu$  est continue à la traversée de  $\Gamma$ . Mais  $n\nabla\phi \cdot \nu = nu \cdot \tau$ . Or  $n$  est discontinu à travers  $\Gamma$ . Donc  $u \cdot \tau$  doit également être discontinu pour que  $nu \cdot \tau$  soit continu. Ainsi, on peut dire que le champ de vitesse  $u$  est discontinu à travers  $\Gamma$  mais que sa trace normale  $u \cdot \nu$  est continue.

La théorie de [20] permet également de généraliser la formule de Green pour des champs de vecteurs  $u$  de  $H_{div}$ . Nous allons maintenant poursuivre les calculs formellement, mais ils

peuvent être justifiés rigoureusement par l'emploi de cette formule. Supposons donc que  $u$  soit régulière à l'extérieur de la courbe  $\Gamma$  d'équation  $x_2 = f(x_1, t)$  et notons  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  ses limites:

$$\bar{u}(x_1, t) = \lim_{x_2 \xrightarrow{>} f(x_1, t)} u(x_1, x_2), \quad \underline{u}(x_1, t) = \lim_{x_2 \xrightarrow{<} f(x_1, t)} u(x_1, x_2), \quad (3.6.34)$$

avec a priori  $\bar{u} \neq \underline{u}$ . On note  $[u]_\Gamma = \bar{u} - \underline{u}$  le saut de  $u$  à travers  $\Gamma$ . Dire que  $u \cdot \nu$  est continu à la traversée de  $\Gamma$  revient à dire que  $[u]_\Gamma \cdot \nu = 0$ , et donc que

$$\bar{u}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \bar{u}_2 = \underline{u}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \underline{u}_2. \quad (3.6.35)$$

On notera  $(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - u_2)_\Gamma$  la valeur commune de (3.6.35). On peut donc maintenant énoncer le lemme:

**Lemme 3.6.6** *Soit  $u$  une fonction de  $H_{div}$ . Une fonction  $n$  de la forme (3.6.25) est solution faible de (3.6.26) si et seulement si  $f$  est solution régulière de l'équation:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - u_2)_\Gamma = 0, \quad (x_1, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (3.6.36)$$

où  $\Gamma$  est la courbe d'équation  $x_2 = f(x_1, t)$ .

**Exercice 3.6.5** *Prouver le lemme 3.6.6.*

Maintenant que l'on a donné un sens aux solutions discontinues du type (3.6.25), on peut écrire le modèle striations (3.6.3)-(3.6.6) pour de telles solutions:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_1, f(x_1, t), t) \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, f(x_1, t), t), \quad (3.6.37)$$

$$-\nabla \cdot ((\underline{n}\chi_f + \bar{n}(1 - \chi_f))(\nabla \phi + u_n^\perp)) = 0, \quad (3.6.38)$$

où

$$\chi_f = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 \leq f(x_1, t), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une solution d'équilibre de ce modèle est donnée par

$$f_0 = 0, \quad \phi_0 = 0, \quad u_n = (0, U). \quad (3.6.39)$$

En effet, dans le cas  $f_0 = 0$ , la fonction  $\underline{n}\chi_{f_0} + \bar{n}(1 - \chi_{f_0})$  ne dépend que de  $x_2$ , et la composante selon  $x_2$  de  $u_n^\perp$  est nulle. Ainsi, l'équation (3.6.38) se trouve satisfaite (au sens des distributions).

On perturbe maintenant l'équilibre (3.6.39) avec des petites perturbations d'ordre  $\varepsilon$ . Seule, la vitesse des neutres, donnée extérieure au problème, n'est pas perturbée. On pose donc

$$f = \varepsilon f_1, \quad \phi = \varepsilon \phi_1. \quad (3.6.40)$$

En insérant (3.6.40) dans (3.6.37), (3.6.38), et en ne retenant que les termes d'ordre  $\varepsilon$ , on obtient:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_1, 0, t), \quad (3.6.41)$$

$$-\nabla \cdot ((\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0))\nabla \phi_1) = -U \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} (\underline{n}\chi_{\varepsilon f_1} + \bar{n}(1 - \chi_{\varepsilon f_1})). \quad (3.6.42)$$

Pour calculer le membre de droite de (3.6.42), on utilise le:

**Lemme 3.6.7** *On a, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  au sens des distributions:*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \chi_{\varepsilon f} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta_{x_2=0} + o(\varepsilon),$$

où pour une fonction  $g(x_1)$ , la distribution  $g(x_1)\delta_{x_2=0}$  est définie par le crochet de dualité contre toute fonction test  $\varphi(x)$  de classe  $C^\infty$  à support compact:

$$\langle g(x_1)\delta_{x_2=0}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, 0)g(x_1) dx_1. \quad (3.6.43)$$

**Preuve:** Soit  $\varphi$  une fonction test. Par définition de la dérivée distribution et de  $\chi_{\varepsilon f}$ , on a:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \chi_{\varepsilon f}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle \chi_{\varepsilon f}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle \\ &= -\int_{x_2 \leq \varepsilon f} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et le calcul de la normale (3.6.30), on en déduit:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \chi_{\varepsilon f}, \varphi \right\rangle &= -\int_{x_2=\varepsilon f} \varphi \nu_1 d\Sigma(x_1, x_2) \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, \varepsilon f(x_1)) \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, 0) \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

On reconnaît au membre de droite l'expression de  $\langle (\partial f / \partial x_1)\delta_{x_2=0}, \varphi \rangle$ , ce qui démontre l'égalité recherchée. ■

**Exercice 3.6.6** *Montrer que*

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \chi_{\varepsilon f} = -\delta(x_2) + \varepsilon f(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta_{x_2=0}) + o(\varepsilon),$$

où, pour une fonction  $g(x_1)$ , on définit:

$$\left\langle g(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta_{x_2=0}), \varphi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, 0)g(x_1) dx_1.$$

Grâce au lemme 3.6.7, le système (3.6.41), (3.6.42) se réécrit, en omettant les indices "1":

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, 0, t), \quad (3.6.44)$$

$$-\nabla \cdot ((\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0))\nabla \phi_1) = U(\bar{n} - \underline{n}) \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta_{x_2=0}. \quad (3.6.45)$$

On développe en ondes plane dans la direction  $x_1$ :

$$f = \bar{f} \exp i(\xi x_1 - \omega t), \quad (3.6.46)$$

$$\phi = \bar{\phi}(x_2) \exp i(\xi x_1 - \omega t), \quad (3.6.47)$$

où le scalaire  $\bar{f}$  et la fonction  $\bar{\phi}(x_2)$  sont à déterminer, et on pose  $\delta n = (\bar{n} - \underline{n})$ . En insérant (3.6.46), (3.6.47) dans (3.6.44), (3.6.45), on obtient:

$$\bar{f} = -\frac{\xi}{\omega} \bar{\phi}(0), \quad (3.6.48)$$

$$\begin{aligned} -\left( \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0)) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_2} \right) - \xi^2 (\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0)) \bar{\phi} \right) = \\ = \delta n U \left( -i \frac{\xi^2}{\omega} \right) \bar{\phi}(0) \delta_{x_2=0}. \end{aligned} \quad (3.6.49)$$

L'équation (3.6.49) à l'extérieur du point  $x_2 = 0$  se réduit à l'équation différentielle du deuxième ordre:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_2^2} = \xi^2 \bar{\phi},$$

dont les solutions bornées quand  $|x_2| \rightarrow \infty$  s'écrivent

$$\bar{\phi}(x_2) = \begin{cases} \bar{\phi}(0) e^{|\xi| x_2} & \text{pour } x_2 < 0 \\ \bar{\phi}(0) e^{-|\xi| x_2} & \text{pour } x_2 > 0 \end{cases}. \quad (3.6.50)$$

On a ainsi:

$$(\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0)) \partial_{x_2} \bar{\phi}(x_2) = \begin{cases} \underline{n} |\xi| \bar{\phi}(0) e^{|\xi| x_2} & \text{pour } x_2 < 0 \\ -\bar{n} |\xi| \bar{\phi}(0) e^{-|\xi| x_2} & \text{pour } x_2 > 0 \end{cases}.$$

Ainsi, au sens des distributions sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0)) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_2} \right) = \xi^2 (\underline{n}\chi_0 + \bar{n}(1 - \chi_0)) \bar{\phi} \\ - (\underline{n} + \bar{n}) |\xi| \bar{\phi}(0) \delta_{x_2=0}. \end{aligned} \quad (3.6.51)$$

Insérant (3.6.51) dans (3.6.49), on obtient:

$$(\underline{n} + \bar{n}) |\xi| \bar{\phi}(0) \delta_{x_2=0} = -i \delta n U \left( \frac{\xi^2}{\omega} \right) \bar{\phi}(0) \delta_{x_2=0},$$

ce qui donne la relation de dispersion entre  $\omega$  et  $\xi$ :

$$\omega = -i \frac{\bar{n} - \underline{n}}{\bar{n} + \underline{n}} U |\xi|. \quad (3.6.52)$$

Supposons  $\bar{n} > \underline{n}$ . Ainsi, le signe de  $\Im m(\omega)$  dépend du signe de  $U$ :

- Si  $U > 0$ , on a  $\Im m(\omega) < 0$ . Donc la perturbation est stable,
- Si  $U < 0$ , on a  $\Im m(\omega) > 0$ . Donc la perturbation est instable.

On en déduit la

**Proposition 3.6.8** (i) Supposons  $\bar{n} > \underline{n}$ . La configuration d'équilibre (3.6.39) du modèle (3.6.37), (3.6.38) est stable si et seulement si  $U \geq 0$ .

(ii) Dans le cas  $U < 0$ , tous les vecteurs d'onde  $\xi$  sont instables et le taux de croissance est donné par:

$$|\Im m(\omega)| = \frac{\bar{n} - \underline{n}}{\bar{n} + \underline{n}} U |\xi|, \quad (3.6.53)$$

et est en particulier proportionnel au nombre d'onde.

Qualitativement, le résultat est donc identique au cas d'un équilibre de profil de densité exponentiel: stabilité pour  $U > 0$ , instabilité pour  $U < 0$ , et ce, quel que soit le nombre d'onde. Quantitativement, le résultat diffère. Dans le cas exponentiel, le taux de croissance est indépendant du nombre d'onde de la perturbation (mais dépend seulement de la "longueur de gradient"  $\lambda$  du profil de densité initial). En revanche, dans le cas discontinu, le taux de croissance croît linéairement avec le nombre d'onde.

**Exercice 3.6.7** Pour  $f_0 = 0$ , montrer que l'état d'équilibre homogène (i.e. vérifiant  $u_n$  et  $\nabla\phi_0$  indépendants de  $x$ ) le plus général du système (3.6.37), (3.6.38) est donné par

$$u_n = (V, U), \quad \phi_0 = -Vx_2.$$

Reprendre l'analyse de stabilité pour cet état d'équilibre et montrer que les conclusions restent inchangées.

## 3.7 Modélisation de la turbulence au sein du modèle "striations"

### 3.7.1 Modèle "striations" turbulent

On a vu que l'instabilité de dérive en  $E \times B$  contribue à l'apparition dans le plasma de structures de plus en plus petites. De plus, d'après (3.6.53), les perturbations de petite échelle (faible longueur d'onde donc grand nombre d'onde) croissent plus vite que les perturbations

à grande échelle. Rapidement, sous l'influence de cette instabilité, le plasma prend une allure très chaotique où aux structures à grandes échelles (par exemple la bulle initiale de plasma) se superposent des perturbations d'échelles de plus en plus petites.

La simulation numérique ne permet pas d'accéder aux échelles de taille inférieure au maillage utilisé. La méthode numérique tronque donc spontanément les échelles les plus petites. Cela n'est pas gênant si l'on est certain que cette troncature n'influe pas sur les grandes échelles (généralement les seules qui intéressent l'utilisateur du code). Or, dans le cas du modèle striations, les oscillations de la densité aux petites échelles peuvent contribuer à modifier le potentiel électrique, et donc la dynamique du plasma aux grandes échelles. De plus, la croissance de l'instabilité se traduit par des champs de plus en plus intenses, qui pénalisent considérablement la condition de stabilité du schéma d'avancement en temps. On cherche donc à établir, à partir du modèle striations, un modèle qui décrive l'effet des petites échelles sur la dynamique du plasma aux grandes échelles. On s'attend à ce qu'un tel modèle ne présente pas les mêmes instabilités que le modèle striations, tout au moins aux petites échelles.

On peut aisément s'imaginer que les structures de petite échelle ont un caractère aléatoire. Même si l'évolution à partir du modèle striations est parfaitement déterministe, les conditions de l'expérience ne sont jamais complètement reproductibles (incertitudes sur les données initiales, fluctuations du vent de neutres, etc). Il est donc légitime de considérer les petites échelles comme des perturbations aléatoires des grandes échelles, et de ne s'intéresser qu'à la valeur moyenne des grandeurs caractéristiques du plasma sur un grand nombre de réalisations de l'écoulement. Les valeurs moyennes évoluent selon des équations qui s'obtiennent en prenant des moyennes des équations initiales. On souhaite obtenir un système d'équations fermé, c'est à dire ne dépendant plus du détail de la fluctuation aléatoire, mais seulement de certaines de ses caractéristiques à grande échelle, que l'on espère pouvoir facilement relier à des observations physiques. Il s'agit donc d'établir un nouveau modèle à partir du modèle striations original, qui modélisera l'évolution des grandes échelles seulement, en tenant compte de l'influence des petites échelles par des termes supplémentaires. Cette problématique est celle de la modélisation de la turbulence.

Cette problématique est largement développée en mécanique des fluides mais n'a pas encore reçu de solution qui dégage un consensus. Le modèle le plus opérationnel est le modèle dit  $k-\varepsilon$ , qui modélise les effets d'une turbulence homogène et isotrope au sein des équations de Navier-Stokes incompressibles [33]. Son obtention repose sur l'approche statistique de la turbulence, originellement développée par Reynolds, Prandtl, etc. Nous allons utiliser une approche similaire, quoique plus simple, pour le modèle striations. D'autres approches ont été développées par les physiciens, utilisant notamment des méthodes spectrales [37]. Nous ne les développerons pas ici.

On suppose que les grandeurs caractéristiques du plasma  $(n, u, \phi, h)$  se décomposent en valeurs moyennes (notées  $(\bar{n}, \bar{u}, \bar{\phi}, \bar{h})$ ) et fluctuations aléatoires (notées  $(n', u', \phi', h')$ ). L'aléa portant sur la réalisation de l'écoulement, l'opérateur de valeur moyenne commute avec les

dérivées spatiales et temporelles. On a donc pour une grandeur  $a$ :

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + a', \quad \bar{a} = \text{valeur moyenne}, \quad a' = \text{fluctuation}, \\ \overline{(\bar{a})} &= \bar{a}, \quad \overline{a'} = 0, \\ \nabla a &= \nabla \bar{a} + \nabla a', \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \frac{\partial a'}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si  $b$  est une quantité non fluctuante, on a

$$\overline{ba} = b\bar{a}.$$

Pour deux quantités aléatoires  $a$  et  $b$ , en général

$$\overline{ab} \neq \bar{a}\bar{b},$$

sauf si ces deux quantités sont indépendantes. En revanche, on aura

$$\overline{a\bar{b}} = \bar{a}\bar{b}$$

car  $\bar{b}$  n'est pas aléatoire.

A partir du modèle striations (3.6.3)-(3.6.6) et en notant que le vent de neutres est une quantité non fluctuante, on obtient, en prenant les valeurs moyennes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{n}\bar{u}) &= 0, \\ \bar{u} &= \nabla \bar{\phi}^\perp, \quad u' = \nabla \phi'^\perp, \\ \nabla \cdot (\bar{n}\bar{h}) &= 0, \\ \bar{h} &= -\nabla \bar{\phi} - u_n^\perp, \quad h' = -\nabla \phi'. \end{aligned}$$

On cherche à exprimer toutes les quantités en fonction des quantités moyennes  $(\bar{n}, \bar{u}, \bar{\phi}, \bar{h})$  uniquement. On a:

$$\overline{n\bar{u}} = \overline{(\bar{n} + n')(\bar{u} + u')} = \bar{n}\bar{u} + \overline{n'u'} + \overline{\bar{n}u'} + \overline{\bar{n}u} = \bar{n}\bar{u} + \overline{n'u'}.$$

A priori,  $\overline{n'u'} \neq 0$ . La quantité  $\overline{n'u'}$  s'appelle corrélation de la densité et de la vitesse. Si  $n'$  et  $u'$  étaient des variables aléatoires indépendantes, on aurait  $\overline{n'u'} = \overline{n'} \overline{u'} = 0$ , puisque la valeur moyenne de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des valeurs moyennes de chaque variable aléatoire, qui ici, sont nulles. Le fait que  $\overline{n'u'} \neq 0$  est donc dû à la non-indépendance de  $n'$  et de  $u'$ , (car  $n$  évolue dans le champ de vitesses défini par  $u$ ), c'est à dire à leur corrélation. De la même manière, on a:

$$\overline{n\bar{h}} = \bar{n}\bar{h} + \overline{n'h'}.$$

Le modèle striations, après moyenne sur l'aléa représentant les fluctuations engendrées par les petites échelles, s'écrit:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{n}\bar{u}) + \nabla \cdot (\overline{n'u'}) = 0, \quad (3.7.1)$$

$$\bar{u} = \nabla \bar{\phi}^\perp, \quad (3.7.2)$$

$$\nabla \cdot (\bar{n}\bar{h}) + \nabla \cdot (\overline{n'h'}) = 0, \quad (3.7.3)$$

$$\bar{h} = -\nabla \bar{\phi} - u_n^\perp. \quad (3.7.4)$$

Pour obtenir un modèle "fermé", c'est à dire ne dépendant que des quantités moyennes  $(\bar{n}, \bar{u}, \bar{\phi}, \bar{h})$ , il faut donc trouver une expression des corrélations  $\overline{n'u'}$  et  $\overline{n'h'}$  en fonction des quantités moyennes. Ce problème de fermeture est complexe et encore très imparfaitement résolu, y compris dans le cadre de la mécanique des fluides incompressibles.

Il est généralement admis qu'une approximation "d'ordre 1" des corrélations est fournie par une diffusion de la quantité moyenne transportée. Ainsi, on écrira:

$$\overline{n'u'} = -D_u \nabla n, \quad (3.7.5)$$

$$\overline{n'h'} = -D_h \nabla n, \quad (3.7.6)$$

où  $D_u$  et  $D_h$  sont des coefficients de diffusion à déterminer, généralement à l'aide de relations phénoménologiques. Une justification des formules (3.7.5), (3.7.6) est fournie par le théorème de Kesten-Papanicolaou:

**Théorème 3.7.1** (*Kesten-Papanicolaou [27]*) *Soit  $u$  un champ de vecteur à divergence nulle,  $f(x, t)$ , une fonction donnée et  $c(x, t)$ , la solution de l'équation de convection*

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = f. \quad (3.7.7)$$

*On suppose que  $u$  est une variable aléatoire, indépendante de  $t$ , de moyenne  $\bar{u}$  et qui possède une propriété statistique appelée "mixing" (qui dit "en gros" que la corrélation entre deux points distants de  $d$  décroît suffisamment vite quand  $d$  croît). On suppose de plus que  $|\bar{u}| \gg |u'|$ . Alors  $\bar{c}$  satisfait l'équation de convection diffusion:*

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{c} - \nabla \cdot (M \nabla \bar{c}) = \bar{f}, \quad (3.7.8)$$

où la matrice  $M$  est la matrice d'autocorrélations de  $u'$ :

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u'_i(x + \bar{u}t) u'_j(x)} dt. \quad (3.7.9)$$

D'après ce théorème, on voit que les coefficients de diffusion  $D_u$  et  $D_h$  sont liés à l'autocorrélation de  $u$  (resp. de  $h$ ). Mais les composantes fluctuantes de  $u$  et de  $h$  sont corrélées (car on a  $h' = (u')^\perp$ ). Si la fluctuation est isotrope, on déduit que  $D_h = D_u := D$ .

Néanmoins, pour des raisons de simplicité, on néglige la diffusion dans l'équation de continuité et on ne conserve que dans l'équation de conservation de la densité. On obtient alors le modèle "striations turbulent" (on omet les barres sur les valeurs moyennes):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) - \nabla \cdot (D \nabla n) = 0, \quad (3.7.10)$$

$$u = \nabla \phi^\perp, \quad (3.7.11)$$

$$\nabla \cdot (nh) = 0, \quad (3.7.12)$$

$$h = -\nabla \phi - u_n^\perp, \quad (3.7.13)$$

Il reste maintenant à proposer une formule pour le coefficient de diffusion  $D$ . Pour cela, nous allons procéder à l'analyse de stabilité du modèle striations turbulent (3.7.10)-(3.7.13) dans la sections suivante.

### 3.7.2 Modèle "striations" turbulent et instabilité de dérive

La diffusion contribue à stabiliser les petites échelles (c'est à dire les grands nombres d'onde, le nombre d'onde étant la norme du vecteur d'onde). Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui est l'équation de diffusion pure. Pour qu'une solution de type onde plane  $u = \bar{u} \exp i(\xi x - \omega t)$  existe, il faut et il suffit que  $\omega$  et  $\xi$  soient liés par

$$\omega = -i\kappa\xi^2.$$

On voit que toutes les ondes planes sont stables, et que leur taux d'amortissement  $\kappa\xi^2$  est d'autant plus grand que  $\xi$  est grand.

Ainsi, en rajoutant un terme de diffusion au modèle striations, on s'attend à ce que l'amortissement dû à la diffusion contrebalance l'effet des instabilités pour les grands nombres d'onde. L'instabilité ne se manifesterait plus que pour les petits nombres d'onde, c'est à dire pour les grandes longueurs d'onde. Mais ce sont précisément les grandes longueurs d'onde qui sont correctement décrites par les simulations numériques et l'instabilité cessera donc d'être gênante. Par ailleurs, les phénomènes non linéaires (qui ne sont pas pris en compte dans l'analyse de stabilité linéarisée) tendent à limiter la croissance de l'instabilité et à la maintenir dans des bornes accessibles à la simulation numérique.

Ainsi, un algorithme "phénoménologique" pour déterminer la constante de diffusion est le suivant. On commence par déterminer une échelle de longueur caractéristique  $\ell$  (qui dans la pratique sera associée au pas de discrétisation  $\Delta x$ ), et l'on souhaite construire un modèle tel que toutes les longueurs d'onde inférieures ou égales à  $\ell$  soient stables. On détermine ensuite la constante de diffusion  $D$  minimale qui garantisse une telle stabilité.

Il peut être objecté que cette procédure n'a que peu de lien avec la physique. Néanmoins, si on admet que l'instabilité du modèle initial croît au cours du temps, les fluctuations de la vitesse croissent également, et le coefficient de diffusion finit par évaluer, voire excéder celui déterminé empiriquement par la procédure ci-dessus.

L'analyse de stabilité est donc un point crucial pour déterminer empiriquement la constante de diffusion  $D$ . Nous procédons donc maintenant à cette analyse pour le modèle striations turbulent (3.7.10), (3.7.13).

On reprend un état d'équilibre caractérisé par un profil de densité exponentiel (3.6.7). On suppose le coefficient de diffusion  $D$  constant. En revanche, on lui suppose une forme matricielle, diagonale dans le repère  $(x_1, x_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}. \quad (3.7.14)$$

A cause de la diffusion, la vitesse et le potentiel de l'état non perturbé ne peuvent plus être

nuls. L'état non perturbé est maintenant défini par:

$$n_0 = Ne^{x_2/\lambda}, \quad \nabla n_0 = \left(0, \frac{n_0}{\lambda}\right), \quad (3.7.15)$$

$$u_0 = \left(0, \frac{D_2}{\lambda}\right) = \left(-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi_0}{\partial x_1}\right), \quad (3.7.16)$$

$$\phi_0 = \frac{D_2}{\lambda}x_1, \quad (3.7.17)$$

$$u_n = (0, U), \quad (3.7.18)$$

$$h_0 = \left(-\frac{D_2}{\lambda} + U, 0\right). \quad (3.7.19)$$

On perturbe cet état d'équilibre en définissant

$$n = n_0(1 + \varepsilon n_1), \quad (3.7.20)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \quad (3.7.21)$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1, \quad (3.7.22)$$

$$h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad (3.7.23)$$

avec  $\varepsilon \ll 1$ . En insérant (3.7.24) dans (3.7.10)-(3.7.13) et en ne retenant que les termes linéaires en  $\varepsilon$ , on obtient:

$$n_0 \frac{\partial n_1}{\partial t} + (u_1 \cdot \nabla)n_0 + (u_0 \cdot \nabla)(n_0 n_1) - \nabla \cdot (D \nabla(n_0 n_1)) = 0, \quad (3.7.24)$$

$$u_1 = \nabla \phi_1^\perp = \left(-\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\right), \quad (3.7.25)$$

$$\nabla \cdot (n_0(h_1 + n_1 h_0)) = 0, \quad (3.7.26)$$

$$h_1 = -\nabla \phi_1 = \left(-\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right), \quad (3.7.27)$$

En développant (3.7.25), il vient (en omettant désormais les indices "1"):

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{D_2}{\lambda} \frac{\partial n}{\partial x_2} - D_1 \frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} - D_2 \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0, \quad (3.7.28)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \Delta \phi + \left(-\frac{D_2}{\lambda} + U\right) \frac{\partial n}{\partial x_1} = 0. \quad (3.7.29)$$

On développe en ondes planes selon (3.6.17), (3.6.18). On introduit une matrice de diffusion  $\bar{D}$  telle que  $D = |U|\lambda\bar{D}$ . On obtient:

$$\begin{aligned} (-i\omega - i\xi_2 \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \xi_1^2 + \bar{D}_2 \xi_2^2) \bar{n} + i\xi_1 \bar{\phi} &= 0, \\ i(\sigma - \bar{D}_2) \xi_1 \bar{n} + (\xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2) \bar{\phi} &= 0, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que l'on note  $\sigma = \text{signe}(U) \in \{-1, 1\}$ . Ces équations s'écrivent matriciellement:

$$A \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.7.30)$$

$$A = \begin{pmatrix} -i\omega - i\xi_2\bar{D}_2 + \bar{D}_1\xi_1^2 + \bar{D}_2\xi_2^2 & i\xi_1 \\ i(\sigma - \bar{D}_2)\xi_1 & \xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.7.31)$$

L'existence de solutions non triviales est équivalente à  $\det A = 0$ , soit:

$$\omega = -\xi_2\bar{D}_2 - i(\bar{D}_1\xi_1^2 + \bar{D}_2\xi_2^2) - i \frac{(\sigma - \bar{D}_2)\xi_1^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + i\xi_2).$$

On en déduit que

$$\Im m(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}, \quad (3.7.32)$$

$$\mathcal{N} = -(\bar{D}_1\xi_1^2 + \bar{D}_2\xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + i\xi_2) - (\sigma - \bar{D}_2)\xi_1^2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad (3.7.33)$$

$$\mathcal{D} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2. \quad (3.7.34)$$

Comme  $\mathcal{D} \geq 0$ , il suffit de discuter le signe de  $\mathcal{N}$ . Pour cela, on examine plusieurs cas particuliers:

**Exemple 3.7.1**  $D$  est une matrice de diffusion isotrope. Dans ce cas, on a  $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 := D$  et  $\mathcal{N} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)\bar{\mathcal{N}}$ , avec

$$\bar{\mathcal{N}} = -D((\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2) - \xi_1^2(\sigma - D).$$

On introduit les coordonnées polaires:  $\xi_1 = r \cos \theta$ ,  $\xi_2 = r \sin \theta$ . Ainsi:

$$\bar{\mathcal{N}} = -Dr^2 \left( r^2 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \left( \frac{\sigma}{D} - 1 \right) \right).$$

On discute maintenant selon le signe de  $\sigma$ :

**Cas (i)**  $\sigma = +1$ . Alors si  $D \leq 1$ ,  $\bar{\mathcal{N}} < 0$ : la perturbation est stable pour toute valeur de  $\xi$ .

Si  $D > 1$ , on est amené à introduire les racines de l'équation:

$$f(\theta) := \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{1}{D} \right) = 0,$$

soit

$$\theta = \pm\theta_0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \theta_0 = \tan^{-1} \sqrt{1 - \frac{1}{D}}.$$

Lorsque  $\theta \in [-\theta_0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi + \theta_0]$ , on a  $f(\theta) < 0$  et donc  $\bar{\mathcal{N}} > 0$  pour  $r$  tel que  $0 \leq r < r(\theta) := \sqrt{|f(\theta)|}$ : la perturbation est instable. Par contre,  $\bar{\mathcal{N}} \leq 0$  pour  $r \geq r(\theta)$  et la perturbation est stable.

Lorsque  $\theta \notin [-\theta_0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi + \theta_0]$  on a  $f(\theta) > 0$  et  $\bar{\mathcal{N}} < 0$ : la perturbation est stable pour toute valeur de  $r$ .

Comme  $r(\theta) < \sqrt{1 - D^{-1}}$ , le domaine d'instabilité est contenu dans une boule centrée à l'origine et de rayon  $\sqrt{1 - D^{-1}}$ . Ainsi, lorsque  $\sigma = +1$  (cas stable pour le modèle striations original), la diffusion déstabilise le modèle lorsque le coefficient de diffusion excède la valeur 1.

**Cas (ii)  $\sigma = -1$ .** Il s'agit a priori du cas intéressant car c'est le cas instable pour le modèle striations original. L'analyse est la même que dans le cas  $D > 1$  ci-dessus, en remplaçant l'expression de  $\theta_0$  par

$$\theta_0 = \tan^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{D}}.$$

Le domaine d'instabilité est donc contenu dans la boule centrée à l'origine et de rayon  $\sqrt{1 + D^{-1}}$  (voir figure 3.12).

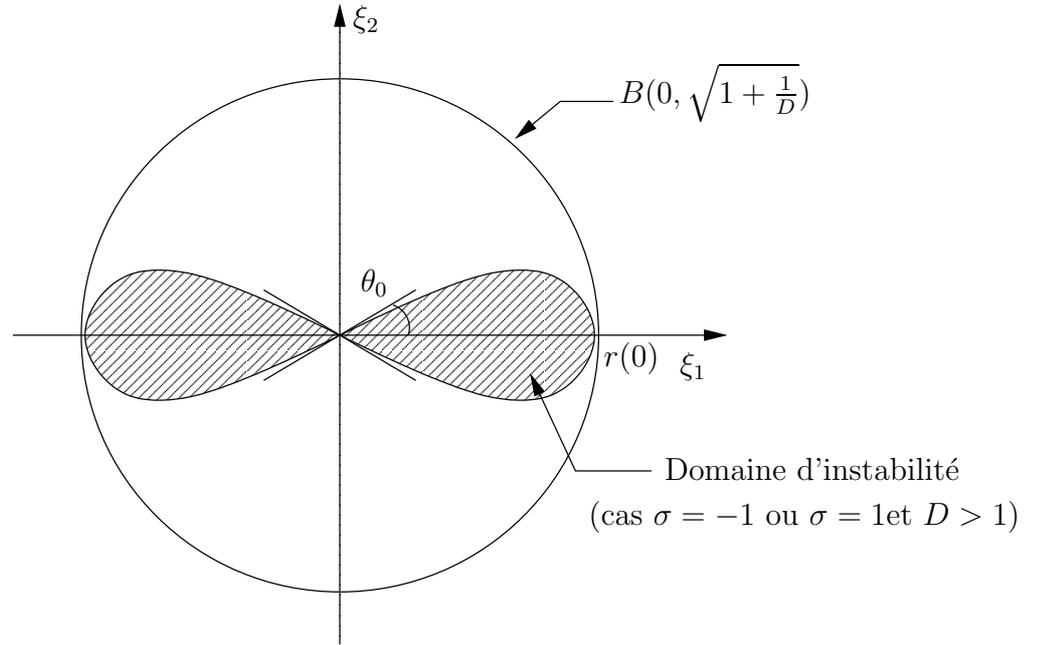


Figure 3.12: Domaine de stabilité: cas d'une diffusion isotrope

**Exemple 3.7.2**  $D$  est une matrice de diffusion dégénérée dans la direction  $x_2$ :  $\bar{D}_1 := D > 0$ ,  $\bar{D}_2 = 0$ . Dans ce cas, on a  $\bar{\mathcal{N}} = \xi_1^2 \bar{\mathcal{N}}$ , avec:

$$\bar{\mathcal{N}} = -D((\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2) - \sigma(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Là encore, on a deux cas:

**Cas (i)  $\sigma = 1$ .** Alors  $\bar{\mathcal{N}} < 0$ : la perturbation est toujours stable, quels que soient le vecteur d'onde et la valeur de la diffusion  $D$ .

Cas (ii)  $\sigma = -1$ . Alors

$$\bar{\mathcal{N}} = -D((\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2) + (\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Le passage en coordonnées polaires donne:

$$\bar{\mathcal{N}} = -Dr^2 \left( r^2 + \sin^2 \theta - \frac{1}{D} \right).$$

Si  $D < 1$ , on a  $\sin^2 \theta - D^{-1} < 0$ . Alors,  $\bar{\mathcal{N}} < 0$  pour  $r$  tel que  $0 \leq r < r(\theta) := (D^{-1} - \sin^2 \theta)^{1/2}$  et la perturbation est instable. En revanche, pour  $r \geq r(\theta)$ ,  $\bar{\mathcal{N}} > 0$  et la perturbation est stable. Si  $D > 1$ , soit  $\theta_0 = \sin^{-1}(1/\sqrt{D})$ . Pour  $\theta \in [-\theta_0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi + \theta_0]$ , on a  $\sin^2 \theta - D^{-1} < 0$  et la perturbation est instable pour  $r$  tel que  $0 \leq r < r(\theta) := (D^{-1} - \sin^2 \theta)^{1/2}$  et stable pour  $r \geq r(\theta)$ . En revanche, lorsque  $\theta \notin [-\theta_0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi + \theta_0]$ , la perturbation est stable pour toute valeur de  $r$ .

Dans le cas  $\sigma = -1$ , pour toutes valeurs de  $D$ , le domaine d'instabilité est contenu dans la boule centrée à l'origine et de rayon  $1/\sqrt{D}$  (cf figure 3.13).

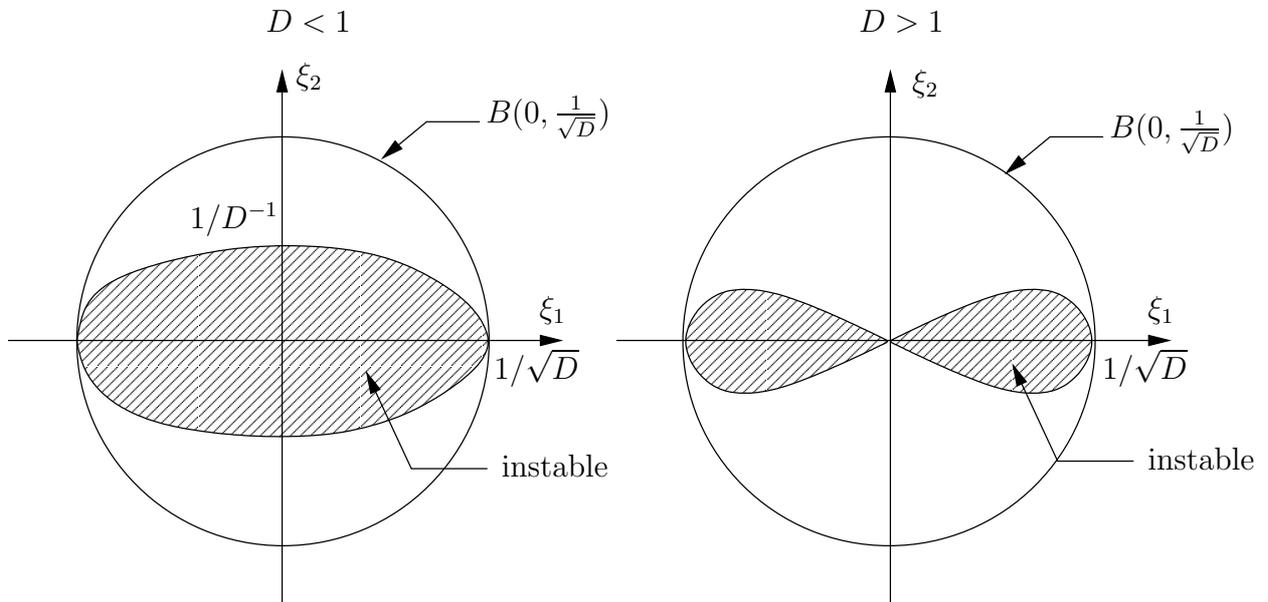


Figure 3.13: Domaine de stabilité: cas d'une diffusion n'agissant que dans la direction  $x_1$

Par conséquent, le modèle striations turbulent est plus stable avec une diffusion anisotrope n'agissant que dans la direction  $x_1$  qu'avec une diffusion isotrope. La diffusion dans la direction  $x_2$  peut déstabiliser le modèle dans certains cas. Dans les cas où la diffusion stabilise le modèle, le domaine de stabilité est plus grand lorsque la diffusion dans la direction  $x_2$  s'annule.

**Exercice 3.7.1** Examiner le cas d'une diffusion anisotrope n'agissant que dans la direction  $x_2$ :  $\bar{D}_1 = 0$ ,  $\bar{D}_2 = D > 0$ .

**Exercice 3.7.2** Reprendre l'analyse de stabilité ci-dessus en supposant que  $u_n = (V, U)$ . Déterminer l'état d'équilibre et réaliser l'analyse de stabilité.

### 3.7.3 Choix de la constante de diffusion et expression générale de l'opérateur de diffusion

Dans cette section, on utilise l'analyse de stabilité du modèle striations turbulent de la section précédente pour proposer une expression de la constante de diffusion. On se placera dans le cas d'un opérateur de diffusion n'agissant que dans la direction  $x_1$  (en se référant à la configuration géométrique de l'exemple 3.7.2), c'est à dire dans une direction perpendiculaire au gradient de densité.

Nous utilisons le principe empirique exposé au début de la section précédente. Soit  $\ell$  l'échelle de longueur d'onde au dessous de laquelle on souhaite que les ondes soient stables. Le nombre d'onde correspondant  $1/\ell$ , doit être tel que tout nombre d'onde supérieur corresponde à un mode stable. Il doit donc satisfaire, en vertu de la conclusion de l'exemple 3.7.2 ci-dessus:

$$\frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{\sqrt{D}},$$

ce qui donne la valeur de  $D$ :

$$D \geq \ell^2.$$

En restituant les échelles  $1/\lambda$  ( $\lambda$  étant la "longueur de gradient" du profil de densité initial), pour le vecteur d'onde et  $|U|\lambda$  ( $U$  étant l'ordre de grandeur du vent de neutres), pour le coefficient de diffusion, on obtient en quantités dimensionnées:

$$D \geq \ell^2 \frac{|U|}{\lambda}. \quad (3.7.35)$$

On rappelle que  $|U|/\lambda$  est le taux de croissance de l'instabilité du modèle striations original pour des ondes se propageant parallèlement à  $x_1$ . La constante de diffusion (3.7.35) correspond donc à une marche au hasard telle que la déviation moyenne pendant le temps  $(|U|/\lambda)^{-1}$  (i.e. l'inverse du taux de croissance de l'instabilité) soit égal à  $\ell$ . Si  $\ell$  est de l'ordre du pas de discrétisation, cela revient à dire que le temps de montée de l'instabilité est comparable au temps de diffusion à travers une maille.

Il nous reste maintenant à traduire ces considérations dans un contexte général, dans lequel la densité possède un profil quelconque, pas nécessairement exponentiel. En toute généralité, il n'y a pas de repère  $(x_1, x_2)$  unique, car la direction du gradient de densité change d'un point à l'autre. En revanche, on peut définir localement la direction du gradient de densité, et donner l'expression d'un opérateur de diffusion qui opère localement dans la direction perpendiculaire à ce gradient. C'est ce que nous nous proposons de faire maintenant.

On définit

$$N = \frac{\nabla n}{|\nabla n|} = \left( \left( \frac{\partial n}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial n}{\partial x_2} \right)^2 \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{\partial n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial n}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$T = -N^\perp = \left( \left( \frac{\partial n}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial n}{\partial x_2} \right)^2 \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{\partial n}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial n}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Le trièdre  $(T, N, e_3)$  est direct.

L'instabilité se développe lorsque  $u_n$  est parallèle et pointe dans la direction opposée au gradient de densité. Ainsi, on a:

- lorsque  $u_n \cdot N > 0$ , le modèle est stable,
- lorsque  $u_n \cdot N < 0$ , le modèle est instable.

On ne souhaite "actionner" la diffusion que pour une situation instable. On multiplie l'opérateur de diffusion par  $H(-u_n \cdot N)$ , où  $H$  est la fonction de Heaviside ( $H(s) = 1$  si  $s > 0$ ,  $H(s) = 0$  si  $s < 0$ ).

L'opérateur de diffusion, que l'on notera  $\mathcal{D}(n)$ , ne doit opérer que dans la direction perpendiculaire au gradient de densité. On prendra donc comme expression:

$$\mathcal{D}(n) = DH(-u_n \cdot N) (T^T d^2 n T),$$

où  $D$  est déterminé par (3.7.35),  $d^2 n$  est la matrice Hessienne de  $n$ :

$$d^2 n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

et  $T^T$  est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne  $T$ . Pour une matrice  $A = (A_{ij})$  et un vecteur  $X = (X_i)$ , on a l'expression  $X^T A X = \sum_{ij} A_{ij} X_i X_j$ . Ainsi:

$$T^T d^2 n T = \left( \left( \frac{\partial n}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial n}{\partial x_2} \right)^2 \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial n}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial n}{\partial x_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial n}{\partial x_1} \frac{\partial n}{\partial x_2} \right).$$

Il s'agit maintenant d'estimer  $|U|$  et  $\lambda$  en fonction des quantités locales. On voit aisément que

$$\frac{1}{\lambda} \approx \frac{|\nabla n|}{n}, \quad |U| \approx |u_n \cdot N|.$$

On obtient donc l'expression finale de  $\mathcal{D}(n)$ :

$$\mathcal{D}(n) = \ell^2 \frac{|\nabla n|}{n} |u_n \cdot N| H(-u_n \cdot N) (T^T d^2 n T). \quad (3.7.36)$$

L'équation de conservation du modèle "striations stabilisé par turbulence" est donc dans le cas général:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = \mathcal{D}(n). \quad (3.7.37)$$

**Exercice 3.7.3** *En prenant pour expression de  $\mathcal{D}(n)$ :*

$$\mathcal{D}(n) = D(T^T d^2 n T),$$

*montrer que le profil exponentiel (3.6.7) est encore solution d'équilibre du modèle striations (3.7.37), (3.7.11)-(3.7.13). Montrer que l'équation des perturbations du premier ordre (quantités indexées par 1) est inchangée par rapport à (3.7.28) (dans laquelle  $\bar{D}_1 = D$ ,  $\bar{D}_2 = 0$ ). En déduire que les conclusions de l'analyse de stabilité linéarisée de l'exemple 3.7.2 s'étendent sans changement au modèle (3.7.37), (3.7.11)-(3.7.13).*

### 3.7.4 Conclusion

Une constante de diffusion a la dimension physique du produit d'une vitesse par une longueur. Pour déterminer la constante de diffusion associée à la turbulence, il faut donc déterminer deux échelles caractéristiques de cette turbulence: une échelle de vitesse et une échelle de longueur, ou, ce qui est équivalent, une échelle de temps et une échelle de longueur (puisqu'on peut construire une échelle de vitesse à partir de ces deux échelles).

L'analyse de stabilité permet de déterminer une échelle de temps (typiquement le temps de croissance de l'instabilité  $\lambda|U|$ ). Cependant, l'échelle de longueur reste indéterminée et a été prise égale (faute d'une meilleure idée) à l'échelle la plus petite que l'on souhaite décrire par la simulation numérique. La situation est la même qu'en mécanique des fluides pour le modèle dit de la longueur de mélange (dans ce modèle, l'échelle de longueur, la "longueur de mélange", est choisie sur la base de considérations expérimentales). Or des modèles plus sophistiqués (comme le modèle  $K-\varepsilon$ ) ont été établis en mécanique des fluides où, plutôt que fixer la valeur de cette longueur de mélange, on cherche à en modéliser l'évolution (ou l'évolution de quantités associées) grâce à de nouvelles équations.

La même méthodologie pourrait s'appliquer ici: On pourrait chercher à établir une équation portant sur les valeurs moyennes de certaines fluctuations, lesquelles donneraient accès à l'échelle caractéristique qui nous manque. Ce programme est l'objet de recherches en cours.

# Chapter 4

## Décharges sur les satellites

### 4.1 Présentation du problème

Afin de s'alimenter en énergie les satellites sont dotés de panneaux solaires. Ces panneaux sont formés de chaînes (“strings”) de cellules photoélectriques. Chaque string est composée de plusieurs dizaines de cellules mises en série et délivre des tensions de l'ordre de 50 Volts. Ces strings sont ensuite reliées en parallèle afin d'obtenir les puissances voulues.

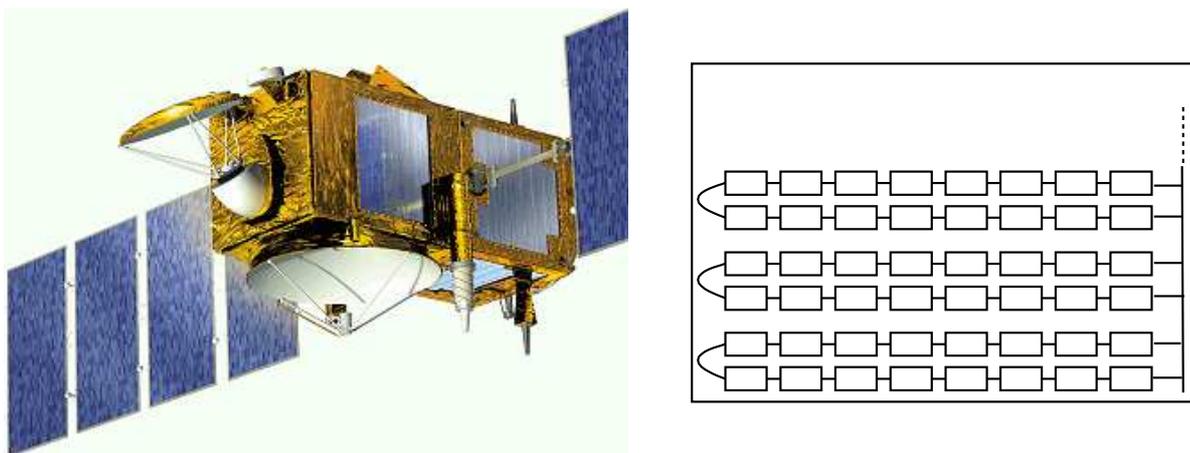


Figure 4.1: Panneaux solaires

Pour augmenter la charge des satellites, et ainsi répondre aux besoins de leurs clients, les constructeurs sont amenés à augmenter la tension d'opération du générateur. Pour cela, ils augmentent le nombre de cellules par string passant à 70 voire 100 Volts.

Or lorsque cette tension dépasse le seuil de 50 Volts, des phénomènes d'arcs électriques apparaissent. Ces derniers sont parfois suffisamment importants pour court-circuiter le panneau solaire. Le satellite subit alors des pertes d'énergie importantes.

Face à ces problèmes, les industriels souhaitent développer des mesures préventives dont l'efficacité passe par une bonne compréhension des phénomènes physiques entrant en jeu. La com-

plexité de ces derniers impose une validation des mécanismes retenus par une modélisation mathématique.

Nous verrons que le scénario physique du claquage se décompose essentiellement en deux grandes étapes. Il y a tout d'abord établissement d'une décharge dite primaire qui génère un plasma haute densité. Ce plasma permet alors, sous certaines conditions, l'apparition d'un arc électrique dit secondaire qui conduit à la panne du générateur.

C'est la modélisation de la décharge primaire que nous nous proposons de présenter dans ce chapitre.

Nous commençons par présenter, dans le paragraphe 4.2, le scénario du claquage dans sa globalité, nous détaillons alors plus spécialement les processus physiques entrant en jeu dans la décharge primaire puisque c'est ce phénomène que nous nous proposons d'étudier. Nous en profitons également pour donner quelques ordres de grandeur des entités physiques considérées. Nous continuons en présentant dans le paragraphe 4.3 l'équation de Vlasov qui est le point de départ à toutes les modélisations présentées ici.

Les trois paragraphes suivants 4.4 à 4.6 présentent la dérivation de trois modélisations possibles de cette décharge primaire. Nous commençons par le niveau le plus microscopique présenté ici : l'équation de Boltzmann. Nous continuons par une description un peu plus grossière qui nous amène au modèle SHE (Spherical Harmonic Expansion). Enfin, nous terminons par le niveau le plus macroscopique, que nous considérons, avec le modèle d'énergie-transport.

Nous terminons ce chapitre par la présentation de simulations numériques des modèles présentés précédemment.

## 4.2 Le scénario du claquage

### 4.2.1 Le processus global

Avant de détailler les processus physiques du claquage nous commençons par décrire la géométrie d'une cellule photoélectrique.

Une cellule est composée d'une couche de semi-conducteur recouverte par une couche de diélectrique. Elle est collée sur le panneau solaire constitué d'un isolant (Kapton). Les cellules d'une même string sont reliées entre elles par un interconnecteur métallique comme le montre la Figure 4.2. Le scénario du claquage semble se dérouler en plusieurs étapes (voir [7], [26], [13]) :

1. Il y a apparition d'une décharge électrostatique, dite **décharge primaire**, due à un phénomène de charge différentielle : le diélectrique est à un potentiel plus élevé de plusieurs centaines de Volts (de 500 à 1000 V) par rapport à l'interconnecteur métallique. Au niveau du point triple (jonction métal, diélectrique et vide) une augmentation locale du champ électrique provoque une émission d'électrons par effet de champ renforcé. Ces électrons vont avancer le long de la paroi du diélectrique et tenter de neutraliser le potentiel positif du sommet du diélectrique.
2. Cette décharge primaire crée un plasma de haute densité. Nous considérons que la présence d'ions est due à :

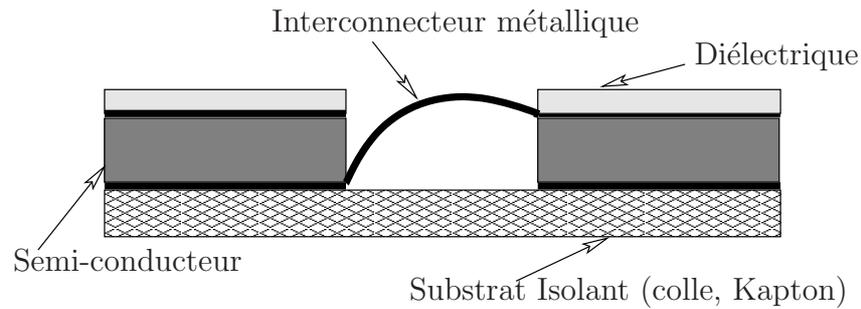


Figure 4.2: Cellule photoélectrique

- (a) Une désorption de neutres stimulée par bombardement électronique. En effet lors de sa mise en orbite le satellite emporte avec lui des molécules présentes dans notre atmosphère (essentiellement de l'eau) qui sont adsorbées par les matériaux, c'est à dire retenue en surface. En collisionnant avec la surface du diélectrique les électrons libèrent ces molécules de neutres.
- (b) Les électrons et les neutres collisionnent créant ainsi des ions.

Les électrons proviennent de différents phénomènes :

- (a) de l'émission par effet de champ,
  - (b) de l'ionisation des neutres,
  - (c) de l'émission secondaire électronique. En collisionnant avec la paroi, les électrons peuvent arracher soit des neutres soit des électrons secondaires.
3. Si la décharge a lieu suffisamment près de l'intervalle (gap) séparant deux cellules entre lesquelles la différence de potentiel est supérieure à un certain seuil (de l'ordre de 50 V selon les mesures expérimentales), un arc électrique dit **arc secondaire** se crée.
  4. Cet arc alimenté par les strings concernées du générateur débite pendant un temps suffisamment long pour détériorer les matériaux alentour. Un pont conducteur se crée et toute la string est alors court-circuitée.

### 4.2.2 La décharge primaire

Nous rappelons que nous nous limitons ici à l'étude de la décharge primaire. En effet bien que le but final soit la compréhension de l'établissement de l'arc secondaire, il est important, dans un premier temps, de mieux connaître le plasma généré par l'arc primaire. De ses propriétés dépendra le choix du modèle de l'arc secondaire.

Nous allons donc détailler dans ce paragraphe essentiellement les points 1 et 2 du scénario présenté précédemment qui concernent le mouvement des électrons.

La géométrie du phénomène est tridimensionnelle mais un code 3 –  $D$  est très coûteux. C’est pourquoi nous nous limiterons à une étude bidimensionnelle. Les deux directions considérées sont les directions transverse et parallèle à la paroi comme le montre la Figure 4.3.

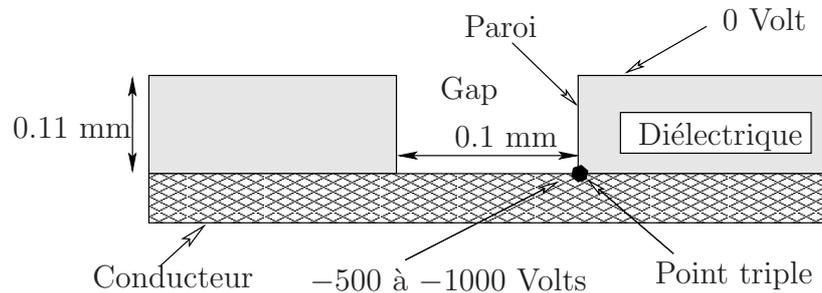


Figure 4.3: Géométrie modèle

Reprenons donc les points 1 et 2 du scénario.

Une différence de potentielle entre le diélectrique et l’interconnecteur métallique est à l’origine d’un effet de champ renforcé au point triple. Ce courant électronique est donné par la formule de Fowler-Nordheim

$$j(x = 0) = A |E(x = 0)|^2 \exp\left(-\frac{B}{|E(x = 0)|}\right) \quad (4.2.1)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions du travail d’extraction du matériau et  $E(x = 0)$  est le champ électrique au point triple. Nous considérons de plus que la présence d’irrégularités sur la surface émettrice renforce cet effet d’émission. C’est pourquoi nous introduisons un facteur  $\beta$  dont la valeur est fixée de façon empirique. Nous remplaçons alors  $|E|$  par  $\beta |E|$ .

Lorsque ces électrons sont émis à partir du point triple (en fait dans une région voisine du point triple), ils sont accélérés par la différence de potentiel et vont donc rejoindre le sommet du diélectrique afin de neutraliser cette DDP. Au court de leur trajet il sont attirés par la paroi par un champ transverse dû à la différence de potentiel entre les deux cellules entre lesquelles ils effectuent leur mouvement. Ils vont alors collisionner avec cette paroi et repartir dans le gap séparant les deux cellules pour être à nouveau attirés contre la paroi... Il y a donc un phénomène de rebonds comme l’illustre la Figure 4.4. En rebondissant les électrons arrachent parfois, s’ils ont suffisamment d’énergie pour le faire, des électrons. Ce processus s’appelle l’émission secondaire par impact électronique.

Nous nous attacherons dans les paragraphes suivants à modéliser mathématiquement ces phénomènes.

### 4.2.3 Quelques ordres de grandeur

Nous donnons dans ce paragraphe quelques grandeurs caractéristiques du problème.

L’épaisseur du diélectrique, c’est à dire la taille du domaine dans la direction parallèle à la paroi, est de l’ordre d’une fraction du millimètre, plus précisément de  $10^{-4}$  mètre. La différence de

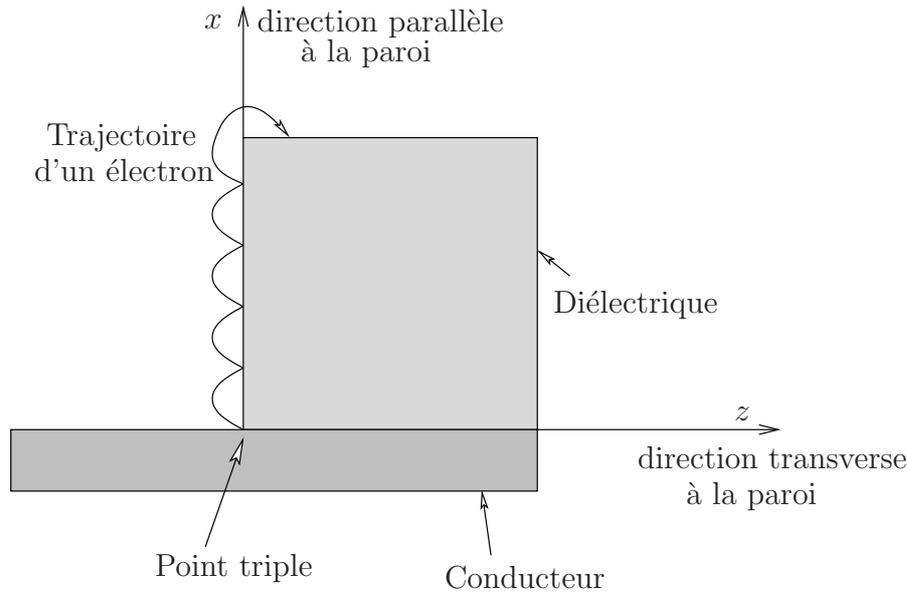


Figure 4.4: Phénomène de rebonds

potentiel entre le point triple et le sommet du diélectrique est quant à elle de 500 à 1000 Volts. Nous avons donc à l'instant initial une composante parallèle du champ valant de  $5 \cdot 10^6$  à  $10^7$  Volts/mètre.

Nous verrons par la suite que nous utilisons la petitesse du rapport entre les longueurs caractéristiques transverse et parallèle afin d'en déduire un modèle asymptotique. Essayons donc d'évaluer l'épaisseur du plasma, c'est à dire la taille du domaine dans la direction transverse. Notons  $|E_T|$  la magnitude du champ subi par les particules chargées dans la direction transverse. En pratique ce champ sera de l'ordre de  $10^7$  Volts par mètre. Nous supposons que le potentiel est affine, ce qui revient à négliger le champ généré par les particules. Nous notons  $z$  la variable transverse et nous considérons la paroi en  $z = 0$ . Comme nous l'avons déjà décrit dans le scénario, les particules partent dans la direction des  $z < 0$  avec une certaine énergie  $\varepsilon$ . Elles sont ensuite rappelées par le champ transverse vers la paroi. Il existe donc un point de retournement, dans le domaine  $z < 0$ , que nous noterons  $Z$ . En ce point la vitesse est nulle, puisque l'électron rebrousse chemin. Nous écrivons la conservation de l'énergie transverse, nous avons :

$$-e\psi(Z) = -e\psi(0) + \varepsilon$$

où  $e > 0$  est la charge élémentaire. Nous rappelons que  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb. De plus  $\psi$  est le potentiel transverse. Nous supposons que l'origine des potentiels est en 0, donc  $\psi(z) = |E_T|z$ . Ceci donne alors

$$Z = -\frac{\varepsilon}{e|E_T|},$$

$\varepsilon$  étant exprimée en Joules. Cette énergie transverse sera de l'ordre de l'électron-Volt (eV). Nous rappelons que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Joule.

L'ordre de grandeur de l'épaisseur du plasma est donc donné par  $|Z|$  et vaut

$$|Z| \approx 10^{-7} \text{ mètre.}$$

Notons que c'est 1000 fois plus petit que la longueur caractéristique dans la direction parallèle. Il peut être aussi intéressant d'évaluer l'échelle de temps relative au problème. Pour cela nous allons essayer de déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire à un électron pour aller de la cathode (le point triple) vers l'anode (le sommet du diélectrique). En écrivant la conservation de l'énergie, entre  $x = 0$ , la cathode et un point  $x$  le long du diélectrique, nous obtenons

$$u_e(x) \approx \sqrt{2e(\phi(x) - \phi(0))/m_e + |u_e(0)|^2}$$

en notant  $u_e$  la vitesse de cet électron,  $m_e$  la masse de l'électron qui est de  $9,1 \cdot 10^{-31}$  kg et  $\phi$  le potentiel parallèle.

Nous considérons, là encore, un potentiel affine égal à  $\phi(x) = \phi(0)(-x/L + 1)$  où  $L$  est la longueur du diélectrique et vaut environ 0,1 mm et avec une différence de potentiel de 500 Volts entre la cathode et l'anode donc  $\phi(0) = -500$  Volts. Nous supposons de plus que la vitesse en  $x = 0$  de l'électron est égale à sa vitesse thermique et que sa température est celle de la surface du diélectrique notée  $T_{surf}$ . Nous la considérons de l'ordre de 300 Kelvins.

Nous obtenons

$$u_e(x) \approx \sqrt{\frac{2e\phi(0)x}{Lm_e} + \frac{2k_B T_{surf}}{m_e}},$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann. Sa valeur est

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Joule/Kelvin.} \quad (4.2.2)$$

Remarquons que la vitesse thermique initiale est très petite devant la vitesse acquise dans le champ. En effet celle ci est de l'ordre de  $10^{-23} \cdot 10^2 / 10^{-30} \text{ m/s}$  c'est à dire  $10^9 \text{ m/s}$ , alors que la vitesse acquise dans le champ est de l'ordre de  $10^{-19} \cdot 10^3 / 10^{-30} \text{ m/s}$  c'est à dire  $10^{14} \text{ m/s}$  (en considérant  $x$  et  $L$  du même ordre de grandeur). La vitesse thermique est donc négligeable, et

$$u_e(x) \approx \sqrt{\frac{2e\phi(0)x}{Lm_e}}.$$

Le temps mis par un électron, ne subissant aucune collision, pour remonter du point triple au sommet du diélectrique est ainsi donné par :

$$t \approx \int_0^L \frac{1}{u_e(x)} dx = \sqrt{\frac{m_e L}{e|\phi(0)|}} \sqrt{2L} \approx 10^{-11} \text{ s.}$$

Le temps de transit d'un électron est donc de l'ordre de 10 picosecondes.

## 4.3 Le modèle de base : l'équation de Vlasov

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'équation de Vlasov qui est le point de départ à toutes les modélisations que nous présentons dans ce chapitre.

### 4.3.1 Introduction

Pour décrire le mouvement de particules chargées dans un milieu, plusieurs approches sont possibles :

- La première envisageable est l'approche corpusculaire. C'est le niveau le plus fin de description que nous considérons. Cette description se situe au niveau microscopique.

Soient  $N$  particules. Supposons que la  $i^{\text{ème}}$  particule subit une force  $F_i(X_i(t), V_i(t), t)$ , où  $t$  est le temps,  $X_i(t)$  et  $V_i(t)$  sont les position et vitesse de cette particule au temps  $t$ . Notons  $m_i$  la masse de la particule  $i$ . Alors les équation de Newton donnent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X_i(t) = V_i(t), \\ m_i \frac{d}{dt}V_i(t) = F_i(X_i, V_i, t). \end{cases}$$

Remarquons que  $F_i$  peut aussi dépendre des positions et vitesses des autres particules, si on considère des collisions entre particules.

Il faut alors résoudre un système différentiel de taille  $6N$ .

En pratique ce modèle est inutilisable car le nombre de particules peut être gigantesque, de l'ordre du nombre d'Avogadro  $\mathcal{N} = 10^{23}$ .

- La deuxième approche envisageable est l'approche fluide. C'est la description la plus grossière, elle se situe au niveau macroscopique.

Elle consiste à considérer les particules dans leur ensemble. Ces dernières sont décrites par des entités macroscopiques comme la densité de particule  $n(x, t)$  ou encore la vitesse moyenne des particules  $u(x, t)$ .  $n(x, t)$  représente le nombre de particules par unité de volume au voisinage de la position  $x$  et au temps  $t$ . Notons que les vitesses des particules autour de  $x$  et au temps  $t$  ne sont pas forcément colinéaires à  $u$  puisque c'est une moyenne. On néglige l'agitation des particules. Dans certains modèles, on mesure cette agitation par la température qui représente l'écart type par rapport à la vitesse moyenne.

$n$  et  $u$  peuvent être solutions du système suivant (Euler isentropique en dimension un)

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \\ m \left[ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2)}{\partial x} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

où  $m$  est la masse des particules considérées et  $p$  est la pression. Des hypothèses supplémentaires sont alors nécessaires pour fermer le système (donner une expression à  $p$ ). Par

exemple dans le cas d'une détente adiabatique  $p = p(n) = C n^\gamma$  où  $\gamma > 1$  et  $C$  sont donnés, ou sous l'hypothèse d'un modèle isotherme  $p = nT$  où  $T$ , la température, est supposée constante.

Les équations ci dessus traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement des particules.

- Il existe des situations où l'approche fluide n'est plus valable, par exemple lorsque les écarts par rapport à la vitesse moyenne sont importants dans la physique du phénomène étudié. Dans ces cas là, on peut utiliser la description cinétique.

Les particules sont représentées par une fonction de distribution  $f(x, v, t)$  où  $t$  est le temps,  $x$  la position et  $v$  la vitesse. Ce sont trois variables indépendantes. La vitesse n'est plus une fonction de la position et du temps comme dans la description précédente.  $f(x, v, t) dx dv$  est alors le nombre de particules situées dans le domaine  $[x, x + dx]$  avec une vitesse dans  $[v, v + dv]$  au temps  $t$ .

Il est possible de relier  $f$  aux quantités macroscopiques considérées dans l'approche fluide. Pour connaître la densité en un point  $x$  il suffit de compter les particules se situant dans le voisinage de  $x$ . On a ainsi :

$$n(x, t) = \int f(x, v, t) dv.$$

De même, la vitesse moyenne est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{n(x, t)} \int v f(x, v, t) dv.$$

Nous allons dans ce chapitre étudier plus en détails la dernière approche, c'est à dire l'approche cinétique.

### 4.3.2 Équation de Vlasov

Considérons une population de particules de masse  $m$  soumises à un champ de forces  $F(x, v, t)$  où  $x \in \mathbb{R}^3$  représente la variable d'espace,  $v \in \mathbb{R}^3$  la variable vitesse et  $t \in \mathbb{R}^+$  le temps.  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$  est appelé l'espace des phases.

On cherche à déterminer quelle équation vérifie la fonction de distribution  $f$ .

On écrit les équations de Newton pour les particules se trouvant à la position  $x$  et ayant la vitesse  $v$  à l'instant  $s$ , afin de déterminer quel chemin elles empruntent. On note  $z = (x, v)$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(t; z, s) = \left( X(t; z, s), V(t; z, s) \right), \\ \frac{d}{dt} Z(t; z, s) = a(Z(t; z, s), t) = \left( \begin{array}{c} V(t; z, s) \\ \frac{1}{m} F(Z(t; z, s), t) \end{array} \right) \\ Z(s; z, s) = z. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+, \\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+, \end{array} \quad (4.3.3)$$

$(X(t; z, s), V(t; z, s))$  sont les caractéristiques, elles représentent la position et la vitesse des particules au temps  $t$  sachant qu'au temps  $s$  elles étaient en  $z = (x, v)$ .

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $T > 0$ , on note

$$L^\infty(0, T; \text{Lip}(\mathbb{R}^d)) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} ; \sup_{\substack{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2d} \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|f(z_1, \cdot) - f(z_2, \cdot)|}{|z_1 - z_2|} \in L^\infty([0, T]) \right\},$$

l'ensemble des fonctions  $f(z, t)$  globalement Lipschitz par rapport à  $z$  uniformément par rapport à  $t$ .

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.3.1** *Soit  $T > 0$ , on suppose que  $F \in L^\infty(0, T; \text{Lip}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3))$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{R}^6$  et tout  $s \in [0, T]$ , il existe une unique solution de (4.3.3) sur  $[0, T]$ .*

**Exercice 4.3.1** (\*\*) *Démontrez le théorème 4.3.1.*

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ ,  $T > 0$  et  $s \in [0, T]$ , on définit, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\Omega(t) = \left\{ Z(t; x, v, s) ; z \in \Omega \right\}.$$

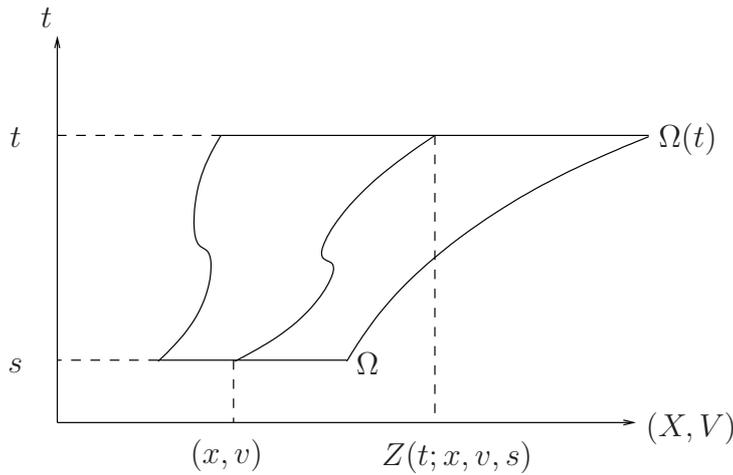


Figure 4.5: Courbes caractéristiques

Notons que les caractéristiques ne se coupent pas car ceci contredirait l'unicité de la solution de (4.3.3) au point d'intersection (voir Figure 4.5).

On écrit alors que le nombre de particules est conservé au cours du temps, c'est à dire la conservation de  $f$ . On note, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{C}(t) = \int_{\Omega(t)} f(x', v', t) dx' dv' \tag{4.3.4}$$

et on doit avoir  $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ .

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour tout  $(s, t) \in [0, T]^2$  la fonction

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \Omega(t) \\ z = (x, v) &\mapsto Z(t; z, s) = \left( X(t; z, s), V(t; z, s) \right). \end{aligned}$$

est une bijection et sa réciproque est donnée par

$$\begin{aligned} \Omega(t) &\rightarrow \Omega \\ z' = (x', v') &\mapsto Z(s; z', t) = \left( X(s; z', t), V(s; z', t) \right). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Si l'on suppose de plus que  $F \in C^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$ , la fonction précédente définit donc un changement de variables qu'on utilise dans (4.3.4).

On a  $z' = Z(t; z, s)$  et on note  $\mathcal{J}_z(t; z, s) = (\partial Z_i(t; z, s)/\partial z)_{1 \leq i \leq 6}$  la jacobienne de cette transformation, où  $\partial Z_i/\partial z = (\partial Z_i/\partial z_1, \dots, \partial Z_i/\partial z_6)^T$ .

Ainsi

$$\mathcal{C}(t) = \int_{\Omega} f\left(Z(t; z, s), t\right) |\det(\mathcal{J}_z(t; z, s))| dz.$$

### Exercice 4.3.2 (\*\*)

1. Montrez que

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{J}_z(t; z, s)) = \operatorname{div}_{Za} \left( Z(t; z, s), t \right) \det(\mathcal{J}_z(t; z, s)). \quad (4.3.6)$$

On pourra utiliser (4.3.3) ainsi que le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{J}_z(t; z, s)) = \sum_{i=1}^6 \det \left[ \frac{\partial Z_1(t; z, s)}{\partial z}, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial Z_i(t; z, s)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial Z_6(t; z, s)}{\partial z} \right].$$

2. Dédurre de (4.3.6) que  $\det(\mathcal{J}_z(t; z, s)) > 0$  et que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t) &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + V(t; x, v, s) \cdot \nabla_X f + \frac{1}{m} F \cdot \nabla_V f \right. \\ &\quad \left. + \frac{f}{m} \operatorname{div}_V F \right] \left( Z(t; z, s), t \right) \det(\mathcal{J}_z(t; z, s)) dz. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables inverse de (4.3.5), dans l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t) &= \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t}(x', v', t) + v' \cdot \nabla_x f(x', v', t) + \frac{1}{m} F(x', v', t) \cdot \nabla_v f(x', v', t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} f(x', v', t) \operatorname{div}_v F(x', v', t) \right] dx' dv'. \end{aligned}$$

On doit avoir  $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ , pour cela il faut et il suffit que  $f$  vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} F \cdot \nabla_v f + \frac{1}{m} f \operatorname{div}_v F = 0, \quad (4.3.7)$$

presque partout sur  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T]$ .

Cette équation s'appelle l'équation de Vlasov.

### 4.3.3 Quelques exemples

Le premier exemple que nous donnons est celui de particules chargées baignées dans un champ électromagnétique. On néglige le champ créé par les particules.

On note  $E$  et  $B$  les champs électrique et magnétique. Ils ne dépendent que des variables espace et temps  $x$  et  $t$ . On a alors

$$F(x, v, t) = q E(x, t) + q v \times B(x, t),$$

si  $q$  est la charge de chaque particule et où  $\times$  désigne le produit vectoriel.

Dans ce cas  $\operatorname{div}_v F = 0$  et (4.3.7) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} F \cdot \nabla_v f = 0. \quad (4.3.8)$$

Le deux exemples suivants sont des extensions du précédent.

Le premier est celui de Vlasov-Poisson. On considère là encore une population de particules chargées soumise à une force électrostatique due à un champ extérieur. De plus, on tient compte de l'influence de ces charges sur le champ.

On définit la densité de particules

$$n(x, t) = \int f(x, v, t) dv.$$

$F$  est alors donnée par le modèle de Vlasov-Poisson

$$F(x, v, t) = q E(x, t), \quad E(x, t) = -\nabla_x \phi(x, t), \quad -\Delta_x \phi(x, t) = \frac{q}{\varepsilon} n(x, t),$$

où  $q$  est la charge des particules,  $\phi$  est le potentiel électrostatique et  $\varepsilon$  est la permittivité du milieu dans lequel baignent les particules. Dans beaucoup d'application on considère le vide et

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ Farad/mètre.}$$

Comme là encore  $\operatorname{div}_v F = 0$ ,  $f$  est solution de (4.3.8).

Le dernier exemple que nous présentons est celui de Vlasov-Maxwell. Ce modèle est relativiste, c'est pourquoi on écrit Vlasov à l'aide de la quantité de mouvement notée  $p$  :

$$\frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + v(p) \cdot \nabla_x f(x, p, t) + \frac{1}{m} F(x, p, t) \cdot \nabla_p f(x, p, t) = 0,$$

où  $v$  est la vitesse relativiste donnée par

$$v(p) = \frac{p}{\sqrt{m^2 + |p|^2/c^2}},$$

$c$  étant la vitesse de la lumière.

$F$  est une force électromagnétique donnée par

$$F(x, p, t) = q E(x, t) + q v(p) \times B(x, t),$$

$E$  et  $B$  étant respectivement les champs électrique et magnétique ils sont donnés par les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot} B &= -\frac{q}{\varepsilon_0} j, & \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E &= 0, \\ \operatorname{div}_x E &= \frac{q}{\varepsilon_0} n, & \operatorname{div}_x B &= 0, \end{aligned}$$

où  $n$  est la densité de particules et  $j$  est le flux de particules, ils sont donnés par :

$$n(x, t) = \int f(x, v, t) dv, \quad j(x, t) = \int v f(x, v, t) dv.$$

#### 4.3.4 Prise en compte des collisions

Dans l'équation de Vlasov, on a perdu le fait que dans un petit volume, il peut y avoir des mouvements dus à l'interaction des particules entre elles. De plus ces particules peuvent entrer en collision avec des obstacles fixes.

L'équation de Vlasov n'est alors plus valide car le nombre de particules n'est pas conservé pendant le transport. Elle est alors remplacée par l'équation cinétique suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} F \cdot \nabla_v f + \frac{1}{m} f \operatorname{div}_v F = Q(f), \quad (4.3.9)$$

où  $Q$  est un opérateur de collision. Il peut être modélisé de différentes façons, par exemple en utilisant le noyau de Boltzmann.

Pour plus de détails, on pourra se référer entre autre à [8] ou [9].

#### 4.3.5 Prise en compte des conditions aux limites

Il nous reste à déterminer quelles conditions aux limites doit on considérer dans le cas où  $x$  varie dans un domaine "borné".

On se place tout d'abord dans le cas  $x \in ]0, +\infty[$  et  $F = 0$ . Dans ce cas (4.3.7) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (4.3.10)$$

avec  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $v \in \mathbb{R}$  et  $t \geq 0$ .

On se donne de plus une condition initiale

$$f(x, v, 0) = f_0(x, v), \quad (4.3.11)$$

pour tout  $(x, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

Les caractéristiques sont alors données par

$$\begin{cases} X(s; x, v, t) = v(s - t) + x, \\ V(s; x, v, t) = v. \end{cases}$$

pour tout  $(x, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

Pour déterminer la solution en un point  $(x, v)$  de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  on doit aller chercher, si cela est possible, la condition initiale au pied de la caractéristique c'est à dire au point  $(x - vt, v)$ . Notons que si  $v \leq 0$  alors comme  $x > 0$ , on a toujours  $x - vt > 0$  par contre pour tout  $v > 0$  il existe une infinité de points  $(x, t)$  de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  tels que  $x - vt < 0$ . Dans ces cas là, la courbe caractéristique  $(s, X(s))$  sort du domaine et coupe le bord en un temps  $t_s > 0$ .

On voit donc qu'il est nécessaire de se donner une condition aux limites en  $x = 0$  seulement pour les vitesses positives. C'est à dire pour les particules entrant dans le domaine.

Donc dans notre cas particulier pour fermer le système on doit rajouter à (4.3.10), (4.3.11) la condition aux limites suivante

$$f(0, v, t) = f_b(v, t)$$

pour tout  $v \geq 0$  et tout  $t \geq 0$ .

Dans le cadre générale, c'est à dire où  $x \in \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) et où  $F \neq 0$ , on considère (4.3.7) sur un domaine  $\Omega$  qui n'est pas  $\mathbb{R}^d$ . On note  $\partial\Omega$  sa frontière et  $\mathbf{n}$  la normale à  $\partial\Omega$  extérieure à  $\Omega$ .

Alors la condition aux limites s'écrit

$$f(x, v, t) = f_b(x, v, t)$$

pour tout  $x \in \partial\Omega$ , tout  $v \in \mathbb{R}^d$  tel que  $v \cdot \mathbf{n} \leq 0$  et tout  $t \geq 0$ .

### 4.3.6 Propriétés de l'équation de Vlasov

Nous allons dans ce paragraphe donner quelques propriétés de l'équation de Vlasov. Donner tous les résultats connus sur cette équation nécessiterait largement un cours entier. Comme le but de ce cours n'est pas là, le lecteur pourra se référer par exemple à [2], [5], [21] pour de plus amples informations et une plus large bibliographie.

On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} F \cdot \nabla_v f = 0, \\ f(x, v, 0) = f_0(x, v), \end{cases} \quad (4.3.12)$$

en supposant que  $\operatorname{div}_v F = 0$ .

La première question que l'on peut se poser est : Existe-t-il des solutions à (4.3.12) ?

On a tout d'abord le résultat suivant

**Théorème 4.3.2 (Solution classique)** Soit  $T > 0$ . On suppose  $F \in L^\infty(0, T; \text{Lip}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)) \cap C^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$ , et  $f_0 \in C^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$ . Alors il existe une unique solution  $f \in C^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$  donnée par

$$f(x, v, t) = f_0\left(X(0; x, v, t), V(0; x, v, t)\right)$$

**Exercice 4.3.3** (★★) Démontrez le théorème précédent.

Pour démontrer l'existence il suffit de vérifier que la fonction donnée précédemment est bien solution.

En ce qui concerne l'unicité, le problème étant linéaire, il suffit de montrer que toute solution avec condition initiale nulle est nulle. Pour cela, "on remonte les caractéristiques".

Soit  $f$  une solution de (4.3.12) avec  $f_0 \equiv 0$ , on pose

$$\psi(t) = f\left(X(t; x, v, 0), V(t; x, v, 0), t\right)$$

on montre alors que  $\psi$  est constante, en utilisant l'équation, et donc nulle d'après la condition initiale.

Remarquons alors qu'en multipliant (4.3.12) par une fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{R}^+)$  et en intégrant par par partie, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times \mathbb{R}^+} f(x, v, t) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, v, t) + v \cdot \nabla_x \varphi(x, v, t) + F(x, v, t) \cdot \nabla_v \varphi(x, v, t) \right) dx dv dt & \quad (4.3.13) \\ + \int_{\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3} f_0(x, v) \varphi(x, v, 0) dx dv & = 0. \end{aligned}$$

Notons alors qu'il n'est pas nécessaire que  $f$  et  $f_0$  soit  $C^1$  pour que cette égalité ait un sens. On définit donc une notion de solution faible de la façon suivante

**Définition 4.3.3** Soit  $T > 0$ . On suppose  $f_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$  et  $F \in L^\infty(0, T; \text{Lip}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)) \cap C^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$ . On dit que  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$  est solution faible de (4.3.12) si  $f$  vérifie pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$  l'égalité (4.3.13).

**Remarque 4.3.1** 1. La régularité de  $F$  est utile non pas pour donner un sens à la formulation faible (4.3.13), mais pour pouvoir définir de façon globale les caractéristiques.

2. Toute solution classique est bien-sur solution faible.

3. Réciproquement, si  $f$  vérifie (4.3.13) alors elle est solution de (4.3.12) au sens des distributions.

On montre alors le résultat suivant

**Théorème 4.3.4 (Solution faible)** On suppose  $f_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$  et  $F \in L^\infty(0, T; \text{Lip}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)) \cap C^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3 \times [0, T])$ . Alors, il existe une unique solution faible de (4.3.12) définie par

$$f(x, v, t) = f_0\left(X(0; x, v, t), V(0; x, v, t)\right).$$

**Exercice 4.3.4** (★★) *Démontrez le théorème précédent. On procède de la même façon que pour la solution classique. Pour démontrer l'unicité on utilise en plus le résultat suivant*

**Lemme 4.3.5** *Soient  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  vérifiant  $\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \psi(y) dy = 0$ , pour tout  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors  $f = 0$  pp sur  $\mathbb{R}^d$ .*

## 4.4 Limite dans un potentiel de surface

On cherche dans ce paragraphe à modéliser mathématiquement le mouvement des électrons au cours du processus physique décrit dans le scénario donné au paragraphe 4.2.

On rappelle que l'on s'intéresse au mouvement d'électrons soumis à un champ dans un domaine limité par une paroi. On considère un champ parallèle et un champ transverse à la paroi. Ce dernier rappelle les électrons contre la paroi. Comme nous l'avons déjà décrit dans le paragraphe 4.2, la présence du champ transverse confine les électrons contre la paroi. Le rapport entre les échelles spatiale transverse et parallèle est donc très petit. On utilise cette disproportion pour obtenir un modèle limite moins coûteux qu'une description purement cinétique.

### 4.4.1 Notations et modèle de base

Nous noterons  $x = (\underline{x}, z)$  la variable d'espace et  $v = (\underline{v}, v_z)$  la variable de vitesse.  $z$  et  $v_z$  sont les variables transverses et  $\underline{x} = (x_1, x_2)$  et  $\underline{v} = (v_1, v_2)$  les variables parallèles. On considère que la paroi est située dans le plan  $z = 0$  et que les électrons se déplacent dans le domaine  $\{(\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^3 ; z < 0\}$ . Remarquons que dans un premier temps, on traite un problème sans conditions aux limites dans la direction parallèle (voir Figure 4.6).  $E$  désignera le champ

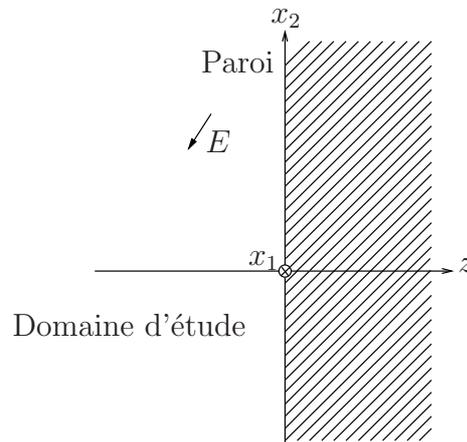


Figure 4.6: Domaine d'étude

électrique et  $\phi$  le potentiel, ils sont reliés par la relation :

$$E(x, t) = -\nabla_x \phi(x, t),$$

où  $t$  désigne le temps.

Il sera parfois utile de considérer  $z = 0$  comme origine des potentiels dans la direction  $z$ , on introduit donc pour tout  $x = (\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$  et tout  $t \in \mathbb{R}^+$  :

$$\psi(\underline{x}, z, t) = \phi(x, t) - \phi((\underline{x}, 0), t), \quad (4.4.14)$$

et on notera  $\phi_0(\underline{x}, t) = \phi((\underline{x}, 0), t)$ .

Afin d'avoir un champ attracteur pour les électrons, on fait les hypothèses suivantes sur le potentiel :

**Hypothèses 4.4.1** Pour tout  $(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  la fonction 
$$\begin{array}{ccc} z & \longmapsto & \phi((\underline{x}, z), t) \\ \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$
 est strictement croissante, continue et  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi((\underline{x}, z), t) = -\infty$ .

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 4.3, on représente l'ensemble des particules (ici les électrons) par une fonction de distribution  $f(x, v, t)$  où  $x$ ,  $v$ , et  $t$  sont des variables indépendantes.

On rappelle que  $f(x, v, t) dx dv dt$  est le nombre de particules situées dans le domaine  $[x, x + dx]$  avec une vitesse dans  $[v, v + dv]$  au temps  $t$ .

Alors  $f$  est solution de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, v, t) + v \cdot \nabla_x f(x, v, t) + \frac{e}{m} \nabla_x \phi(x, t) \cdot \nabla_v f(x, v, t) = Q(f)(x, v, t), \quad (4.4.15)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ , tout  $v \in \mathbb{R}^3$  et tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , où  $e$  représente la charge élémentaire positive ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb) et  $m$  est la masse des électrons ( $9,1 \cdot 10^{-31} kg$ ). De plus  $Q$  est un opérateur qui modélise des collisions en volume, par exemple les collisions électrons-neutres déjà citées précédemment lors de l'exposé du scénario (voir paragraphe 4.2). On écrit

$$Q(f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} [s(v' \rightarrow v) f(v') - s(v \rightarrow v') f(v)] dv', \quad (4.4.16)$$

où  $s(v' \rightarrow v) dv$  est la probabilité par unité de temps qu'une particule de vitesse  $v'$  se retrouve après collision dans le volume  $dv$  autour de  $v$ .

Il reste à écrire la condition aux limites en  $z = 0$ . Pour cela on introduit  $\gamma^-(f)$  la trace de  $f$  en  $z = 0$  pour  $v_z < 0$  et  $\gamma^+(f)$  sa trace en  $z = 0$  pour  $v_z > 0$ .

On considère alors deux types d'opérateurs de collisions avec la paroi :

- Le premier traduit des collisions spéculaires. Une particule arrivant contre la paroi avec la vitesse  $(\underline{v}, v_z)$  repart avec la vitesse  $(\underline{v}, -v_z)$  comme un rayon lumineux frappant un miroir parfait.

On notera

$$\gamma^-(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t) = \mathcal{J} \gamma^+(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t) = \gamma^+(f)(\underline{x}, \underline{v}, -v_z, t),$$

pour tout  $(\underline{x}, \underline{v}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  et tout  $v_z < 0$ .

- Le deuxième opérateur regroupe tous les autres types de collisions pariétales que l'on désire prendre en compte. Par exemple :
  1. Des collisions diffusives : une particule arrivant sur la paroi repart dans n'importe quelle direction, si de plus elles repartent en conservant la même énergie on dit que ce sont des collisions élastiques (voir Figure 4.7).

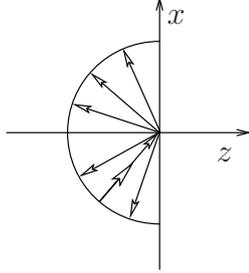


Figure 4.7: Collisions diffusives élastiques

2. Émission secondaire électronique : une particule arrivant sur la paroi arrache un ou plusieurs électrons en cédant une partie de son énergie. Ce sont des collisions inélastiques car l'énergie de l'électron incident change.

On écrit ces opérateurs sous la forme :

$$\gamma^-(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t) = \mathcal{K}\gamma^+(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t) = \int_{\{v'=(\underline{v}', v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} K(v', v) \gamma^+(f)(\underline{x}, \underline{v}', v'_z, t) |v'_z| dv'.$$

Une particule repartant à la vitesse  $v = (\underline{v}, v_z)$  résulte de toutes les particules ayant une vitesse incidente  $v' = (\underline{v}', v'_z)$  et repartant à la vitesse  $v$ . Notons que  $K(v', v) |v'_z| dv$  est le nombre d'électrons réémis dans  $[v, v + dv]$  pour un électron incident de vitesse  $v'$ .

On considère alors pour l'équation (4.4.15) la condition aux limites suivante :

$$\gamma^-(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t) = \beta \mathcal{J}\gamma^+(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t) + (1 - \beta) \mathcal{K}\gamma^+(f)(\underline{x}, \underline{v}, v_z, t), \quad (4.4.17)$$

pour tout  $(\underline{x}, \underline{v}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  et tout  $v_z < 0$  et où  $\beta$  est la probabilité pour qu'un électron incident soit réfléchi après collision de façon spéculaire et  $(1 - \beta)$  celle pour qu'il soit réfléchi non spéculairement.

Le but de ce paragraphe est d'obtenir un modèle limite lorsque les collisions sont très nombreuses et que le champ transverse confine les électrons dans un voisinage de la paroi.

On effectue alors un changement d'échelle. L'échelle transverse est très petite devant l'échelle parallèle, de plus les collisions ralentissent considérablement les particules. On effectue donc un changement d'échelle en  $\underline{x}$  et  $t$ .

Soit  $\alpha > 0$  très petit devant 1, on note  $\underline{x}' = \alpha \underline{x}$  et  $t' = \alpha t$ .  $\alpha$  représente le rapport entre les échelles transverse et parallèle, comme nous l'avons vu au paragraphe 4.2.3, typiquement

ce rapport est de  $10^{-7}/10^{-4}$ . Remarquons que  $\underline{x}'/\alpha$  est la variable physique, donc lorsqu'on regarde un phénomène sur une distance 1 en  $\underline{x}'$ , on observe en fait un phénomène physique se déroulant sur une distance  $1/\alpha$ .

De plus, on pose  $\beta = 1 - \alpha$  ce qui revient à supposer que les collisions spéculaires sont dominantes. Les collisions non spéculaires sont alors une petite correction d'ordre  $\alpha$  des collisions spéculaires.

Enfin, on considère que les collisions en volume sont en petit nombre devant les collisions spéculaires à la paroi.

En notant  $\underline{x} = \underline{x}'$  et  $t' = t$ , on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \alpha \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} f^\alpha + \alpha \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi \cdot \nabla_{\underline{v}} f^\alpha + \left[ v_z \frac{\partial f^\alpha}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f^\alpha}{\partial v_z} \right] = \alpha Q(f^\alpha), \end{array} \right. \quad (4.4.18.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^-(f^\alpha) = (1 - \alpha) \mathcal{J} \gamma^+(f^\alpha) + \alpha \mathcal{K} \gamma^+(f^\alpha) \quad \text{pour tout } v_z < 0. \end{array} \right. \quad (4.4.18.2)$$

(4.4.18)

### 4.4.2 Passage à la limite

Dans un souci de clarté, nous faisons également les hypothèses simplificatrices suivantes.

**Hypothèses 4.4.2** *On suppose que  $\psi$  ne dépend ni du temps  $t$  ni de la variable parallèle  $\underline{x}$  et que  $Q \equiv 0$ .*

Notons que ces hypothèses ne sont en rien nécessaires. Tous les résultats de ce paragraphe s'étendent aisément lorsque celles ci ne sont pas vérifiées.

Le but de ce paragraphe est de déterminer le modèle obtenu formellement dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$ . Pour cela, on effectue un développement de Hilbert, on pose :

$$f^\alpha = f_0 + \alpha f_1 + \dots$$

En reportant dans (4.4.18) et en identifiant les termes du même ordre en  $\alpha$ , on a :

- Pour (4.4.18.1) :

$$v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0, \quad (4.4.19)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} f_0 + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi \cdot \nabla_{\underline{v}} f_0 + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial v_z} = 0. \quad (4.4.20)$$

- Pour (4.4.18.2) :

$$\gamma^-(f_0) = \mathcal{J} \gamma^+(f_0), \quad (4.4.21)$$

$$\gamma^-(f_1) = \mathcal{J} \gamma^+(f_1) - \mathcal{J} \gamma^+(f_0) + \mathcal{K} \gamma^+(f_0). \quad (4.4.22)$$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.4.1** *On se place sous les Hypothèses 4.4.1 et 4.4.2.*

*Alors, le développement de Hilbert est soluble jusqu'à l'ordre 1 si et seulement si*

$$f_0(x, v, t) = F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t), \quad (4.4.23)$$

où  $\varepsilon_z = \frac{1}{2} m v_z^2 - e \psi(z)$  et où la fonction  $F$  vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} F + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi_0 \cdot \nabla_{\underline{v}} F \\ = \nu \left[ \int_{\{v'=(v'_x, v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} K \left( v', \left( \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) \right) F(\underline{x}, \underline{v}', m|v'_z|^2/2, t) |v'_z| dv' - F \right]. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

$\nu$  étant la fréquence de collision avec la paroi, elle est donnée par :

$$\nu(\varepsilon_z) = \frac{1}{m N_z(\varepsilon_z)},$$

pour tout  $\varepsilon_z \in \mathbb{R}^+$ , où  $N_z$  est la densité d'état, elle est donnée par

$$N_z(\varepsilon_z) = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{Z(\varepsilon_z)}^0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z + e \psi(z)}} dz,$$

où  $Z(\varepsilon_z) = \psi^{-1} \left( -\frac{\varepsilon_z}{e} \right)$  avec  $\psi^{-1}$  inverse de la fonction  $\psi$ .

**Démonstration du Théorème 4.4.1 :**

Nous allons dans un premier temps montrer (4.4.23) à l'aide de (4.4.19) et de (4.4.21). On a le système suivant :

$$\begin{cases} v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0, \\ \gamma^-(f_0) = \mathcal{J} \gamma^+(f_0). \end{cases} \quad (4.4.25)$$

On effectue alors le changement de variables  $(z, v_z) \mapsto (z, u_z)$  où  $\text{sign}(u_z) = \text{sign}(v_z)$  et

$$\frac{m|u_z|^2}{2} = \frac{m|v_z|^2}{2} - e \psi(z). \quad (4.4.26)$$

**Remarque 4.4.1** *Rappelons que d'après les Hypothèses 4.4.1 et la définition de  $\psi$  (4.4.14),  $\psi(z) \leq 0$  pour tout  $z \leq 0$ , de plus  $\psi$  est strictement croissante et  $\psi(z) \rightarrow -\infty$  lorsque  $z \rightarrow -\infty$ . Ainsi  $m|v_z|^2/2 - e \psi(z)$  est bien positif pour tout  $(z, v_z) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  par contre  $m|u_z|^2/2 + e \psi(z)$  n'est positif que si  $z \in [Z(u_z), 0]$ , où*

$$Z(u_z) = \psi^{-1} \left( -\frac{m u_z^2}{2e} \right). \quad (4.4.27)$$

*Ainsi le changement de variables est défini de  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \rightarrow [Z(u_z), 0]$ .*

Pour comprendre ceci il faut d'abord remarquer que (4.4.26) exprime la conservation de l'énergie totale transverse entre un point  $z \in \mathbb{R}^-$  et 0. En effet  $\psi(0) = 0$  et c'est le seul point où le potentiel est nul. Donc  $u_z$  n'est autre que la vitesse en  $z = 0$ .

Rappelons nous que le champ transverse rappelle les électrons vers la paroi. Ainsi une particule rebondissant sur la paroi avec une énergie cinétique de  $m u_z^2/2$  parcourt le domaine des  $z < 0$  jusqu'à ce que toute son énergie cinétique soit absorbée par le potentiel. Elle fait alors demi-tour en un point  $Z$  tel que  $-\infty < Z < 0$ . C'est le point de retournement, le seul point où la vitesse transverse de la particule est nulle pendant un rebond.

Inversement pour  $(z, v_z) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  il existe toujours une vitesse initiale (ou finale, suivant le sens de parcours) suffisamment grande pour que la particule soit au point  $z$  avec la vitesse  $v_z$ .

Remarquons que :

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{e}{m} \frac{1}{u_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_z}{\partial v_z} = \frac{v_z}{u_z}. \quad (4.4.28)$$

On pose  $\bar{f}_0(\underline{x}, \underline{v}, z, u_z, t) = f_0(\underline{x}, \underline{v}, z, v_z, t)$  et on a :

$$\frac{\partial f_0}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u_z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u_z} \frac{\partial u_z}{\partial v_z}.$$

En reportant dans (4.4.25) et en notant que, par (4.4.14),  $\partial \Phi / \partial z = \partial \psi / \partial z$ , on obtient

$$\begin{cases} v_z \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma^-(\bar{f}_0)(\underline{x}, \underline{v}, u_z, t) = \mathcal{J} \gamma^+(\bar{f}_0)(\underline{x}, \underline{v}, u_z, t) \quad \text{pour } u_z < 0. \end{cases}$$

D'après la Remarque 4.4.1,  $v_z \neq 0$  presque partout. On intègre alors le système précédent entre  $z \in [Z, 0]$  donné et 0, on obtient pour  $u_z > 0$

$$\bar{f}_0(\underline{x}, \underline{v}, u_z, z, t) = \gamma^+(\bar{f}_0)(\underline{x}, \underline{v}, u_z, t) \quad \text{et} \quad \bar{f}_0(\underline{x}, \underline{v}, -u_z, z, t) = \gamma^-(\bar{f}_0)(\underline{x}, \underline{v}, -u_z, t).$$

Mais d'après la condition aux limites

$$\gamma^+(\bar{f}_0)(\underline{x}, \underline{v}, u_z, t) = \gamma^-(\bar{f}_0)(\underline{x}, \underline{v}, -u_z, t).$$

Ainsi  $\bar{f}_0$  est paire en la variable  $u_z$  et ne dépend pas de  $z$ , on peut donc écrire

$$\bar{f}_0(\underline{x}, \underline{v}, u_z, z, t) = \bar{F}(\underline{x}, \underline{v}, |u_z|, t) = F\left(\underline{x}, \underline{v}, \frac{m|v_z|^2}{2} - e\psi(z), t\right).$$

Ce qui montre bien (4.4.23).

Il reste à établir (4.4.24). Pour cela on aura besoin du résultat suivant :

**Lemme 4.4.2** Soit  $\varphi$  une fonction ne dépendant que de l'énergie totale transverse, alors

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-} \varphi(m v_z^2/2 - e\psi(z)) dz dv_z = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(\tilde{\varepsilon}_z) N_z(\tilde{\varepsilon}_z) d\tilde{\varepsilon}_z,$$

où

$$N_z(\tilde{\varepsilon}_z) = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{Z(\tilde{\varepsilon}_z)}^0 \frac{1}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_z + e\psi(z)}} dz$$

et

$$Z(\tilde{\varepsilon}_z) = \psi^{-1} \left( -\frac{\tilde{\varepsilon}_z}{e} \right). \quad (4.4.29)$$

**Démonstration :**

Commençons par effectuer le changement de variables (4.4.26). Nous obtenons alors

$$\int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-} \varphi(m v_z^2/2 - e\psi(z)) dz dv_z = \int_{\mathbb{R}} \int_{Z(u_z)}^0 \varphi\left(\frac{m u_z^2}{2}\right) \frac{|u_z|}{|v_z(u_z, z)|} dz du_z,$$

où  $Z(u_z)$  est défini par (4.4.27). Mais  $|v_z| = \sqrt{\frac{2}{m}(m u_z^2/2 + e\psi(z))}$ , donc on intègre une fonction paire en  $u_z$  et

$$\int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}} \varphi(m v_z^2/2 - e\psi(z)) dz dv_z = 2 \int_0^{+\infty} \int_{Z(u_z)}^0 \varphi\left(\frac{m u_z^2}{2}\right) \frac{|u_z|}{\sqrt{\frac{2}{m}(m u_z^2/2 + e\psi(z))}} dz du_z.$$

On effectue alors le changement de variables  $u_z \mapsto \tilde{\varepsilon}_z = m u_z^2/2$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}} \varphi(m v_z^2/2 - e\psi(z)) dz dv_z = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{+\infty} \int_{Z(\tilde{\varepsilon}_z)}^0 \varphi(\tilde{\varepsilon}_z) \frac{1}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_z + e\psi(z)}} dz d\tilde{\varepsilon}_z.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 4.4.2.

Revenons à l'établissement de (4.4.24). Pour cela on multiplie (4.4.20) par  $\delta(m|v_z|^2/2 - e\psi - \varepsilon_z)$ , où  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac en 0, et on intègre en  $z$  et  $v_z$ , il vient

$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{\partial f_0}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} f_0 + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi \cdot \nabla_{\underline{v}} f_0 \right] \delta(m|v_z|^2/2 - e\psi - \varepsilon_z) dz dv_z \\ + \int \left[ v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial v_z} \right] \delta(m|v_z|^2/2 - e\psi - \varepsilon_z) dz dv_z = 0. \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

**Remarque 4.4.2** 1. Remarquons que la masse de Dirac permet de ne sélectionner que les particules qui ont une énergie totale transverse égale à  $\varepsilon_z$ . L'intégration en  $z$  permet de sommer sur toutes les particules situées dans un cylindre, dont la section est un voisinage de  $(\underline{x}, \underline{v})$  et les génératrices sont parallèles à  $z$ , et ayant une énergie transverse totale dans un voisinage de  $\varepsilon_z$ . On transporte dans le modèle limite non plus des particules mais des "filaments" de particules (voir Figure 4.8).

2. Notons de plus que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int f^\alpha(\underline{x}, z, \underline{v}, v_z, t) \delta(m v_z^2/2 - e\psi(z) - \varepsilon_z) dz dv_z \\ = \int f_0(\underline{x}, z, \underline{v}, v_z, t) \delta(m v_z^2/2 - e\psi(z) - \varepsilon_z) dz dv_z, \\ = \int F(\underline{x}, \underline{v}, m v_z^2/2 - e\psi(z), t) \delta(m v_z^2/2 - e\psi(z) - \varepsilon_z) dz dv_z. \end{aligned}$$

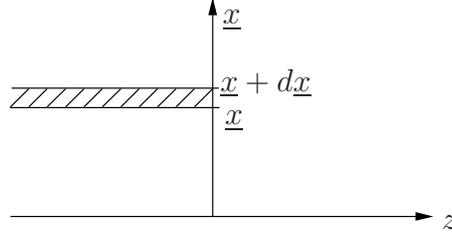


Figure 4.8: “Filaments” de particules

Ainsi en utilisant le Lemme 4.4.2 avec  $\varphi(\tilde{\varepsilon}_z) = F(\tilde{\varepsilon}_z) \delta(\tilde{\varepsilon}_z - \varepsilon_z)$ , on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int f^\alpha(\underline{x}, z, \underline{v}, v_z, t) \delta(m v_z^2/2 - e \psi(z) - \varepsilon_z) dz dv_z = \int_{\mathbb{R}^+} F(\underline{x}, \underline{v}, \tilde{\varepsilon}_z, t) \delta(\tilde{\varepsilon}_z - \varepsilon_z) N_z(\tilde{\varepsilon}_z) d\tilde{\varepsilon}_z, \\ = N_z(\varepsilon_z) F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t)$$

Ainsi  $N_z F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) d\underline{x} d\underline{v} d\varepsilon_z$  est le nombre de particules situées dans  $[\underline{x}, \underline{x} + d\underline{x}] \times \mathbb{R}^-$  dont l'énergie totale transverse est dans  $[\varepsilon_z, \varepsilon_z + d\varepsilon_z]$ , dont la vitesse parallèle est dans  $[\underline{v}, \underline{v} + d\underline{v}]$  et au temps  $t$ .

Remarquons que

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

ainsi en utilisant le Lemme 4.4.2, il vient :

$$\int \frac{\partial f_0}{\partial t} \delta(m |v_z|^2/2 - e \psi - \varepsilon_z) dz dv_z = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial t} F(\underline{x}, \underline{v}, \tilde{\varepsilon}_z, t) \delta(\tilde{\varepsilon}_z - \varepsilon_z) N_z(\tilde{\varepsilon}_z) d\tilde{\varepsilon}_z \\ = \frac{\partial}{\partial t} F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) N_z(\varepsilon_z).$$

De même, notons que :

$$\nabla_{\underline{x}} f_0 = \nabla_{\underline{x}} F, \quad \nabla_{\underline{v}} f_0 = \nabla_{\underline{v}} F \quad \text{et que} \quad \nabla_{\underline{x}} \phi(\underline{x}, z, t) = \nabla_{\underline{x}} \phi_0(\underline{x}, t),$$

ainsi (4.4.30) devient :

$$N_z(\varepsilon_z) \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi_0(\underline{x}, t) \cdot \nabla_{\underline{v}} F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) \right] \\ + \int \left[ v_z \frac{\partial f_1}{\partial z}(\underline{x}, \underline{v}, z, v_z, t) + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial v_z}(\underline{x}, \underline{v}, z, v_z, t) \right] \delta \left( \frac{m |v_z|^2}{2} - e \psi - \varepsilon_z \right) dz dv_z = 0. \quad (4.4.31)$$

On établit alors le résultat suivant qui nous permettra de conclure :

**Lemme 4.4.3** Soit une fonction  $g$  telle que

$$\gamma^-(g)(v_z) = \mathcal{J} \gamma^+(g)(v_z) + h(v_z) \quad \text{pour tout } v_z < 0, \quad (4.4.32)$$

où  $h$  est une fonction donnée.

Alors

$$D = \int \left( v_z \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial v_z} \right) \delta(m v_z^2/2 - e \psi - \varepsilon_z) dv_z dz = -\frac{1}{m} h \left( -\sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m}} \right).$$

**Démonstration :**

On applique à nouveau le changement de variables (4.4.26), on note :

$$g(\underline{x}, \underline{v}, z, v_z, t) = \bar{g}(\underline{x}, \underline{v}, z, u_z, t),$$

on obtient :

$$D = \int_{\mathbb{R}} \int_{Z(\varepsilon_z)}^0 \left\{ \left\{ v_z(z, u_z) \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial u_z} \left( -\frac{e}{m} \frac{1}{u_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \bar{g}}{\partial u_z} \frac{v_z(z, u_z)}{u_z} \right\} \delta \left( \frac{m u_z^2}{2} - \varepsilon_z \right) \frac{|u_z|}{|v_z(z, u_z)|} du_z dz \right\}$$

En remarquant que  $\partial \phi / \partial z = \partial \psi / \partial z$ , et en utilisant (4.4.27), il vient

$$D = \int_{\mathbb{R}} \int_{Z(\varepsilon_z)}^0 v_z(z, u_z) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \delta \left( \frac{m u_z^2}{2} - \varepsilon_z \right) \frac{|u_z|}{|v_z(z, u_z)|} dz du_z.$$

On applique alors le changement de variables  $u_z \mapsto \tilde{\varepsilon}_z = m u_z^2/2$  avec  $\text{sign}(u_z) = -1$  si  $u_z \in \mathbb{R}^-$  et  $\text{sign}(u_z) = +1$  si  $u_z \in \mathbb{R}^+$ , on obtient

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{m} \int_{Z(\varepsilon_z)}^0 \int_{\mathbb{R}^+} \left\{ \frac{v_z(z, u_z)}{|v_z(z, u_z)|} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \Big|_{u_z=\sqrt{2\varepsilon_z/m}} + \frac{v_z(z, u_z)}{|v_z(z, u_z)|} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \Big|_{u_z=-\sqrt{2\varepsilon_z/m}} \right\} \delta(\tilde{\varepsilon}_z - \varepsilon_z) d\tilde{\varepsilon}_z dz, \\ &= \frac{1}{m} \int_{Z(\varepsilon_z)}^0 \left\{ \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \left( \underline{x}, \underline{v}, z, \sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \left( \underline{x}, \underline{v}, z, -\sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) \right\} dz, \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \gamma^+(\bar{g}) \left( \underline{x}, \underline{v}, \sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) - \bar{g} \left( \underline{x}, \underline{v}, Z(\varepsilon_z), \sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) \right. \\ &\quad \left. - \gamma^-(\bar{g}) \left( \underline{x}, \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) + \bar{g} \left( \underline{x}, \underline{v}, Z(\varepsilon_z), -\sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition aux limite (4.4.32) et en remarquant que lorsque  $z = 0$ ,  $v_z = u_z$ , (4.4.32) s'écrit

$$\gamma^-(\bar{g})(u_z) = \gamma^+(\bar{g})(-u_z) + h(u_z) \quad \text{pour tout } u_z < 0.$$

Et donc

$$D = \frac{1}{m} \left\{ -h \left( -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) - \bar{g} \left( \underline{x}, \underline{v}, Z(\varepsilon_z), \sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) + \bar{g} \left( \underline{x}, \underline{v}, Z(\varepsilon_z), -\sqrt{2\varepsilon_z/m}, t \right) \right\}.$$

On utilise de plus l'égalité

$$\bar{g}(Z, \sqrt{2\varepsilon_z/m}) = g(Z, 0) = \bar{g}(Z, -\sqrt{2\varepsilon_z/m}),$$

ce qui permet d'obtenir le résultat cherché.

On applique alors ce résultat à  $f_1$  puisqu'elle vérifie (4.4.22), on a :

$$h(v_z) = -\mathcal{J}\gamma^+(f_0)(v_z) + \mathcal{K}\gamma^+(f_0)(v_z),$$

et en utilisant (4.4.23), on obtient

$$\begin{aligned} & \int \left( v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial v_z} \right) \delta(m v_z^2/2 - e\psi - \varepsilon_z) dv_z dz \\ &= -\frac{1}{m} \left[ \mathcal{K}\gamma^+(f_0) \left( \underline{x}, \underline{v}, -\sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m}}, t \right) - \mathcal{J}\gamma^+(f_0) \left( \underline{x}, \underline{v}, -\sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m}}, t \right) \right], \\ &= -\frac{1}{m} \left[ \int_{\{v'=(\underline{v}', v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} K \left( v', \left( \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. F(\underline{x}, \underline{v}', m |v'_z|^2/2, t) |v'_z| dv' - F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) \right]. \end{aligned}$$

On insère ce résultat dans (4.4.31), ce qui donne :

$$\begin{aligned} N_z(\varepsilon_z) & \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi_0(\underline{x}, t) \cdot \nabla_{\underline{v}} F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) \right] \\ &= \frac{1}{m} \left[ \int_{\{v'=(\underline{v}', v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} K \left( v', \left( \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. F(\underline{x}, \underline{v}', m |v'_z|^2/2, t) |v'_z| dv' - F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) \right]. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 4.4.1.

### 4.4.3 Applications

#### Cas d'un potentiel transverse linéaire

On se place dans le cas particulier où  $\psi(z) = -E_T z$  pour tout  $z < 0$  où  $E_T < 0$ .

**Exercice 4.4.1** ( $\star$ ) Montrez que dans ce cas :

$$N_z = -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_z}}{e E_T \sqrt{m}}.$$

Il est intéressant de vérifier les unités des formules obtenues. En effet cela permet, dans beaucoup de cas, de détecter des erreurs de calculs.

On utilise le système des unités internationales :

Masse	:	kilogramme	(kg),
Longueur	:	mètre	(m),
Vitesse	:	mètre/seconde	(m s <sup>-1</sup> ),
Énergie	:	Joule	(J),
Potentiel	:	Volt	(V),
Charge	:	Coulomb	(C).

Notons tout d'abord que d'après la Remarque 4.4.2,

$$[N_z F] = m^{-2} m^{-1} s J^{-1}.$$

De plus

$$[m N_z] = s,$$

donc  $1/(m N_z)$  est la fréquence de collisions avec la paroi, c'est le terme que l'on retrouve en facteur devant l'opérateur de collisions inélastiques avec la paroi  $\mathcal{K}$ .

Remarquons alors que

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial t} \right] = [F] s^{-1} = s m^{-5}.$$

On peut alors vérifier que chaque terme du modèle obtenu est homogène au terme précédent.

### Cas d'un potentiel transverse exponentiel

On suppose que le potentiel est de type exponentiel c'est à dire de la forme

$$\psi(z) = \psi_\infty \left( 1 - e^{z/\lambda} \right),$$

où  $\psi_\infty < 0$  et  $\lambda > 0$  (voir Figure 4.9). Notons que ce potentiel ne vérifie pas les hypothèses 4.4.1. En effet il est bien croissant par contre sa limite en  $-\infty$  est  $\psi_\infty$  et non pas infinie. Ceci a pour conséquence que toutes les énergies transverses  $\varepsilon_z$  ne seront pas autorisées. En effet, pour déterminer le point de retournement on utilise (4.4.27) avec  $m u_z^2/2 = \varepsilon_z$ , on a alors

$$Z(\varepsilon_z) = \lambda \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon_z}{e \psi_\infty} \right).$$

Ceci impose au modèle de n'être valide que pour les énergie  $\varepsilon_z \in [0, -e \psi_\infty[$ .

**Exercice 4.4.2** (★) *Comme dans l'exercice 4.4.1, calculez  $N_z$ .*

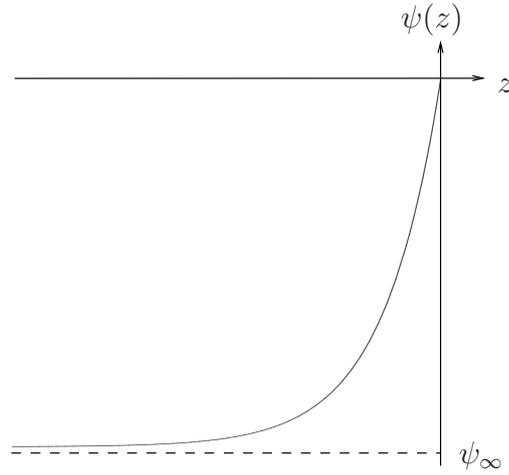


Figure 4.9: Champ transverse exponentiel

## 4.5 Limite SHE du modèle Boltzmann 1D

### 4.5.1 Introduction

Bien que dans le paragraphe précédent on ait diminué le nombre de variables du problème, le modèle reste encore très coûteux. C'est pourquoi on cherche ici à passer à un niveau encore plus macroscopique en effectuant une limite diffusive. On considère que des collisions diffusives avec la paroi sont en très grand nombre. Ceci nous permettra alors d'obtenir un modèle limite appelé modèle SHE (Spherical Harmonic Expansion).

On se place sous les hypothèses 4.4.1 et 4.4.2 du modèle précédent, on suppose de plus que

**Hypothèses 4.5.1** 1. Le modèle est unidimensionnel, c'est à dire que  $\underline{x}$  et  $\underline{v}$  sont des variables réelles.

2. On omet la dépendance en  $\varepsilon_z$  du modèle.

**Remarque 4.5.1** Omettre la dépendance en  $\varepsilon_z$  revient à dire que l'on ne considère plus l'inconnue comme étant  $F$  mais le moment de  $F$  :  $\int_{\mathbb{R}^+} F N_z d\varepsilon_z$ . En effet reprenons (4.4.24) que l'on multiplie par  $N_z$  et que l'on intègre par rapport à  $\varepsilon_z$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi_0 \cdot \nabla_{\underline{v}} \right) \int_{\mathbb{R}^+} F(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) d\varepsilon_z = - \int_{\mathbb{R}^+} \nu(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) F(\varepsilon_z) d\varepsilon_z$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\{v'=(\underline{v}', v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} \nu(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) K \left( v', \left( \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) \right) F(\underline{v}', m |v'_z|^2/2) |v'_z| dv' d\varepsilon_z.$$

Il est alors nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires pour fermer le système. Ici, on suppose que  $F$  est sous la forme  $F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) = \xi(\varepsilon_z) \tilde{F}(\underline{x}, \underline{v}, t)$  où  $\xi$  est une fonction donnée,

on a ainsi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi_0 \cdot \nabla_{\underline{v}} \right) \tilde{F} \int_{\mathbb{R}^+} \xi(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) d\varepsilon_z &= -\tilde{F} \int_{\mathbb{R}^+} \nu(\varepsilon_z) \xi(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) d\varepsilon_z \\ &+ \int_{\{v'=(\underline{v}', v'_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}} \int_{\mathbb{R}^+} \nu(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) K \left( v', \left( \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) \right) d\varepsilon_z \\ &\xi(m|v'_z|^2/2) \tilde{F}(\underline{v}') |v'_z| dv'. \end{aligned}$$

Notons

$$\tilde{N}_z = \int_{\mathbb{R}^+} \xi(\varepsilon_z) N_z d\varepsilon_z, \quad (4.5.33)$$

alors l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} + \frac{e}{m} \nabla_{\underline{x}} \phi_0 \cdot \nabla_{\underline{v}} \right) \tilde{N}_z \tilde{F} &= -\tilde{N}_z \tilde{F} \left( \frac{1}{\tilde{N}_z} \int_{\mathbb{R}^+} \nu(\varepsilon_z) \xi(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) d\varepsilon_z \right) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{N}_z \tilde{F}(\underline{v}') \left( \frac{1}{\tilde{N}_z} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \nu(\varepsilon_z) N_z(\varepsilon_z) \xi(m|v'_z|^2/2) K \left( v', \left( \underline{v}, -\sqrt{2\varepsilon_z/m} \right) \right) d\varepsilon_z dv'_z \right) d\underline{v}' \end{aligned}$$

Notons de plus que  $\tilde{N}_z \tilde{F}(\underline{x}, \underline{v}, t) d\underline{x} d\underline{v}$  est le nombre de particules situées dans  $[\underline{x}, \underline{x} + d\underline{x}] \times \mathbb{R}^-$  dont la vitesse parallèle est dans  $[\underline{v}, \underline{v} + d\underline{v}]$  au temps  $t$ .

Plus généralement, en notant  $\tilde{N}_z \tilde{F} = F$ ,  $\underline{x} = x$  et  $\underline{v} = v$ , on considère dans ce paragraphe l'équation suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, v, t) + v \frac{\partial F}{\partial x}(x, v, t) + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, t) \frac{\partial F}{\partial v}(x, v, t) = \mathcal{H}(F)(x, v, t), \quad (4.5.34)$$

où  $\mathcal{H}$  est un opérateur de collisions avec la paroi de la forme :

$$\mathcal{H}(F)(x, v, t) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \mathcal{K}(v', v) F(x, v', t) - \mathcal{K}(v, v') F(x, v, t) \right] dv'.$$

On s'intéresse à une limite de diffusion, c'est à dire lorsque des collisions diffusives élastiques sont en très grand nombre. On pose donc :

$$\mathcal{H}(F) = (1 - \beta) \mathcal{E}(F) + \beta \mathcal{I}(F)$$

où  $\mathcal{E}$  est un opérateur diffusif élastique, on choisit :

$$\mathcal{E}(F)(v) = \nu_{el}(|v|) \left( -F(v) + (1 - a) F(v) + a F(-v) \right) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R},$$

et où  $a \in ]0, 1[$ . Ce choix correspond à

$$\mathcal{K}(v', v) = \nu_{el}(|v|) (a \delta(v' + v) + (1 - a) \delta(v' - v)).$$

Cet opérateur exprime qu'une particule de vitesse  $v$  collisionne avec le bord toutes les  $1/\nu_{el}$  secondes, elle repart avec une probabilité  $a$  avec la vitesse  $-v$  et une probabilité  $(1 - a)$  avec la vitesse  $v$ .

$\mathcal{I}$  représente un opérateur inélastique, par exemple un opérateur modélisant l'émission secondaire électronique, on écrit :

$$\mathcal{I}(F)(x, v, t) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \mathcal{K}_I(v', v) F(x, v', t) - \mathcal{K}_I(v, v') F(x, v, t) \right] dv'.$$

De plus  $\beta \in [0, 1]$  est la probabilité pour qu'un électron incident soit réfléchi après collision de façon non diffusive et  $(1 - \beta)$  celle pour qu'il soit réfléchi diffusivement.

**Exercice 4.5.1** (\*) Montrez que l'opérateur  $\mathcal{E}$  conserve la masse et l'énergie. Pour cela il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(F)(v) \left( \frac{1}{v^2} \right) dv = 0.$$

En effet, notons que d'après la Remarque 4.5.1, la densité et l'énergie se calcule de la façon suivante

$$n(x, t) = \int F(x, v, t) dv \quad \text{et} \quad W(x, t) = \int F(x, v, t) v^2 dv.$$

Si l'on omet la partie transport dans (4.5.34) et en ne mettant au second membre que l'opérateur  $\mathcal{E}$ , alors on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, v, t) = \mathcal{E}(F)(x, v, t),$$

en intégrant par rapport à  $v$ , on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \int \mathcal{E}(F) dv,$$

et de même pour l'énergie.

Le but de ce paragraphe est d'obtenir un modèle limite lorsque les collisions diffusives avec la paroi sont très nombreuses. On note donc  $\alpha$  un petit paramètre devant 1 et on suppose  $\beta = \alpha^2$ . On effectue alors le changement d'échelle suivant :

$$x' = \alpha x \quad \text{et} \quad t' = \alpha^2 t.$$

Ce changement d'échelle est typique d'un processus de diffusion. Ce dernier ralentit considérablement les particules. On est alors obligés de s'intéresser au temps grands pour observer les particules pendant tout leur transit le long de la paroi du diélectrique.

On obtient, en notant  $t' = t$  et  $x' = x$  :

$$\alpha^2 \frac{\partial F^\alpha}{\partial t} + \alpha \left( v \frac{\partial F^\alpha}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F^\alpha}{\partial v} \right) = \alpha^2 \mathcal{I}(F^\alpha) + (1 - \alpha^2) \mathcal{E}(F^\alpha). \quad (4.5.35)$$

### 4.5.2 Passage à la limite

Comme précédemment, on s'intéresse à la limite lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Pour cela on décompose  $F^\alpha$  en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, comme suit :

$$F^\alpha(x, v, t) = F_p^\alpha(x, v, t) + \alpha F_i^\alpha(x, v, t), \quad (4.5.36)$$

où

$$F_p^\alpha(v) = \frac{F^\alpha(v) + F^\alpha(-v)}{2} \quad \text{et} \quad F_i^\alpha(v) = \frac{F^\alpha(v) - F^\alpha(-v)}{2\alpha}. \quad (4.5.37)$$

On établit alors le résultat suivant :

**Théorème 4.5.1** *On se place sous les Hypothèses 4.4.1, 4.4.2 et 4.5.1. On considère  $F^\alpha$  solution de (4.5.35) et  $F_p^\alpha$  et  $F_i^\alpha$  définies par (4.5.37).*

*On suppose que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_p^\alpha(x, v, t) = F_p(x, v, t)$  pour tout  $(x, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .*

*Alors :*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F^\alpha(x, v, t) = G(x, \varepsilon, t) = F_p(x, \sqrt{2\varepsilon/m}, t) \quad \text{pour tout } (x, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (4.5.38)$$

où  $\varepsilon = m v^2/2$ .

De plus  $G$  est solution de l'équation suivante :

$$N(\varepsilon) \frac{\partial G}{\partial t}(x, \varepsilon, t) + \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, t) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) J(x, \varepsilon, t) = N(\varepsilon) \mathcal{B}(G)(x, \varepsilon, t), \quad (4.5.39)$$

avec  $J$  la densité de courant :

$$J = -D(x, \varepsilon, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, t) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) G(x, \varepsilon, t),$$

où  $N$  est la densité d'état donnée par

$$N(\varepsilon) = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}},$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion tel que

$$D(x, \varepsilon, t) = \frac{1}{2 a \nu_{el}(x, \sqrt{2\varepsilon/m}, t) N(\varepsilon)},$$

et où  $\mathcal{B}$ , l'opérateur de collisions inélastiques avec la paroi, est tel que

$$\mathcal{B}(G)(x, \varepsilon, t) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\mathcal{K}_I(v', \sqrt{2\varepsilon/m}) + \mathcal{K}_I(v', -\sqrt{2\varepsilon/m})}{2} G\left(x, m(v')^2/2, t\right) \right. \quad (4.5.40)$$

$$\left. - \frac{\mathcal{K}_I(\sqrt{2\varepsilon/m}, v') + \mathcal{K}_I(-\sqrt{2\varepsilon/m}, v')}{2} G\left(x, \varepsilon, t\right) \right] dv'.$$

**Démonstration du Théorème 4.5.1 :**

Commençons par noter que  $F_p^\alpha$  étant paire, sa limite l'est également et donc, en posant  $\varepsilon = m v^2/2$ ,

$$F_p(x, v, t) = G(x, \varepsilon, t), \quad (4.5.41)$$

pour tout  $(x, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

Remarquons alors que, pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial F_p^\alpha}{\partial t} + \alpha^2 \left( v \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial v} \right) \\ = \alpha^2 \frac{\mathcal{I}(F^\alpha)(v) + \mathcal{I}(F^\alpha)(-v)}{2} + (1 - \alpha^2) \frac{\mathcal{E}(F^\alpha)(v) + \mathcal{E}(F^\alpha)(-v)}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^3 \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial t} + \alpha \left( v \frac{\partial F_p^\alpha}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_p^\alpha}{\partial v} \right) \\ = \alpha^2 \frac{\mathcal{I}(F^\alpha)(v) - \mathcal{I}(F^\alpha)(-v)}{2} + (1 - \alpha^2) \frac{\mathcal{E}(F^\alpha)(v) - \mathcal{E}(F^\alpha)(-v)}{2}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\mathcal{E}(F^\alpha)(v) = -2 \alpha \nu_{el}(|v|) F_i^\alpha(v).$$

On obtient donc pour tout  $v \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial F_p^\alpha}{\partial t} + \left( v \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial v} \right) = \frac{\mathcal{I}(F^\alpha)(v) + \mathcal{I}(F^\alpha)(-v)}{2}, \quad (4.5.42)$$

et

$$\alpha^2 \frac{\partial F_i^\alpha}{\partial t} + \left( v \frac{\partial F_p^\alpha}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_p^\alpha}{\partial v} \right) = \alpha \frac{\mathcal{I}(F^\alpha)(v) - \mathcal{I}(F^\alpha)(-v)}{2} - 2(1 - \alpha^2) a \nu_{el} F_i^\alpha(v). \quad (4.5.43)$$

En passant à la limite dans (4.5.43), il vient :

$$F_i(v) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_i^\alpha(v),$$

avec

$$\left( v \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_p}{\partial v} \right) = -2 a \nu_{el} F_i(v). \quad (4.5.44)$$

On en déduit, en utilisant (4.5.36) que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F^\alpha(v) = F_p(v) = G(m v^2/2),$$

ce qui établit (4.5.38).

On se limitera donc aux valeurs positives de  $v$  qui suffisent pour décrire  $G$ .

On passe alors à la limite dans (4.5.42), on obtient :

$$\frac{\partial F_p}{\partial t} + \left( v \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_i}{\partial v} \right) = \frac{\mathcal{I}(F_p)(v) + \mathcal{I}(F_p)(-v)}{2}, \quad (4.5.45)$$

D'après (4.5.44) et (4.5.41), on a pour tout  $v \geq 0$

$$F_i(v) = \frac{-v}{2 a \nu_{el}(|v|)} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right),$$

car  $\partial F_p / \partial v = m v \partial G / \partial \varepsilon$ .

On pose  $J(\varepsilon) = F_i(\sqrt{2\varepsilon/m})$  alors d'après l'égalité précédente :

$$J(\varepsilon) = \frac{-1}{2 a \nu_{el}(\sqrt{2\varepsilon/m})} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right),$$

pour tout  $\varepsilon \geq 0$ .

Par ailleurs, en remarquant que  $\partial F_i / \partial v = m v \partial J / \partial \varepsilon$ , (4.5.45) s'écrit :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\varepsilon) + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) J(\varepsilon) = \frac{\mathcal{I}(F_p)(\sqrt{2\varepsilon/m}) + \mathcal{I}(F_p)(-\sqrt{2\varepsilon/m})}{2},$$

pour tout  $\varepsilon \geq 0$ .

En remplaçant  $F_p$  par  $G$  dans  $\mathcal{I}$  on obtient (4.5.39).

**Exercice 4.5.2** (\*\*\*). *Pour obtenir le modèle limite, on peut procéder comme dans le paragraphe précédent, en effectuant un développement de Hilbert :*

$$F^\alpha = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots$$

et en identifiant les termes du même ordre en  $\alpha$ , on a :

$$\mathcal{E}(F_0) = 0, \quad (4.5.46)$$

$$v \frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_0}{\partial v} = \mathcal{E}(F_1), \quad (4.5.47)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + v \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial v} = \mathcal{I}(F_0) + \mathcal{E}(F_2) - \mathcal{E}(F_0). \quad (4.5.48)$$

On cherche alors à montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.5.2** *On se place sous les Hypothèses 4.4.1, 4.4.2 et 4.5.1.*

*Alors, le développement de Hilbert est soluble jusqu'à l'ordre 2 si et seulement si*

$$F_0(x, v, t) = G(x, \varepsilon, t) \quad (4.5.49)$$

où  $\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2$  et où la fonction  $G$  vérifie (4.5.39).

Pour cela, on procède comme suit :

1. En utilisant (4.5.46), montrez que l'on peut écrire pour tout  $(x, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  :

$$F_0(x, v, t) = G(x, \varepsilon, t), \quad (4.5.50)$$

où  $\varepsilon = m v^2/2$ .

2. En reportant ce résultat dans (4.5.47), montrez que :

$$v \left[ \frac{1}{a \nu_{el}(|v|)} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \right] = F_1(-v) - F_1(v), \quad (4.5.51)$$

pour tout  $v \in \mathbb{R}$ .

3. Montrez que le noyau de  $\mathcal{E}$  est

$$N(\mathcal{E}) = \left\{ f(\varepsilon) ; f \text{ arbitraire} \right\}.$$

En remarquant que  $\lambda : v \mapsto v/2$  est solution de

$$-\left( \lambda(-v) - \lambda(v) \right) = v,$$

pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , déduisez en que l'on peut choisir :

$$F_1(v) = -\frac{v}{2 a \nu_{el}(|v|)} \left( \frac{\partial G}{\partial x}(\varepsilon) + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \right). \quad (4.5.52)$$

4. En reportant (4.5.50) et (4.5.52) dans (4.5.48) montrez que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{v}{2 a \nu_{el}(|v|)} \left( \frac{\partial G}{\partial x}(\varepsilon) + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \right) \right] \\ + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \left[ -\frac{v}{2 a \nu_{el}(|v|)} \left( \frac{\partial G}{\partial x}(\varepsilon) + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \right) \right] = \mathcal{B}(G) + \mathcal{E}(F_2). \end{aligned}$$

5. Comme dans le paragraphe 4.4 on sélectionne les particules qui ont une énergie cinétique parallèle égale à  $\varepsilon$ . Pour cela, on intègre l'équation précédente contre  $\delta(m v^2/2 - \varepsilon)$  pour  $v \in \mathbb{R}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} \int \delta(m v^2/2 - \varepsilon) dv \quad (4.5.53) \\ - \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \left[ \frac{1}{2 a \nu_{el}(\sqrt{2\varepsilon/m})} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \int v^2 \delta(m v^2/2 - \varepsilon) dv \right] \\ - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \left[ \frac{1}{2 a \nu_{el}(\sqrt{2\varepsilon/m})} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \right] \int \delta(m v^2/2 - \varepsilon) dv \\ = \int \delta(m v^2/2 - \varepsilon) dv \mathcal{B}(G) + \int \mathcal{E}(F_2) \delta(m v^2/2 - \varepsilon) dv. \end{aligned}$$

Montrez que

$$(a) \int \delta(mv^2/2 - \varepsilon) dv = \sqrt{\frac{2}{m\varepsilon}},$$

$$(b) \int \mathcal{E}(F_2) \delta(mv^2/2 - \varepsilon) dv = 0,$$

$$(c) \int v^2 \delta(mv^2/2 - \varepsilon) dv = \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{m\sqrt{m}}.$$

6. En reportant les résultats de la question précédente dans (4.5.53) montrez que l'on obtient (4.5.39).

### 4.5.3 Propriétés et généralisations possibles du modèle SHE

#### Conservation de l'énergie

Tout d'abord exprimons le modèle SHE (4.5.39) en terme d'énergie totale. Pour cela, on utilise le changement de variables suivant

$$\varepsilon \mapsto U = \varepsilon - e\phi_0(x, t). \quad (4.5.54)$$

On pose  $G(x, \varepsilon, t) = \overline{G}(x, U, t)$ , alors

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial t} - e \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \frac{\partial \overline{G}}{\partial U} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{G}}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}.$$

On pose

$$\overline{J}(x, U, t) = -D(x, U + e\phi_0, t) \frac{\partial \overline{G}}{\partial x},$$

alors  $\overline{J}(x, U, t) = J(x, U + e\phi_0, t)$  et

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial J}{\partial \varepsilon}.$$

Ainsi (4.5.39) devient

$$N(U + e\phi_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} - e \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial U} \right) \overline{G} + \frac{\partial \overline{J}}{\partial x} = N(U + e\phi_0) \mathcal{B}(\overline{G}).$$

Supposons que le potentiel parallèle soit indépendant du temps alors on obtient une équation de convection-diffusion en espace où l'énergie totale  $U$  joue le rôle d'un paramètre :

$$N(U + e\phi_0) \frac{\partial \overline{G}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial x^2} - \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \overline{G}}{\partial x} = N(U + e\phi_0) \mathcal{B}(\overline{G}).$$

Ceci traduit le fait qu'il y a conservation de l'énergie totale pour chaque particule et provient du fait que ce modèle dérive de l'équation de Boltzmann (transport) et d'un opérateur de collisions élastique qui tout deux conservent l'énergie.

**Exercice 4.5.3** (\*\*\*). Déterminez la solution d'une équation du type

$$\frac{\partial G}{\partial t} + c \frac{\partial G}{\partial x} + d \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  où la condition initiale  $G_0$  est donnée.

## Généralisations

-Il est bien sûr possible de dériver un modèle du même type sans les hypothèses simplificatrices 4.4.2 et 4.5.1. Le rajout d'un terme de collisions en volume n'introduit pas de difficultés plus grandes que celles que nous avons traitées.

-Le passage au cas bidimensionnel sur les variables parallèles est par contre plus difficile. Il n'est pas possible de traiter le problème par la décomposition paire-impair. Il faut procéder, comme dans l'exercice 4.5.2, à l'aide d'un développement de Hilbert. L'étude de l'opérateur de collisions est alors plus complexe. On obtient des résultats similaires à ceux que nous avons obtenus (voir [15]), et dans ce cas la densité spectrale de courant  $J$  est donnée par

$$J = -D(\varepsilon) \left( \nabla_x G + e \nabla \phi_0 \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right).$$

$D$  est une matrice  $2 \times 2$ , elle est déterminée comme dans le cas de la dimension un en inversant l'opérateur de collision. On peut montrer dans ce cas là que cette matrice est symétrique définie positive. Ce qui implique que la matrice  $D$  est bien une matrice de diffusion.

## 4.6 Limite SHE-Énergie Transport

Bien que le modèle SHE soit moins coûteux que le modèle de Boltzmann décrit au paragraphe 4.4, il reste encore plus coûteux que la plupart des modèles macroscopiques "classiques". C'est pourquoi, on va s'attacher ici à construire un modèle où seules les variables espace et temps interviennent.

### 4.6.1 Établissement du modèle

L'obtention de ce modèle repose encore sur une analyse multi-échelles. Rappelons que le terme source du modèle SHE (4.5.39) décrit les collisions subies par un électron lors de son trajet le long du diélectrique. Celles ci sont de différents types, tout d'abord les collisions en volume : avec les neutres présents dans le gap, ionisantes ou non. Dans un souci de clarté, nous les avons négligées (voir Hypothèses 4.4.2). Viennent ensuite les collisions inélastiques avec la paroi regroupant l'émission secondaire électronique qui décrit des collisions de type électron-électron ou l'attachement à la paroi (si l'électron n'a pas suffisamment d'énergie il est piégé par la paroi) ou encore la désorption de neutres.

On utilise les notations des paragraphes précédents et on se place sous les hypothèses 4.4.1, 4.4.2 et 4.5.1 du modèle précédent.

On considère alors le modèle suivant :

$$N(\varepsilon) \frac{\partial G}{\partial t}(x, \varepsilon, t) + \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, t) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) J(x, \varepsilon, t) = \mathcal{B}(G)(x, \varepsilon, t), \quad (4.6.55)$$

où  $J$  est la densité de courant donnée par :

$$J = -D(x, \varepsilon, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, t) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) G(x, \varepsilon, t),$$

$N$  étant la densité d'état et  $D$  le coefficient de diffusion.

On suppose alors que les collisions de type électron-électron sont en plus grand nombre que les autres. Elles sont le phénomène dominant. On écrit donc pour  $\alpha \ll 1$  :

$$N(\varepsilon) \mathcal{B} = \mathcal{B}_{ee} + \alpha^2 \mathcal{B}_{in},$$

où  $\mathcal{B}_{ee}$  représente l'opérateur associé aux collisions électron-électron et  $\mathcal{B}_{in}$  les autres collisions à la paroi.  $\mathcal{B}_{in}(G)$  est donné par

$$\mathcal{B}_{in}(G) = \int_0^{+\infty} \left[ K_{in}(\varepsilon', \varepsilon) G(x, \varepsilon', t) - K_{in}(\varepsilon, \varepsilon') G(x, \varepsilon, t) \right] d\varepsilon'. \quad (4.6.56)$$

**Remarque 4.6.1** Notons que si l'on effectue le changement de variables  $v' \mapsto \varepsilon' = m|v'|^2/2$  sur  $\mathbb{R}^+$  puis sur  $\mathbb{R}^-$  dans l'opérateur de collisions  $\mathcal{B}$  donné par (4.5.40), on n'obtient pas un opérateur symétrique en  $(\varepsilon, \varepsilon')$ . Par contre  $N(\varepsilon) \mathcal{B}$  est, lui, symétrique en ces mêmes variables. Ainsi en écrivant  $\mathcal{B}_{in}$  sous la forme (4.6.56) on décrit non pas  $\mathcal{B}$  mais  $N(\varepsilon) \mathcal{B}$ . Ceci traduit la propriété de conservation de la masse.

Nous ne donnons pas ici l'expression de  $\mathcal{B}_{ee}$  mais nous nous bornons à donner la liste des propriétés nécessaires par la suite :

#### Hypothèses 4.6.1

i) Conservation de la masse et de l'énergie

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{B}_{ee}(G)(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} d\varepsilon = 0 \quad \text{pour tout } G$$

ii) Equilibres Maxwelliens

$$\mathcal{B}_{ee}(G)(x, \varepsilon, t) = 0 \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ et } T \geq 0 \text{ tels que } G = G_{\mu, T} = \exp\left(\frac{\mu(x, t) - \varepsilon}{T(x, t)}\right),$$

où  $\mu$  est appelé le potentiel chimique et  $T$  est la température supposés mesurés en joules.

On effectue alors dans (4.6.55) le changement d'échelles suivant :

$$x' = \alpha x, \quad t' = \alpha^2 t,$$

et, on pose  $G(x, \varepsilon, t) = G'(x', \varepsilon, t')$ ,  $D(x, \varepsilon, t) = D'(x', \varepsilon, t')$  et  $\phi_0(x, t) = \phi'_0(x', t')$ . On obtient alors

$$J(x, \varepsilon, t) = -\alpha D'(x', \varepsilon, t') \left( \frac{\partial}{\partial x'} + e \frac{\partial \phi'_0}{\partial x'}(x', t') \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) G'(x', \varepsilon, t') = \alpha J'(x', \varepsilon, t')$$

Il vient en notant  $x' = x$ ,  $t' = t$ ,  $G' = G$ ,  $D' = D$ ,  $\phi'_0 = \phi_0$  et  $J' = J$

$$\alpha^2 N \frac{\partial G}{\partial t} + \alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) J = \alpha^2 \mathcal{B}_{in}(G) + \mathcal{B}_{ee}(G), \quad (4.6.57)$$

avec

$$J = -D \left( \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) G. \quad (4.6.58)$$

On s'intéresse à la limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Théorème 4.6.1** *On se place sous les hypothèses 4.4.1, 4.4.2, 4.5.1 et 4.6.1. On suppose que*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_\alpha = G_0. \quad (4.6.59)$$

*Alors il existe  $\mu$  et  $T$  tels que*

$$G_0(x, \varepsilon, t) = \exp\left(\frac{\mu(x, t) - \varepsilon}{T(x, t)}\right).$$

*De plus on définit  $n$  la densité de particules et  $W$  la densité d'énergie par*

$$\begin{pmatrix} n \\ W \end{pmatrix} = \int_0^{+\infty} N(\varepsilon) G_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} d\varepsilon. \quad (4.6.60)$$

*Alors  $n$  et  $W$  sont solutions du système d'énergie-transport donné par :*

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = q_n, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial j_W}{\partial x} - e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} j_n = q_w, \end{cases} \quad (4.6.61)$$

*où  $j_n$ , le flux de particules, et  $j_W$ , le flux d'énergie, sont donnés par :*

$$\begin{pmatrix} j_n \\ j_W \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_0 & D_1 - e \phi_0 D_0 \\ D_1 & D_2 - e \phi_0 D_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\mu - e \phi_0}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{pmatrix}, \quad (4.6.62)$$

*avec pour  $i = 0, 1$  ou  $2$*

$$D_i = \int_0^{+\infty} \varepsilon^i D(\varepsilon) G_0(\varepsilon) d\varepsilon.$$

*De plus  $q_n$  et  $q_w$  sont les termes de collisions inélastiques, ils sont donnés par*

$$\begin{pmatrix} q_n \\ q_w \end{pmatrix} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K_{in}(\varepsilon', \varepsilon) G_0(\varepsilon') \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon - \varepsilon' \end{pmatrix} d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (4.6.63)$$

#### **Démonstration du théorème 4.6.1 :**

On effectue comme précédemment un développement de Hilbert, on pose :

$$G = G_0 + \alpha G_1 + \dots$$

En reportant dans (4.6.57) et en identifiant les termes du même ordre en  $\alpha$ , on obtient :

$$\mathcal{B}_{ee}(G_0) = 0, \quad (4.6.64)$$

et

$$N \frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\partial J_0}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial J_0}{\partial \varepsilon} = \mathcal{B}_{in}(G_0) + \mathcal{B}_{ee}(G_1), \quad (4.6.65)$$

où

$$J_0 = -D \left( \frac{\partial G_0}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G_0}{\partial \varepsilon} \right).$$

Remarquons que d'après les hypothèses 4.6.1 sur  $\mathcal{B}_{ee}$ , (4.6.64) signifie qu'on est à l'équilibre thermodynamique. Alors  $G_0$  est de la forme :

$$G_0(x, \varepsilon, t) = \exp \frac{\mu(x, t) - \varepsilon}{T(x, t)}, \quad (4.6.66)$$

où  $T$  est la température et  $\mu$  le potentiel chimique.

On multiplie (4.6.65) par  ${}^t(1, \varepsilon)$  et on intègre par rapport à  $\varepsilon$  sur  $[0, +\infty[$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} N(\varepsilon) G_0 \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} J_0(\varepsilon) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon \\ + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \int_0^{+\infty} \frac{\partial J_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon = \int_0^{+\infty} \mathcal{B}_{in}(G_0) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon, \end{aligned}$$

puisque d'après les hypothèses 4.6.1, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{B}_{ee}(G_1)(\varepsilon) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon = 0.$$

En intégrant par partie, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial J_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon = \left( \begin{array}{c} 0 \\ -\int_0^{+\infty} J_0(\varepsilon) d\varepsilon \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ -j_n \end{array} \right).$$

En utilisant ce résultat et la définition de  $n$  et  $W$ , données par (4.6.60), on obtient (4.6.61), c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = q_n, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial j_W}{\partial x} - e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} j_n = q_w, \end{cases}$$

où

$$\left( \begin{array}{c} j_n \\ j_W \end{array} \right) = - \int_0^{+\infty} D(\varepsilon) \left( \frac{\partial G_0}{\partial x} + e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial G_0}{\partial \varepsilon} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon,$$

et où  $q_n$  et  $q_w$  sont définis par

$$\left( \begin{array}{c} q_n \\ q_w \end{array} \right) = \int_0^{+\infty} \mathcal{B}_{in}(G_0) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon \end{array} \right) d\varepsilon.$$

Remarquons alors que :

$$\frac{\partial G_0}{\partial x} = G_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{T} \right) + \varepsilon G_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-1}{T} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{T} G_0,$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} j_n \\ j_W \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_0 & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{pmatrix} - \left( -\frac{1}{T} \right) e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{pmatrix} j_n \\ j_W \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_0 & D_1 - e \phi_0 D_0 \\ D_1 & D_2 - e \phi_0 D_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\mu - e \phi_0}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{pmatrix},$$

ce qui établit (4.6.62).

Il reste à établir (4.6.63), on a

$$\begin{pmatrix} q_n \\ q_W \end{pmatrix} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K_{in}(\varepsilon', \varepsilon) G_0(\varepsilon') \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} d\varepsilon' d\varepsilon - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_0(\varepsilon) K_{in}(\varepsilon, \varepsilon') \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} d\varepsilon' d\varepsilon,$$

et en inversant les rôles de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  dans la deuxième intégrale, il vient

$$\begin{pmatrix} q_n \\ q_W \end{pmatrix} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_0(\varepsilon') K_{in}(\varepsilon', \varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} d\varepsilon' d\varepsilon - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K_{in}(\varepsilon', \varepsilon) G_0(\varepsilon') \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon' \end{pmatrix} d\varepsilon' d\varepsilon,$$

ce qui montre bien (4.6.63).

Ceci termine la démonstration du théorème 4.6.61.

## 4.6.2 Propriétés et application

Il est intéressant d'exprimer l'équation d'énergie dans (4.6.61) en terme d'énergie totale car ceci permet de symétriser le système des flux.

On pose

$$W_T = W - n e \phi_0.$$

Ainsi le système (4.6.61) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = q_n, \\ \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial j_{W_T}}{\partial x} + n e \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = q_w - e \phi_0 q_n, \end{cases}$$

où

$$j_{W_T} = j_W - e \phi_0 j_n.$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} j_n \\ j_{W_T} \end{pmatrix} = -\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\mu - e \phi_0}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{pmatrix},$$

où  $\mathcal{D}$  est une matrice symétrique donnée par

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 - e \phi_0 D_0 \\ D_1 - e \phi_0 D_0 & D_2 - 2 e \phi_0 D_1 + (e \phi_0)^2 D_0 \end{pmatrix}.$$

Notons que  $(\mu - e \phi_0)/T$  et  $-1/T$  sont dites variables entropiques du système.

On s'intéresse alors à la limite Energie-transport dans un potentiel de surface. On considère donc le modèle SHE donné dans le paragraphe 4.5. Nous rappelons qu'il décrit le mouvement d'électrons soumis à un champ dans un domaine limité par une paroi. On considère un champ parallèle et un champ transverse à la paroi. Ce dernier confine les électrons contre la paroi. Dans ce cas, nous avons vu que

$$N(\varepsilon) = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \quad \text{et} \quad D(x, \varepsilon, t) = \frac{1}{2 a \nu_{el} N(\varepsilon)},$$

on supposera de plus que  $\nu_{el}$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

**Exercice 4.6.1** Montrez que l'on a

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{m \pi}{2}} \sqrt{T} \exp\left(\frac{\mu}{T}\right), & W &= \frac{n T}{2}, \\ D_0 &= \frac{n T}{2 m a \nu_{el}}, & D_1 &= \frac{3 T}{2} D_0, \\ D_2 &= \frac{15 (T)^2}{4} D_0. \end{aligned}$$

On pourra utiliser le fait que

$$\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On obtient alors l'expression suivante pour  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = D_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{3 T}{2} - e \phi_0 \\ \frac{3 T}{2} - e \phi_0 & \frac{6 T^2}{4} + \left(\frac{3 T}{2} - e \phi_0\right)^2 \end{pmatrix}.$$

## 4.7 Résultats numériques

On s'intéresse au mouvement d'électrons soumis à un champ dans un domaine limité par une paroi. On considère un champ parallèle et un champ transverse à la paroi. Ce dernier rappelle les électrons contre la paroi.

On rappelle que les variables transverse et parallèle sont notées respectivement  $z$  et  $x$ . On se place dans le cas d'un champ transverse constant ainsi le potentiel transverse est de la forme  $\psi(z) = -E_T z$  pour tout  $z < 0$  où  $E_T < 0$ .

On considère un domaine dans la direction parallèle borné donné par  $[0, L]$  où  $L = 10^{-4}$  mètre. La différence de potentiel entre les points 0 et  $L$  est de  $V < 0$  volts. On néglige le potentiel créé par le mouvement des charges. On a alors

$$\phi_0(x, t) = \phi_0(x) = \frac{V}{L} (L - x),$$

l'origine des potentiels étant choisie en  $x = L$ .

On peut modéliser ce phénomène par le système de type Energie-Transport suivant (voir [15] et [16]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial j_{w_T}}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

pour  $x \in [0, L]$  et  $t \geq 0$ .

Les inconnues  $n$  et  $W_T$  sont respectivement les densités de particules et d'énergie totale. On rappelle que pour obtenir ce modèle on doit intégrer dans la direction transverse ( $z$ ). De plus en considérant que le problème est invariant dans l'une des deux directions parallèles on est ramené à un problème 1-D. On mesure  $n$  en  $m^{-2}$  et  $W_T$  en  $eV.m^{-2}$ .

Les flux de particules et d'énergie sont donnés par

$$\begin{pmatrix} j_n \\ j_{w_T} \end{pmatrix} = -\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\mu - \phi_0}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{pmatrix},$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique et  $T$  est la température. Ils sont tous deux supposés mesurés en électrons-volts et sont donnés par

$$\mu = T \ln \left( \frac{n |E_T| m^{3/2}}{(2\pi e)^{3/2} T^{5/2}} \right),$$

et

$$T = \frac{2}{5} \left( \frac{W_T}{n} - \phi_0 \right).$$

$\mathcal{D}$  est la matrice de diffusion égale à

$$\mathcal{D} = \sqrt{\frac{2e}{\pi m}} \frac{2nT^{3/2}}{|E_T|} \begin{pmatrix} 1 & 4T - \phi_0 \\ 4T - \phi_0 & 4T^2 + (4T - \phi_0)^2 \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'à  $t = 0$  il n'y a aucune particules dans le domaine. Ceci se traduit normalement par  $n(t = 0) = W_T(t = 0) = 0$  mais pour des raisons numériques (liées au schéma utilisé qui passe par le calcul du potentiel chimique, non défini pour  $n=0$ ) nous choisissons  $n(t = 0) = 1 \text{ m}^{-1}$  et  $W_T(t = 0) = 0$ .

On utilise les conditions aux limites suivantes

$$j_n(x = 0) = j_0 - \frac{4\sqrt{e2}}{5\sqrt{m\pi}} n(x = 0) \sqrt{T(x = 0)}, \quad j_{w_T}(x = 0) = -\phi_0(x = 0) j_n(x = 0),$$

$$j_n(x = L) = 0, \quad j_w(x = L) = 0.$$

où  $j_0$  est le flux de particules rentrantes donné par la formule de Fowler-Nordheim (4.2.1)

$$j_0 = \begin{cases} \frac{\sqrt{S_{real}}}{e} \frac{S_{fn}}{S_{real}} A \left( \beta \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 \exp \left( -\frac{B}{\beta \frac{\partial \phi_0}{\partial x}} \right), & \text{si } \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \geq 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le rapport  $S_{fn}/S_{real}$  permet de tenir compte de la diffusion électronique lors de l'émission,  $\beta$  est un facteur de renforcement de l'émission. En pratique, on a

$$S_{fn} = 10^{-15} \text{ m}^2, \quad S_{real} = 10^{-11} \text{ m}^2, \quad \beta = 500 \text{ à } 1000,$$

$$A = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ Ampère/m}^2, \quad B = 6,23 \cdot 10^{10} \text{ V/m}.$$

On obtient alors les courbes suivantes pour un champ transverse  $|E_T| = 5 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ , une différence de potentiel  $V = -500 \text{ V}$  et un facteur de renforcement  $\beta = 700$ .

Notons que comme la densité  $n$  ne représente pas une réalité physique (dû à l'intégration dans la direction transverse) nous n'avons pas représenté  $n$  sur la figure 4.10 mais  $n/(T/2|E_T|)$  où  $T/2|E_T|$  est la distance parcourue pendant un rebond dans la direction transverse  $z$ . Ceci permet d'obtenir une densité volumique moyenne.

On remarque sur les première courbes de la figure 4.10 que les électrons sont émis à partir du point triple. Ils sont ensuite attirés jusqu'au sommet du diélectrique par le champ électrique longitudinal. La figure 4.11 montre qu'au cours de leur migration vers le sommet ils acquièrent de l'énergie thermique.

On obtient au bout de  $10^{-10}$  secondes un état stationnaire caractérisé, conformément aux équations, par un flux de particules constant comme le montre la figure 4.12.

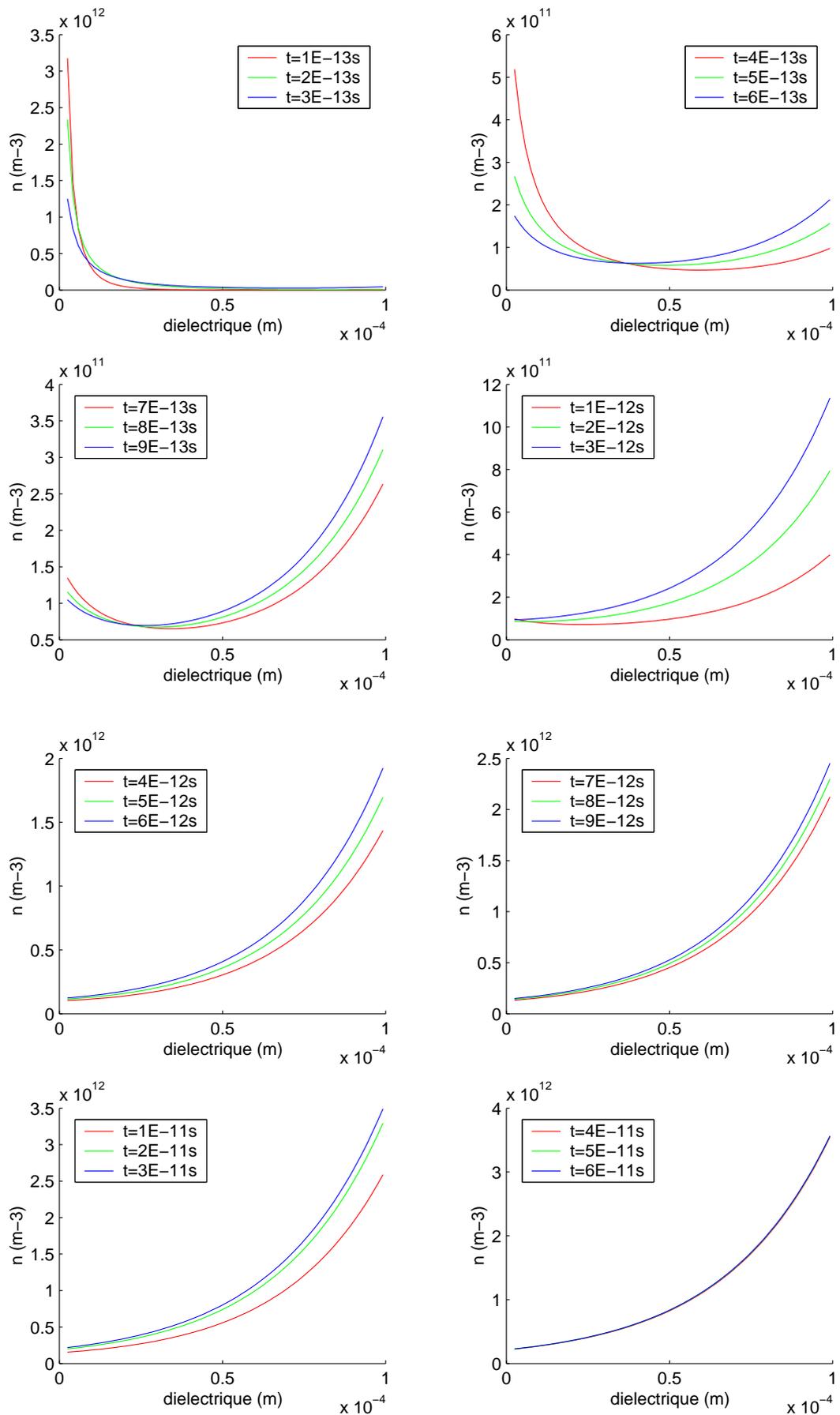


Figure 4.10: Densité volumique entre le point triple  $x = 0$  et le sommet du diélectrique  $x = L$ .

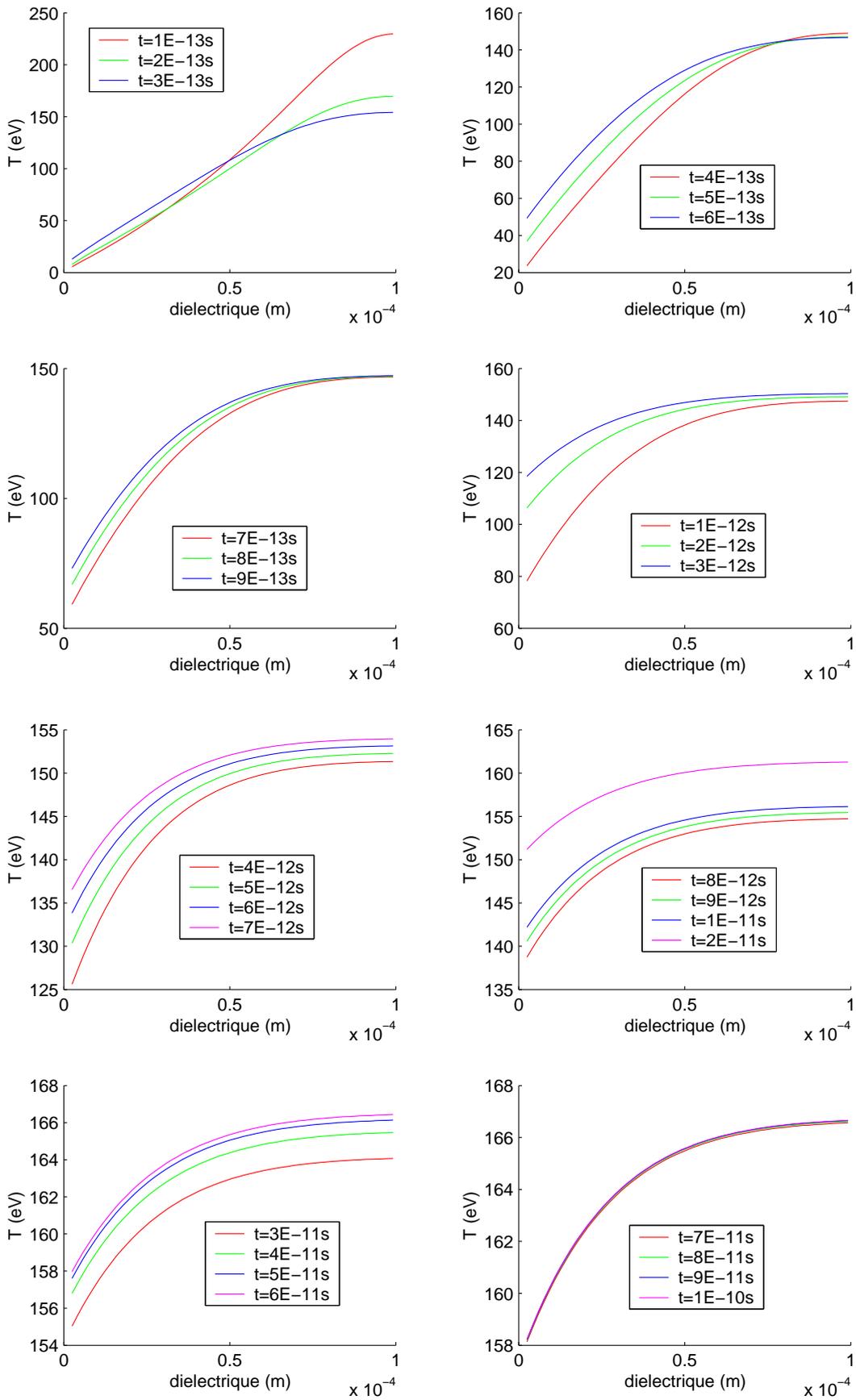


Figure 4.11: Température entre le point triple  $x = 0$  et le sommet du diélectrique  $x = L$ .

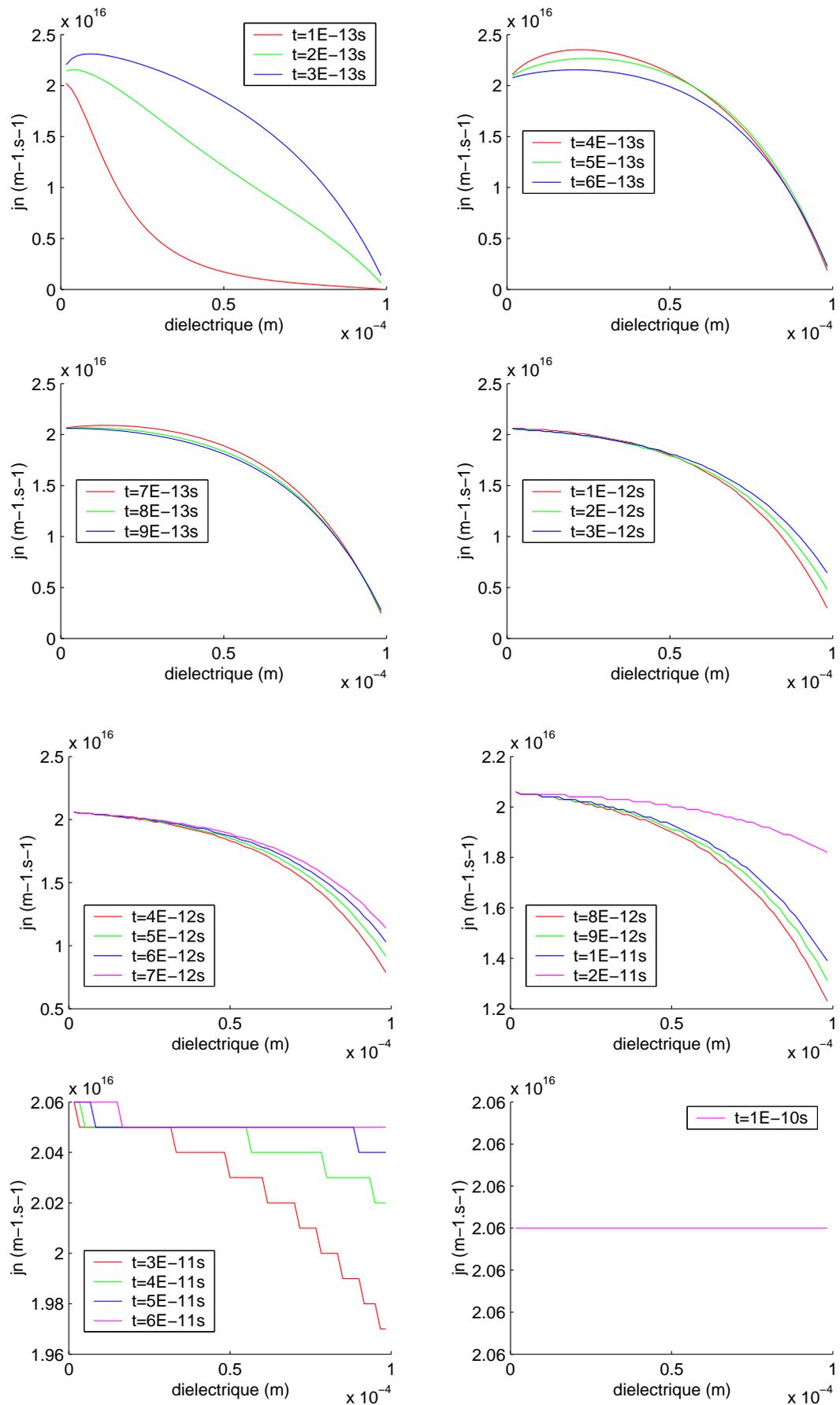


Figure 4.12: Flux de particules entre le point triple  $x = 0$  et le sommet du diélectrique  $x = L$ .

# Bibliography

- [1] W. G. Baker, D. F. Martyn, *Electric currents in the ionosphere, I. The conductivity*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A246** (1953), pp. 295–305 (voir également les parties II et III dans le même numéro).
- [2] N. Ben Abdallah, *Modèles cinétiques*, Cours de DEA, Toulouse, 2000-2001.
- [3] J. J. Berthelier, L'ionosphère, in "Environnement spatial; prévention des risques liés aux phénomènes de charge", Cépaduès éditions, Toulouse, France, 1996.
- [4] M. Blanc, la magnétosphère, in "Environnement spatial; prévention des risques liés aux phénomènes de charge", Cépaduès éditions, Toulouse, France, 1990.
- [5] F. Bouchut, *Introduction à la théorie mathématique des équations cinétiques*, L'état de la recherche de la S.M.F., 1998.
- [6] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, 1983.
- [7] J.P. Catani, *Introduction au problème de décharges induites par l'environnement*, Cours de technologie de l'environnement spatial, CNES-TOULOUSE, CEPADUES Editions, p. 413-428, Avril 1986.
- [8] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, The mathematical theory of dilutegases, Springer-Verlag, 1994.
- [9] C. Cercignani, The Boltzmann equation and its applications, Springer-Verlag, 1988.
- [10] S. Chapman, *The absorption and dissociative or ionizing effect of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating earth*, Proc. Phys. Soc. (London) **43** (1931), pp. 26-45.
- [11] S. Chapman, *The electrical conductivity of the ionosphere: a review*, Nuovo Cimento **4** (supplement) (1956), pp. 1385-1412.
- [12] F. F. Chen, Introduction to plasma physics, Plenum 1974.
- [13] M. Cho, *Arcing on high voltage solar arrays in low earth orbit: theory and computer particle simulation*, PhD thesis, Massachusetts Institutes of Technology, February 1992.

- [14] M. Cho, D.E. Hastings, *Dielectric charging process and arcing rates of high voltage solar arrays*, J. Spacecraft and Rockets, Vol. 28, p 698-706, 1990.
- [15] P. Degond, *Transport of trapped particles in a surface potential*, to appear, (2000).
- [16] P. Degond, R. Talaalout, M.H. Vignal, *Electron transport and secondary emission in a surface of solar cell*, proceeding of the Workshop ESA-CNES, 4 et 6 septembre 2000, ESTEC, Noordwijk, the Netherlands.
- [17] J. L. Delcroix, A. Bers, Physique des plasmas, Interéditions, 1974.
- [18] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer, Berlin, (1969).
- [19] B. G. Fejer, M. C. Kelley, *Ionospheric irregularities*, Reviews of geophysics and space physics, **18**, (1980), pp. 401–454.
- [20] V. Girault, P. A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer, 1986.
- [21] R. T. Glassey, The Cauchy problem in kinetic theory. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [22] E. Godlewski, P. A. Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, Springer, 1991.
- [23] C. Grimault, *Caractérisation des canaux de propagation satellite-terre SHF et EHF en présence de plasma post-nucléaire*, tèse de l'Université de Rennes 1, 1995.
- [24] D.E. Hastings, M. cho, H. Kuninaka, *Arcing rates for high voltage solar arrays: theory, experiment, and predictions*, J. Spacecraft and Rockets, Vol. 4, p 538-554, 1992.
- [25] J. D. Jackson, Classical electrodynamics, 3rd edition, Wiley, 1999.
- [26] I. Katz, D. B. Snyder, *Mechanism for spacecraft charging initiated destruction of solar arrays in GEO*, AIAA 98-1002, 36th Aerospace sciences meeting and exhibit, Reno, NV, january 1998.
- [27] H. G. Kesten, G. Papanicolaou, *A limit theorem for stochastic acceleration*, Commun. Math. Phys. **78** (1980), pp. 19-63.
- [28] N. A. Krall, A. W. Trivelpiece, Principles of plasma physics, San Francisco Press, 1986.
- [29] H. J. G. L. M. Lamers, J. P. Cassinelli, Introduction to stellar winds, Cambridge University Press, 1999.
- [30] L. Landau, E. Lifchitz, Physique théorique 2, théorie des champs, MIR, 1989.

- [31] P. Lantos, Le soleil, le vent solaire et leur effets sur l'environnement terrestre, in "Environnement spatial; prévention des risques liés aux phénomènes de charge", Cépaduès éditions, Toulouse, France, 1996.
- [32] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes, Dunod, 1968.
- [33] B. Mohammadi, O. Pironneau, Analysis of the K-Epsilon turbulence model, Masson, 1994.
- [34] G. K. Parks, Physics of space plasmas, an introduction, Addison-Wesley, 1991.
- [35] J. P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, Electromagnétisme, fondements et applications, Masson, 1997.
- [36] H. Rishbeth, O. K. Garriott, Introduction to ionospheric physics, Academic Press, New-York, 1969.
- [37] C. Ronchi, R. N. Sudan, P. L. Similon, *Effect of short-scale turbulence on kilometer wavelength irregularities in the equatorial electrojet*, J. Geophys. Res. **95** (1990), pp. 189–200.