Chapitre 0 : Rappel sur les fonctions continues et dérivables.

Ce chapitre rappelle (sans démontrer) quelques définitions et résultats fondamentaux déjà vus au 1er semestre.

1°) Fonctions continues : définitions et exemples.

Définition 1 : Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application, on dit que :

1°) f est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = f(a)$.

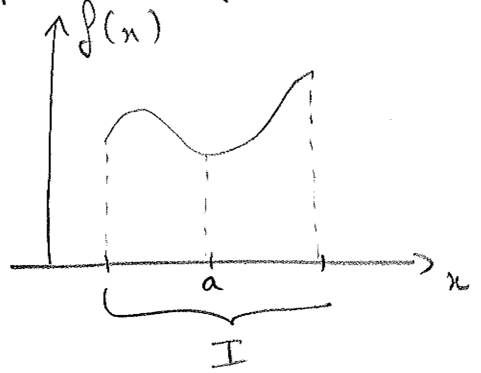
Ce qui à l'aide des quantificateurs se traduit par :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $x \in I$ et $|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

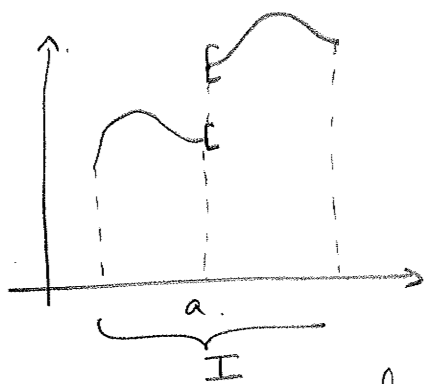
Ce qui se lit : " Pour tout epsilon > 0, il existe éta > 0 tel que $x \in I$ et $|x-a| \leq \eta$ entraine $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

2°) f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque : 1) Si I est un intervalle alors f est continue en a un point à l'intérieur de I est équivalent au fait que le graphe de f n'a "pas de coupure" en $x = a$.



Pas de coupure du graphe de f en $a \in I \Leftrightarrow f$ continue en a

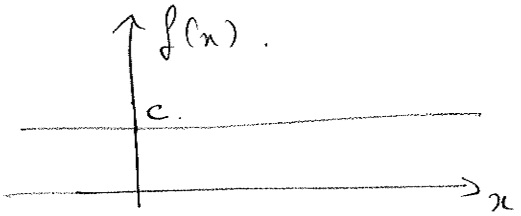


Coupure du graphe de f en $a \in I$ $\Leftrightarrow f$ n'est pas continue en a.

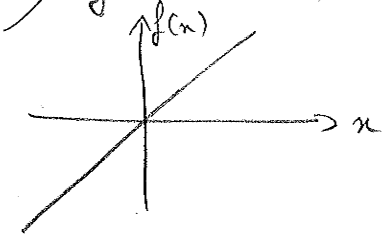
2°) Si f n'est pas continue en a, on dit que f est discontinue en a.

Exemples de fonctions continues.

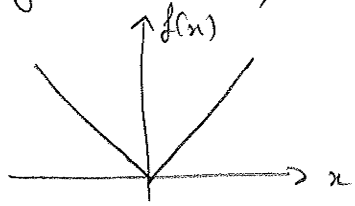
1°) $f(x) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où C est une constante réelle donnée.



2°) $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



3°) $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Il y en a beaucoup d'autres.... par exemple : exp, ln, cos, sin, polynômes....

2°) Quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

Théorème 1: Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue (sur I), on considère une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ convergente telle que $u_n \in I$, $\forall n \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \in I$.

Alors
$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

Théorème 2: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors il existe $x_m \in [a,b]$ et $x_M \in [a,b]$ tels que
$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in [a,b].$$

On note $f(x_M) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

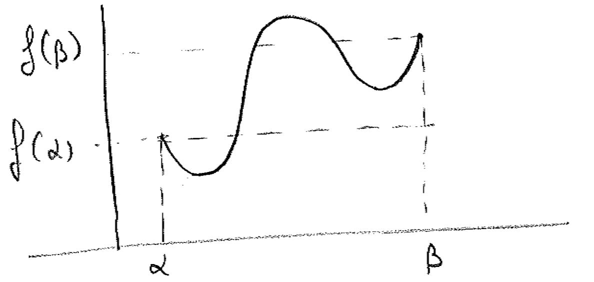
et $f(x_m) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

on considère $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue,
alors $\forall y \in [\mathrm{Min}(f(a), f(b)), \mathrm{Max}(f(a), f(b))]$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Remarques : 1°) En termes simples ce théorème exprime que pour aller de $f(\alpha)$ à $f(\beta)$ de manière continue, on doit prendre toutes les valeurs intermédiaires.
2°) Si f n'est pas monotone, f peut prendre d'autres valeurs que celles comprises entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

ex :



Corollaire 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Preuve : On écrit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\forall A > 0, \exists B_A > 0$ tel que $x < -B_A \Rightarrow f(x) < -A$.

On choisit $A = 1$. ainsi $\exists B_1$ tel que

$$x < -B_1 \Rightarrow f(x) < -1 < 0.$$

On choisit alors $x_1 = -B_1 - 1 < -B_1$ et donc $f(x_1) < 0$.

De même, on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\forall A > 0, \exists \tilde{B}_A > 0$ tel que $x > \tilde{B}_A \Rightarrow f(x) > A$.

On choisit $A = 1$ et $x_2 = \tilde{B}_1 + 1$. alors $f(x_2) > 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\forall y \in [f(x_1), f(x_2)]$, il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$.

Puisque $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$, $0 \in [f(x_1), f(x_2)]$ et donc il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = 0$.

4°) Fonctions dérivables : définitions et exemples.

Définition 2 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, on dit que

1°) f est dérivable en $a \in I$ si

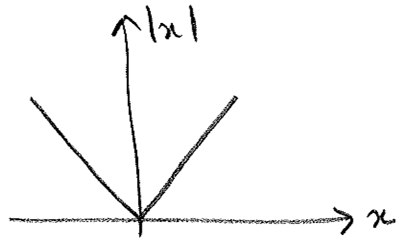
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ a+h \in I}} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\text{taux d'accroissement}} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

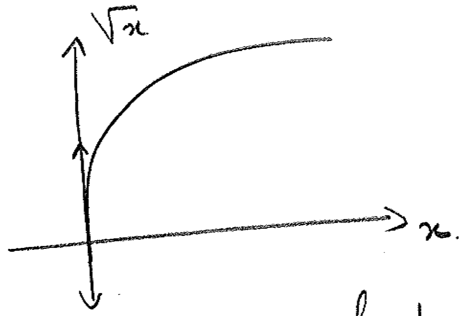
Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle dérivée de f au point a.

2°) f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Remarque : 1°) Géométriquement $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.

2°) Les deux exemples "les plus classiques" de fonctions non dérivables sont $|.|$ et $\sqrt{.}$ en 0.





Notons que la tangente en $x=0$ au graphe de $|.|$ n'existe pas et la tangente en $x=0$ au graphe de $\sqrt{.}$ est verticale donc la pente est ∞. et donc la limite du taux d'accroissement n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

On retrouve bien graphiquement que ces fonctions ne sont pas dérivables.

On rappelle le résultat suivant

__Théorème 3__: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application avec $I \subset \mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. alors.

f dérivable en $a \Longrightarrow f$ continue en a.

⚠ la réciproque est clairement fausse, c'est à dire f peut être continue en a et non dérivable en a., il suffit de penser à $|.|$ qui est continue et non dérivable en 0.

5°) Règles de Calculs sur les dérivées.

On rappelle les règles de calculs suivantes.

__Proposition 1__: Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$, alors.

1°). $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

2°) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

3°) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0)$

4°) Si $g(x_0) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.$$

<u>Proposition 2:</u> Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$, on suppose f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors.

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

<u>Remarque:</u> $g \circ f(x) = g(f(x))$.

<u>Corollaire 2:</u> Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$ bijective et dérivable, on note $f^{-1} : J \to I$ la réciproque de f. alors $\forall y \in J$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

<u>Preuve:</u> $\forall y \in J$, on a.

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

on dérive de chaque côté par rapport à y, on obtient:

$$f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

<u>exemple :</u>

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[. \qquad f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{x} \qquad\qquad y \longmapsto \ln y$$

alors $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$, $(\ln y)' = \dfrac{1}{f'(\ln y))} = \dfrac{1}{e^{\ln y}} = \dfrac{1}{y}$.

car $(e^{x})' = e^{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 1 : Théorème des accroissements finis et formule de Taylor.

1°) Extrema d'une fonction réelle

Définition 1 : On considère $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$;
Soit $x_0 \in I$, on dit que.

1°) x_0 est un minimum local de f dans I si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \ f(x_0) \leq f(x),$$

2°) x_0 est un minimum global de f dans I si
$\forall x \in I, \ f(x_0) \leq f(x)$,

3°) x_0 est un minimum de f dans I si x_0 est un minimum local ou global.

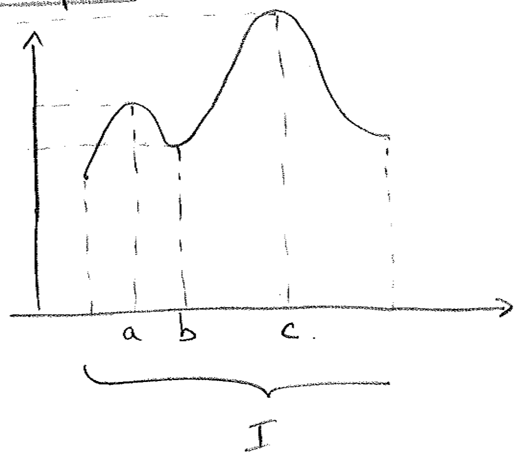
4°) x_0 est un maximum local de f dans I si
$\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \ f(x) \leq f(x_0)$,

5°) x_0 est un maximum global de f dans I si
$\forall x \in I, \ f(x) \leq f(x_0)$,

6°) x_0 est un maximum de f dans I si x_0 est un maximum local ou global.

7°) x_0 est un extremum si x_0 est un minimum ou un maximum.

exemple :



a est un maximum local.
b est un minimum local
c est un maximum global.

Remarques : 1- Un $\left\{\begin{matrix}\text{maximum} \\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$ global est aussi un $\left\{\begin{matrix}\text{maximum} \\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$ local.

2°) Si f est continue et $I = [a, b]$ alors le Théorème 2 du chapitre 0 assure l'existence d'un minimum global et d'un maximum global.

3°) On remarque qu'en un extremum la dérivée est nulle, on le démontre avec le résultat suivant :

Lemme 1 : Soit $I =]a,b[$ avec $a<b$ et $f : I \to \mathbb{R}$, si $x_0 \in I$ est un extremum et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve : Supposons que x_0 soit un maximum alors $\exists \alpha > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$.

donc $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha] \cap I.$$

et $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0] \cap I$$

On passe à la limite $x \to x_0$ dans les deux inégalités précédentes, il vient.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0 \\ \text{et } \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

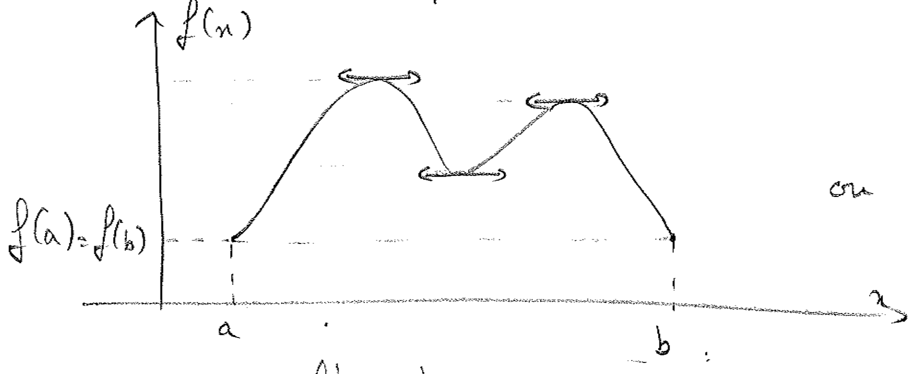
Si x_0 est un minimum la démonstration est identique et laissée en exercice.

2°) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

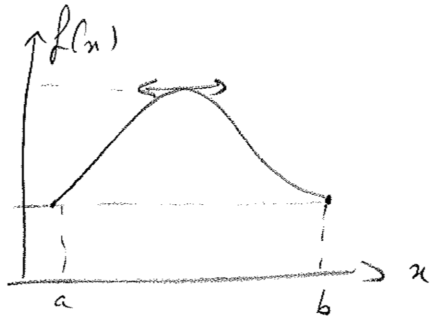
Théorème de Rolle : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarques : Ce théorème se comprend bien de manière intuitive.

En effet une fonction partant de $f(a)$ au point a et revenant à cette même valeur en un point b. doit si elle n'est pas constante croître (ou décroître) puis décroître (ou croître)



ou



ce qui assure l'existence d'au moins un extremum.

<u>Preuve:</u> D'après le Théorème 2 du chapitre 0 on sait qu'il existe $x_\Pi \in [a,b]$ et $x_m \in [a,b]$ tels que, $\forall x \in [a,b]$

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_\Pi).$$

Si $f(x_m) = f(x_\Pi)$ alors $f(x) = f(x_m) = f(x_\Pi)$ $\forall x \in [a,b]$

et $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$.

si $f(x_m) < f(x_\Pi)$ alors on a

$$f(x_m) \leq f(a) = f(b) < f(x_\Pi)$$

$$\text{ou } f(x_m) < f(a) = f(b) \leq f(x_\Pi).$$

Dans le premier cas, on a $x_\Pi \in]a,b[$ et donc f est dérivable en x_Π qui est un maximum, d'après le lemme 1, on a $f'(x_\Pi) = 0$.

Dans le deuxième cas, on a $x_m \in]a,b[$ et donc f est dérivable en x_m qui est un minimum, d'après le lemme 1, on a $f'(x_m) = 0$.

<u>Théorème des accroissements finis</u> : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve: On utilise le Théorème de Rolle avec la fonction

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

f continue sur $[a,b] \Rightarrow g$ continue sur $[a,b]$.

f dérivable sur $]a,b[\Rightarrow g$ dérivable sur $]a,b[$ et $\forall x \in]a,b[$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

on a $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}$.

$$= f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

donc $g(a) = g(b)$, d'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

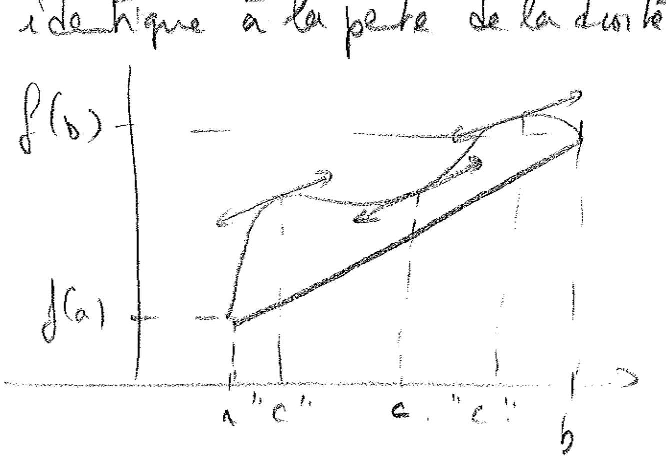
Remarque: 1°) C'est à l'aide des accroissements finis que l'on démontre qu'une fonction dérivable est croissante si et seulement si sa dérivée est positive, on le verra en exercice.

$\longrightarrow$

3°) Formule de Taylor-Lagrange.

Théorème: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ ou $b < a$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{cases}[a,b] \\ \text{ou} \\ [b,a]\end{cases} \to \mathbb{R}$, on suppose que f est dérivable n fois sur $\begin{cases}[a,b] \\ \text{ou } [b,a]\end{cases}$ à dérivées continues sur $\begin{cases}[a,b] \\ \text{ou } [b,a]\end{cases}$ et que la dérivée $(n+1)$ième existe sur $]a,b[$. alors $\exists\, c \in \begin{cases}]a,b[\\ \text{ou }]b,a[\end{cases}$ tel que.

2°) Géométriquement le théorème des accroissements finis exprime qu'il existe au moins un point entre a et b où la dérivée est identique à la pente de la droite reliant les points $(a, f(a))$ $(b, f(b))$



$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$
$$+ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

On rappelle que $\begin{cases} 0! = 1. \\ (n+1)! = n! \times (n+1), \forall n \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow 1! = 1,\ 2! = 2,$ $3! = 3\times 2,\ 4! = 4\times 3\times 2$ .....

<u>Remarque</u>: • Si $n = 0$, on a :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On retrouve le théorème des accroissements finis

• Si $n = 1$, on a :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(c)$$

• Si $n = 2$, on a :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(c).$$

.....

<u>Preuve</u>: On note

$$K = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right).$$

et $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [a,b]$.

$$G(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K.$$
$$= f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K.$$

On utiliser le théorème de Rolle avec G. Vérifions les hypothèses de ce théorème.

$\forall k = 0$ à n, $f^{(k)}$ est continue sur $[a,b]$, de plus $x \longmapsto (b-x)^k$ est continue sur $[a,b]$, $\forall k = 1, \dots, n+1$.

donc G est continue sur $[a,b]$.

$\forall x \in]a,b[$, $\forall k = 1$ à n.

$$\left(\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right)' = -\frac{k(b-x)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)$$

$$= -\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x).$$

Donc

$$G'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)$$

$$- \frac{(b-x)^n}{n!} K.$$

$$= \cancel{f'(x)} - \left(\cancel{f'(x)} + \cancel{(b-x) f''(x)} + \cancel{\frac{(b-x)^2}{2!} f^{(3)}(x)} + \cdots\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)}\right) + \left(\cancel{(b-x) f''(x)} + \cancel{\frac{(b-x)^2}{2!} f^{(3)}(x)} + \cdots\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)} + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\right) - \frac{(b-x)^n}{n!} K.$$

$$= \frac{(b-x)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(x) - K\right).$$

Donc G est dérivable sur $]a,b[$.

$$G(a) = \cancel{f(a)} + \cancel{(b-a) f'(a)} + \cdots + \cancel{\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}$$

$$+ \left(f(b) - \cancel{f(a)} - \cancel{(b-a) f'(a)} \cdots - \cancel{\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}\right)$$

$$= f(b).$$

$G(b) = f(b)$.

Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiée ainsi $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$G'(c) = 0 \iff \frac{(b-c)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(c) - K\right) = 0.$$

Mais $c \in]a, b[\Rightarrow \dfrac{(b-c)^n}{n!} \neq 0$.

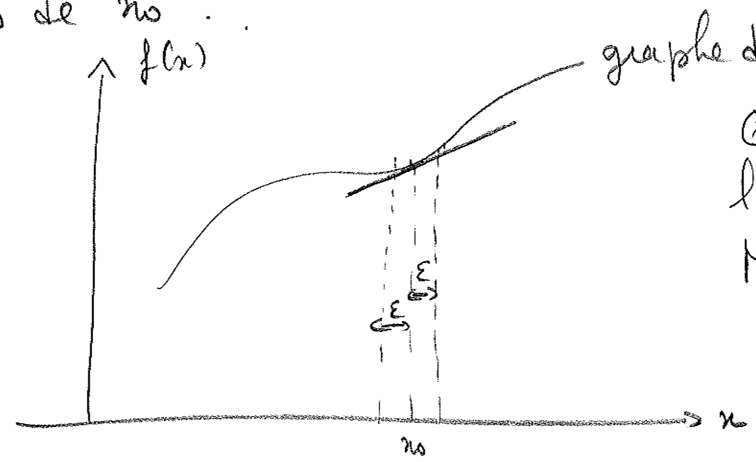
et donc $K = f^{(n+1)}(c)$.

$$\Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Chapitre 2: Développements limités

Les développements limités servent à approcher les fonctions par des polynômes dans un voisinage d'un point considéré.

Par exemple pour $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. et $x_0 \in I$, on peut approcher f par sa tangente pour des points suffisamment près de x_0.



On voit que si ε est très petit l'erreur commise en approchant f par sa tangente est petite

(*) $\longrightarrow$

Les développements limités sont très utiles, notamment pour calculer des limites indéterminées. Par exemple, on verra qu'il est très facile grace à cet outils de démontrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1°) Définitions et premières propriétés

Définition 1: (Développement limité à l'ordre n en x_0).

Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ et $x_0 \in]a,b[$, soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n donné par

$P(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$, tel que.

$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$.

(*) L'équation de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

On a donc

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

On reconnait une partie de la formule de Taylor-Lagrange.

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \mathcal{E}(x)$$

où $\mathcal{E}$ est une fonction réelle telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$.

Le terme $(x-x_0)^n \mathcal{E}(x)$ s'appelle le terme complémentaire ou le reste du développement limité et $P(x-x_0) = a_0 + \dots + a_n(x-x_0)^n$ s'appelle la partie régulière.

Remarques: 1°) C'est le terme complémentaire qui donne l'ordre du développement limité.

ex: si le terme complémentaire est donné par $(x-x_0)^2 \mathcal{E}(x)$ l'ordre du développement limité est 2.

2°) Localement autour de x_0, on approche la fonction par le polynôme $x \longmapsto P(x-x_0)$.

voir page 16 bis.

Proposition 1: Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$ et $x_0 \in]a,b[$, soit $n \in \mathbb{N}$, alors f a au plus un développement limité d'ordre n en x_0.

Preuve: Supposons que f admette deux développements limités d'ordre n en x_0. alors il existe P et Q polynômes de degré inférieur ou égal à n tels que

$$f(x) = P(x-x_0) + (x-x_0)^n \mathcal{E}_1(x)$$

et $f(x) = Q(x-x_0) + (x-x_0)^n \mathcal{E}_2(x)$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}_2(x) = 0$.

$$\Longrightarrow \frac{P(x-x_0) - Q(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = \mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

3°) On utilise très souvent la notation dite notation de Landau donnée par :

$$(x-x_0)^n \, \varepsilon(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Plus généralement pour f et g deux fonctions réelles définie autour d'un point x_0 dans $\mathbb{R}$, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on note

$$f = o(g) \text{ quand } x \to x_0.$$

s'il existe une fonction h définie autour de x_0 telle que

$$f(x) = g(x)\, h(x) \quad \text{avec} \quad h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

(17)

Mais P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n ainsi

$$P(x-x_0)-Q(x-x_0)=a_0+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n.$$

et donc.

$$\frac{P(x-x_0)-Q(x-x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{a_0}{(x-x_0)^n}+\frac{a_1}{(x-x_0)^{n-1}}+\dots+a_n.$$

or cette fonction tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, ce qui n'est possible que si $a_0=a_1=\dots a_n=0$.

donc $P=Q$ et par identification $\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

d'où f n'admet qu'un seul développement limité d'ordre n en x_0.

<u>Proposition 2:</u> Soit $f:]-b,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ avec $b>0$, si f possède un développement limité d'ordre $n\in\mathbb{N}$ en $x_0=0$ alors

1°) Si f est paire, la partie régulière du développement ne contient que des exposants pairs.

$$f(x)=f(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\dots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}f^{(2k)}(0)+\begin{cases}O(x^{2k+1})\\ x^{2k+1}\varepsilon(x)\end{cases}.$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $2k+1\leq n\leq 2k+2$

2°) Si f est impaire, la partie régulière du développement ne contient que des exposants impairs.

$$f(x)=x\,f'(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\dots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}f^{(2k+1)}(0)+\begin{cases}x^{2k+2}\varepsilon(x)\\ O(x^{2k+2})\end{cases}.$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que

$$2k+2\leq n\leq 2k+3.$$

Preuve : admise.

Remarque : Une fonction impaire vérifie toujours $f(0)=0$.

en effet $\forall x,\ f(-x)=-f(x)$, on choisit $x=0$, il vient

$f(0)=-f(0) \iff 2f(0)=0 \iff f(0)=0$.

2°) Existence des développements limités :

Théorème 1 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$, $n \in \mathbb{N}$, suppose que f est $(n+1)$ fois dérivable sur $[a,b]$ à dérivées continues alors $\forall x \in]a,b[$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \begin{cases} (x-x_0)^n\,\varepsilon(x). \\ o((x-x_0)^n). \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Preuve : On écrit le développement de Taylor entre x_0 et x, alors $\exists\, c_x \in]x,x_0[$ ou $]x_0,x[$ tel que.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x).$$

On pose $\varepsilon(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$.

$f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$ alors d'après le théorème 2 du chapitre 0, $\exists\, x_m, x_n$ tel que.

$$f^{(n+1)}(x_m) \leq f^{(n+1)}(y) \leq f^{(n+1)}(x_n) \quad \forall y \in [a,b].$$

en particulier.

$$f^{(n+1)}(x_m) \leq f^{(n+1)}(c_x) \leq f^{(n+1)}(x_n)$$

$$\Rightarrow |f^{(n+1)}(c_x)| \leq \operatorname{Max}\left(|f^{(n+1)}(x_m)|, |f^{(n+1)}(x_n)|\right) = M$$

Ainsi $0 \leq |\mathcal{E}(x)| \leq \dfrac{(x-x_0) M}{(n+1)!} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

d'après le Théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$.

3°) Développements limités usuels.

On utilise le théorème 1 précédent pour écrire des développements limités en 0.

3.1 Fonction exponentielle.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, on montre par récurrence (voir exercices) que

$\forall k \geq 0, \ f^{(k)}(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

donc $\forall n \geq 0$; d'après le théorème 1.

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{x^2}{2!} e^0 + \dots + \frac{x^n}{n!} e^0 + x^n \mathcal{E}(x). \text{ avec } \lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0.$$

et
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x^n)}$$

3.2 Autres fonctions

On procède de même pour établir les développements limités suivants

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \theta(x^n)}, \text{ avec } \lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0.$$

Remarque: On utilise toujours la même notation $\mathcal{E}(x)$ pour le terme d'erreur mais bien-sûr pour deux fonctions différentes les "$\mathcal{E}(x)$" sont différents

On change x en $-x$, on obtient

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + (-x)^2 + \dots + (-x)^n + \theta((-x)^n).$$
$$= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \theta(x^n).$$

et
$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \theta(x^n)}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}.$$

Remarque : si $\alpha = -1$, on retrouve le développement limité précédent.

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})} \quad (\text{ordre } 2n+1)$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}. \quad (\text{ordre } 2n+2)$$

Remarque : Conformément à la proposition 2, on retrouve que cosinus étant pair, la partie régulière de son développement limité ne contient que des puissances paires et sinus étant impair, la partie régulière de son développement limité ne contient que des puissances impaires.

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

en changeant x en $-x$, on a.

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}.$$

4°) Opérations sur les développements limités

Ces opérations vont nous permettre d'obtenir d'autres développements limités sans passer par la formule de Taylor-Lagrange.

Théorème 2 : Soient f et g deux fonctions admettant chacune un développement limité en 0 d'ordre n, on écrit

$f(x) = P(x) + o(x^n)$ avec degré $P \le n$.

et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré $Q \le n$.

1°) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité en 0 d'ordre n et

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + \theta(x^n)$$

2°) la fonction $f \cdot g$ admet un développement limité en 0 d'ordre n il est obtenu en ne conservant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n de $P(x) \cdot Q(x)$.

3°) Si $g(0) \neq 0$ alors f/g admet un développement limité d'ordre n en 0. Nous verrons sur des exemples comment l'obtenir.

4°) Si la fonction f' admet un développement limité en 0 d'ordre $n-1$, il est donné par $P'(x)$, on a :

$$f'(x) = P'(x) + \theta(x^{n-1})$$

5°) toute primitive de f, F définie par $F'(x) = f(x)$, admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0. On a.

$$F(x) = F(0) + \int_0^x P(y)\,dy + \theta(x^{n+1})$$

6°) Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n en 0.
Nous verrons sur des exemples

Preuve : admise.

Exemple:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta(x^5) \quad \text{d.l. d'ordre 5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \theta(x^6) \quad \text{d.l. d'ordre 5. et même 6.}$$

1°)

$$\cos x + \sin x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \theta(x^5) + \theta(x^6)$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \theta(x^5).$$

d.l. d'ordre 5.

2°)

$$\cos x \cdot \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{2!\,3!} + \frac{x^5}{4!} + \theta(x^5)..$$

$$= x - \frac{4x^3}{3!} + x^5\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{4!}\right) + \theta(x^5).$$

Mais $\frac{1}{5!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!}=\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{1}{2\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}$.

$$=\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{2\times5}{2\times3\times4\times5}+\frac{5}{2\times3\times4\times5}=\frac{16}{2\times3\times4\times5}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2}{15}.$$

Donc

$$\cos x.\sin x=x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\theta(x^5).$$

3°) voir 6°).

4°) $\cos x=(\sin x)'=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}+\theta(x^5)$.

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\theta(x^5).$$

5°) $\ln(1+x)=\ln 1+\int_0^x\frac{1}{1+y}\,dy$

$$=\int_0^x\Big(1-y+y^2+\dots+(-1)^{n-1}y^{n-1}+\overbrace{y^{n-1}\varepsilon(y)}^{\theta(y^{n-1})}\Big)\,dy$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\theta(x^n)$$

3°) et 6°) On va utiliser ces deux points pour donner un développement limité à l'ordre 6 de tan en $x=0$.

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-x^3/3!+x^5/5!+\theta(x^6)}{1-x^2/2!+x^4/4!+\theta(x^5)}.$$

On pose $u=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\theta(x^5)$ alors

$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+\theta(u^2)$. on s'arrête à l'ordre 2 car l'ordre 3 a un terme de plus bas degré en $(x^2)^3=x^6$ or il faut encore multiplier par $\sin x$, et on obtiendrait un terme de degré 7, or on veut un développement à l'ordre 6.

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)^2+\theta(x^5).$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^4}{4}-\cancel{2\frac{x^6}{2\times4!}}+\cancel{\frac{x^{16}}{(4!)^2}}+\theta(x^5).$$

$$=1+x^2/2!-x^4/4!+x^4/4+\theta(x^5)$$

et ainsi

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4}\right) + o(x^6)$$

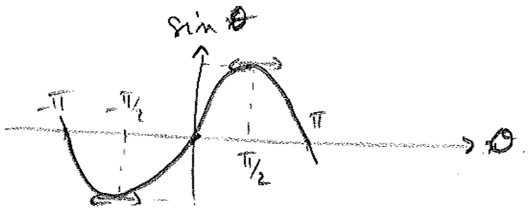
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2\times 3!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{4} + o(x^6)$$

$$= x + x^3\left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right) + x^5\left(\frac{1}{2\times3\times4\times5} + \frac{1}{2\times2\times3} - \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{4}\right) + o(x^6)$$

$$= x + x^3\frac{2}{3!} + x^5\left(\frac{1 - 2\times5 - 5 + 2\times3\times5}{2\times3\times4\times5}\right) + o(x^6)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

5°) Fonctions circulaires réciproques.



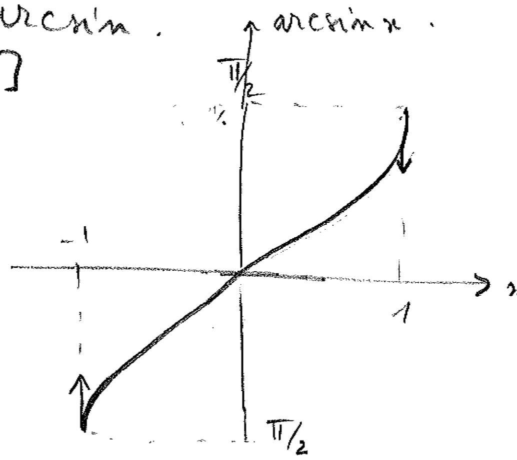
5.1) Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ elle est donc bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$, sa réciproque est notée arcsin.

donc $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

et $\forall\, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\forall x \in [-1, 1]$.

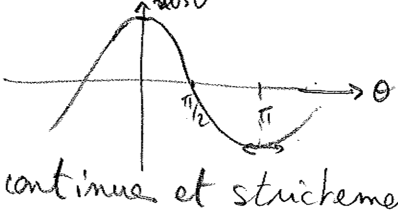
$$x = \sin\theta \iff \theta = \arcsin x.$$



$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[.$$

On obtient donc le développement de arcsinus en intégrant celui de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -1/2$ et $u = -x^2$, et en remarquant que $\arcsin 0 = 0$

5.2). Arccos.



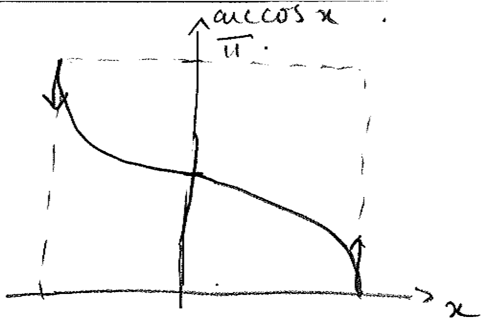
La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ elle est donc bijective de $[0, \pi]$ dans $\cos([0,\pi]) = [-1, 1]$, sa réciproque est notée arccos

donc $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

et $\forall \theta \in [0, \pi]$ et $\forall x \in [-1, 1]$.

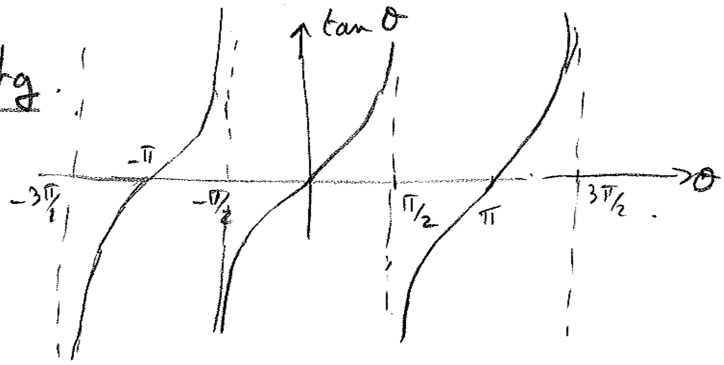
$$x = \cos\theta \iff \theta = \arccos x.$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$



On obtient donc le developpement de arccos en intègrant celui de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x^2$, et en remarquant que $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

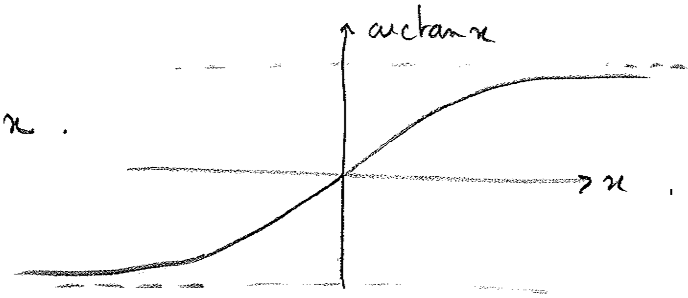
5.3] Arctan ou arctg.



La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. elle est donc bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$, sa réciproque est notée arctan donc $\arctan :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$x = \tan\theta \iff \theta = \arctan x.$$



$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

On obtient donc le DL de arctan en intègrant celui de $\frac{1}{1+u}$ avec $u = x^2$ et en remarquant que $\arctan 0 = 0$.

6°). Fonctions hyperboliques

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

cosinus hyperbolique — sinus hyperbolique — tangente hyperbolique.

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Chapitre 3 : Équivalents.

1°) Définitions :

Définition 1 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (a<b) ; $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$, on dit que f et g sont équivalentes en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point $f \sim g$.

Définition 2 : Soient $a \in \mathbb{R}$; $f, g :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f et g sont équivalentes en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

Définition 3 : Soient $a \in \mathbb{R}$; $f, g :]-\infty, a[\longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f et g sont équivalentes en $-\infty$ si

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note $f \underset{-\infty}{\sim} g$.

2°) Propriétés et opérations sur les équivalents

Théorème : Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f et g deux fonctions équivalentes en x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Preuve admise

Théorème: Soit f une fonction admettant un développement limité en x_0 alors f est équivalent au premier terme non nul de la partie régulière de son développement.

Preuve: on a, il existe $n \in \mathbb{N}$ et P polynôme de degré $\leq n$ tel que.

$$f(x) = P(x-x_0) + (x-x_0)^n \, \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On a $P(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$.

Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. tel que. a_k est le premier terme non non nul de P., on a donc $a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = 0$ et $a_k \neq 0$.

donc $P(x-x_0) = a_k(x-x_0)^k + \dots + a_n(x-x_0)^n$.

donc
$$\frac{f(x)}{a_k(x-x_0)^k} = 1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(x-x_0) + \dots + \frac{a_n}{a_k}(x-x_0)^{n-k} + \frac{(x-x_0)^{n-k}}{a_k} \cdot \varepsilon(x).$$

et donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{a_k(x-x_0)^k} = 1$.

On pose $Q(x) = a_k(x-x_0)^k$ alors $f \underset{x_0}{\sim} Q$.

Proposition:

1) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.
2) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 \cdot f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 \cdot g_2$.
 et $f_1 / f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 / g_2$.

Preuve:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$.

alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)\, f_2(x)}{g_1(x)\, g_2(x)} = 1$.

et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \frac{1}{g_1(x)/g_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \times \frac{g_2(x)}{f_2(x)}$

$= 1$.

Remarque : ⚠ On n'a pas le droit d'ajouter des équivalents.

$\Leftrightarrow$ si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors il se peut que $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\not\sim} g_1 + g_2$.

<u>exemple :</u> $\sin x \underset{0}{\sim} x$ car $\sin x = x + O(x^2)$.

et $-x \underset{0}{\sim} -x$. mais $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6} \underset{0}{\not\sim} x - x = 0$.

⚠ On n'a pas le droit de composer des équivalents.

$f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \not\Rightarrow f_2 \circ f_1 \underset{x_0}{\sim} g_2 \circ g_1$.

Chapitre 4 : Calculs de primitives et d'intégrales.

1°) Définition et primitives usuelles.

Définition 4.1 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, on appelle primitive de f, notée $\int f(x)\,dx$ la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Remarque : Une primitive n'est définie qu'à une constante près. Si F est une primitive de f alors $F+C$ est encore une primitive de f $\forall C \in \mathbb{R}$. En effet $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Définition 4.2 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on appelle intégrale de f entre a et b, le réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$. donné par $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Pour calculer des primitives ou des intégrales, il faut savoir reconnaître des expressions que l'on peut primitiver directement. On donne dans le tableau ci-dessous quelques exemples à connaître.

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int u'(x)(u(x))^\alpha\,dx = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\forall \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\lvert u(x)\rvert$
$\int e^x\,dx = e^x$	$\int u'(x)\,e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)}$.
$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int u'(x)\cos(u(x))\,dx = \sin(u(x))$.
$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int u'(x)\sin(u(x))\,dx = -\cos(u(x))$.

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x))$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\,dx = \arcsin(u(x))$.

2°) Formules d'intégration par partie et de changement de variable

Théorème 4.1 (Formule d'intégration par partie).

Pour toutes fonctions f et g dérivables sur I et tout $a, b \in I$, on a:

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \underbrace{f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)}_{[f(x)g(x)]_a^b} - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Preuve: On a $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

et $\int (f(x)\,g(x))'\,dx = f(x)\,g(x)$.

$$\int_a^b (f(x)\,g(x))'\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a).$$

Donc $\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = \int (f(x)g(x))'\,dx$
$= f(x)\,g(x)$.

et $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$.

Théorème 4.2 (Formule de changement de variables)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ continue sur I, on note $J = f(I) = \{f(x);\ x \in I\}$, soit $u: [a,b] \to I$ dérivable sur $[a,b]$ à dérivée continue sur $[a,b]$ alors.

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) \quad \text{où} \quad F(t) = \int f(t)\,dt.$$

$$\text{et} \int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

Preuve: on a $(F(u(x)))' = F'(u(x))\,u'(x) = f(u(x))\,u'(x)$.
d'où le résultat.

3°) Primitives des fractions rationnelles.

Définition 4.3: Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors.

α est racine de $P \iff P(\alpha) = 0 \iff P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ avec Q polynôme

Théorème 4.3: Tout polynôme peut s'écrire comme le produit de termes de la forme $(x-\alpha)^j$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$ et de termes de la forme $(ax^2+bx+c)^k$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2-4ac<0$. et $k \in \mathbb{N}$.

Preuve admise.

Définition 4.4: On appelle fraction rationnelle (de polynômes) une fonction de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P et Q des polynômes.

Théorème 4.4: Si $\deg P \geqslant \deg Q$. alors il existe D, R polynômes tels que $\deg R < \deg Q$ et tel que $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Preuve admise.

exemple:

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$. et $Q(x) = x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On effectue la division Euclidienne de P par Q.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 \quad\quad\quad & 2x^2 + x + 4 \\ \cline{1-1} 0 \quad + x^2 + 5x + 1 & \\ -x^2 - x \quad & \\ \cline{1-1} 4x + 1 & \\ -4x - 4 & \\ \cline{1-1} -3 & \end{array}$$

donc $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = (2x^2+x+4) - \dfrac{3}{x+1}$

Théorème 4.6 : Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère P un polynôme tel que $\deg P < k$. Alors, il existe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{a_k}{(x-\alpha)} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{a_1}{(x-\alpha)^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Preuve: Si $\deg P < k$ alors $\deg P' < k-1$, $\deg P'' < k-2, \dots$
$\dots \deg P^{(k)} < 0$ et donc $P^{(k)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On écrit le formule de Taylor entre x et α à l'ordre k.
alors $\exists c \in]x, \alpha[$ ou $]\alpha, x[$ tel que.

$$P(x) = P(\alpha) + (x-\alpha)P'(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} P^{(k-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^k}{k!} \underbrace{P^{(k)}(c)}_{=0}.$$

$$= P(\alpha) + P'(\alpha)(x-\alpha) + \dots + \frac{P^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}(x-\alpha)^{k-1}.$$

et donc $$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{P(\alpha)}{(x-\alpha)^k} + \frac{P'(\alpha)}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(\alpha)/(k-1)!}{(x-\alpha)}.$$

On pose $a_j = \dfrac{P^{(j-1)}(\alpha)}{(j-1)!}$, $\forall j = 1, \ldots, k$.

et donc $$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{a_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_k}{(x-\alpha)}.$$

Théorème 4.7: Soit $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$, $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{N}$ et $\forall j = 1$ à m, $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ tels que $b_j^2 - 4a_jc_j < 0$.

On note $Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^{m} (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{q_j}$

$\deg Q = \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{m} 2q_j$.

Soit P un polynôme tel que $\deg P < \deg Q$, alors il existe une unique famille de réels A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} tels que.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{A_{i1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ip_i}}{(x-\alpha_i)^{p_i}} \right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{a_jx^2+b_jx+c_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^2} + \cdots + \frac{B_{jq_j}x + C_{jq_j}}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^{q_j}} \right].$$

<u>Preuve admise</u>

<u>exemple:</u> $Q(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^3(x^2+1)$

$1^2 - 4\times1\times1 < 0$ $\quad 0^2 - 4\times1\times1 < 0$.

$\deg Q = 2+1+2\times3+2 = 11$.

$P(x) = x^3 + 2x - 1$, comme $\deg P = 3 < 11$, d'après le théorème précédent, on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$
$$+ \frac{Hx+I}{(x^2+x+1)^3} + \frac{Jx+K}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

avec $A, B, \dots, K \in \mathbb{R}$.

<u>Remarque</u>: L'intérêt de cette décomposition réside dans la recherche d'une primitive de P/Q.

On a :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{C}{x+2}\,dx$$
$$+ \int \frac{Dx+E}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \int \frac{Hx+I}{(x^2+x+1)^3}\,dx$$
$$+ \int \frac{Jx+K}{x^2+1}\,dx.$$

or $\displaystyle\int \frac{A}{x-1}\,dx = A \int \frac{1}{x-1}\,dx = A \ln|x-1|$

$$\int \frac{B}{(x-1)^2}\,dx = B \int (x-1)^{-2}\,dx = B \cdot \frac{(x-1)^{-3}}{-3} = -\frac{3B}{(x-1)^3}.$$

$$\int \frac{C}{x+2}\,dx = C \int \frac{1}{x+2}\,dx = C \ln|x+2|.$$

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+x+1}\,dx = D \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx + E \int \frac{1\,dx}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{D}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \left(E - \frac{D}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

$u'(x)/u(x)$.

$$= \frac{D}{2} \ln|x^2+x+1| + \left(E - D/2\right) \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Mais $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 3/4$.

et donc $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\frac{4}{3}(x+1/2)^2+1}$.

on pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)$ $\quad du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx$.

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right).$$

Nous verrons en TD comment primitiver les autres termes.