Luc Mieussens et Marie-Hélène Vignal

Option Informatique et Mathématiques

Partie mathématique

2007-2008

SUITES NUMERIQUES

Nous nous sommes très largement inspirés du polycopié de Jean-Pierre Dedieu et Jean-Claude Yakoubsohn écrit pour le L1 CIMP.

1 Définition des suites

Définition 1 *Une suite de nombres réels est une application* $\mathcal{U} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
On note traditionnellement $\mathcal{U}_n$ *au lieu de* $\mathcal{U}(n)$ *l'image de* n *par* $\mathcal{U}$. *De plus* $\mathcal{U}_n$ *est appelé le terme de rang* n *de la suite ou le terme général de la suite.*

Notation 1 *L'application est complètement déterminée par la donnée de tous les* $\mathcal{U}_n$, *ainsi on note* $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_n) = (\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *l'application donc la suite.*

On peut définir une suite de différentes manières :

- en donnant explicitement sa valeur en fonction de n,
- à l'aide d'une relation de récurrence.

Nous illustrons ceci par des exemples classiques :

Exemple 1 *Suite donnée en fonction de* n *:*

$$\mathcal{U}_n = n^2 + 4, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On note $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0} = (n^2+4)_{n\geq 0}$.

Exemple 2 *Suites récurrentes linéaires d'ordre* 1.
– *Suites arithmétiques :*

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + b, & \forall n \geq 0 \\ \mathcal{U}_0 \in \mathbb{R} \textit{ donné}, \end{cases}$$

où $b \in \mathbb{R}$ *est donné et s'appelle la raison de la suite* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$.
– *Suites géométriques*

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{n+1} = q\,\mathcal{U}_n, & \forall n \geq 0 \\ \mathcal{U}_0 \in \mathbb{R} \textit{ donné}, \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{R}$ *est donné et s'appelle la raison de la suite* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 3 *Suites récurrentes linéaires d'ordre* 2.

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{n+2} = a\,\mathcal{U}_{n+1} + b\,\mathcal{U}_n, & \forall n \geq 0 \\ \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \in \mathbb{R} \textit{ donnés}, \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ *sont donnés.*

Exemple 4 *Suites récurrentes non linéaires d'ordre* 1

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n), & \forall n \geq 0 \\ \mathcal{U}_0 \in \mathbb{R} \textit{ donné}, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une application.*

Remarque 1 *Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang, c'est à dire pour* $n \geq n_0 > 0$ *où* $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ *est donné.*
On note ces suites $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ *ou* $(\mathcal{U}_n)$ *lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.*
Exemples :

$$\mathcal{U}_n = \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1, \qquad \mathcal{U}_n = \frac{1}{n\,(n-1)}, \quad \forall n \geq 2,$$
$$\mathcal{U}_n = \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)}, \quad \forall n \geq 3.$$

2 Opérations sur les suites

Définition 2 *On considère deux suites réelles* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *et* $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$*.*

1. *On dit que* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *et* $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ *sont identiques si pour tout* $n \in I\!N$*, on a* $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n$*.*
2. *On définit la somme des suites* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *et* $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ *par la suite* $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0}$ *donnée par*
$$\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n, \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$
On note $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0} = (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$*.*
3. *On définit le produit des suites* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *et* $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ *par la suite* $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ *donnée par*
$$\mathcal{Z}_n = \mathcal{U}_n\,\mathcal{V}_n, \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$
On note $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0} = (\mathcal{U}_n\,\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$*.*
4. *Si* $\mathcal{V}_n \neq 0$ *pour tout* $n \in I\!N$*, on définit le quotient de* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *et* $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ *par la suite donnée par*
$$\left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)_{n\geq 0}.$$
5. *Si* $\lambda \in I\!R$*, on définit le produit de* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *par* λ*, par* $(\lambda\,\mathcal{U}_n)_{n\in I\!N}$*.*
6. *La suite nulle est notée* $(0)_{n\geq 0}$*.*

3 Propriétés élémentaires des suites

Propriété 1 *Toute combinaison linéaire de deux suites est encore une suite, c'est à dire que pour tous* λ*,* μ *dans* $I\!R$ *et pour toutes suites réelles* $(\mathcal{U}_n)$ *et* $(\mathcal{V}_n)$*, on a* $(\lambda\,\mathcal{U}_n + \mu\,\mathcal{V}_n)$ *qui est encore une suite.*
On dit que l'ensemble des suites réelles muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

Définition 3 *On considère* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *une suite réelle, on dit que*

1. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est constante s'il existe* $a \in I\!R$ *tel que*
$$\mathcal{U}_n = a, \qquad \forall n \in I\!N.$$
2. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est stationnaire s'il existe* $a \in I\!R$ *et* $N \in I\!N^\star$ *tels que*
$$\mathcal{U}_n = a, \qquad \forall n \geq N.$$
On dit que $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est constante à partir du rang* N*.*
3. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est majorée s'il existe* $M \in I\!R$ *tel que*
$$\mathcal{U}_n \leq M, \qquad \forall n \geq 0.$$
4. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est minorée s'il existe* $m \in I\!R$ *tel que*
$$\mathcal{U}_n \geq m, \qquad \forall n \geq 0.$$
5. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est bornée si* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est à la fois majorée et minorée.*
6. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est croissante si*
$$\mathcal{U}_n \leq \mathcal{U}_{n+1}, \qquad \forall n \geq 0.$$
7. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante si*
$$\mathcal{U}_n \geq \mathcal{U}_{n+1}, \qquad \forall n \geq 0.$$

8. $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *est périodique s'il existe* $p \in I\!N^\star$ *tel que*

$$\mathcal{U}_{n+p} = \mathcal{U}_n, \qquad \forall n \geq 0.$$

Il est parfois utile de ne considérer qu'une sous-partie de la suite

Exemple 5

$$(\mathcal{U}_{2\,n+1})_{n\geq 0} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_5, \cdots, \mathcal{U}_{2\,n+1}, \cdots),$$
$$(\mathcal{U}_{3\,n})_{n\geq 0} = (\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_6, \mathcal{U}_9, \cdots, \mathcal{U}_{3\,n}, \cdots).$$

Ces sous-parties sont appelées des sous-suites extraites ou sous-suites de $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$. On les définit de manière générale comme suit

Définition 4 *On considère* $k \;:\; \begin{array}{ccc} I\!N & \to & I\!N \\ n & \mapsto & k(n) \end{array}$ *strictement croissante, c'est à dire telle que pour tout* m *et* n *dans* $I\!N$ *on ait* $n < m \Rightarrow k(n) < k(m)$.
On note $k_n = k(n)$ *et on appelle sous-suite de* $(\mathcal{U}_n)$ *la suite définie par* $(\mathcal{U}_{k_n})_{n\in I\!N}$.

Dans les Exemples 5, on a $k_n = 2\,n+1$ et donc $k \;:\; \begin{array}{ccc} I\!N & \to & I\!N \\ n & \mapsto & 2\,n+1 \end{array}$ est bien strictement croissante et $k_n = 3\,n$ et donc $k \;:\; \begin{array}{ccc} I\!N & \to & I\!N \\ n & \mapsto & 3\,n \end{array}$ est également strictement croissante.

4 Principe ou démonstration par récurrence

On considère une propriété qui dépend d'un entier $n \in I\!N$ tel que $n \geq n_0$ avec $n_0 \in I\!N$ donné. On suppose de plus que pour tout $n \geq n_0$, cette propriété, notée $P(n)$, a un sens.

Exemple 6 $P_1(n) = (n < 2^n)$, $P_2(n) = (\mathcal{U}_n \leq 3)$ *où* $\mathcal{U}_n$ *est donné,* $P_3(n) = (n+2 \leq n)$.

Il est important de noter qu'à ce stade rien ne permet de dire si $P(n)$ est vraie ou fausse.

Théorème 2 *Soit* $n_0 \in I\!N$ *et* $P(n)$ *une propriété dépendant d'un entier* $n \in I\!N$ *et qui a un sens pour tout entier* n *tel que* $n \geq n_0$.

Si

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ P(n_0) \text{ est vraie,} \\ 2.\ \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ on a } (P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}), \end{array}\right.$$

alors $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq n_0$.
L'hypothèse 1. *s'appelle l'initialisation de la récurrence et l'hypothèse* 2. *s'appelle l'hérédité.*

Remarque 3 *L'hypothèse d'hérédité* ($P(n)$ *est vraie* $\Rightarrow P(n+1)$ *est vraie) ne veut pas dire que* $P(n)$ *est vraie, cela veut juste dire que si* $P(n)$ *est vraie alors* $P(n+1)$ *est vraie.*
Par exemple, on peut considérer la propriété (il pleut $\Rightarrow$ *il y a des nuages). Ceci ne veut pas dire qu'il pleuve au moment où on dit cela.*
Un autre exemple plus mathématique est celui donné par P_3 *dans les exemples 6. Il est clair que la propriété est fausse pour tout* $n \in I\!N$*, par contre l'hyopthèse* 2. *d'hérédité est vraie. En effet si* $n+2 \leq n$ *alors en ajoutant* 1 *de part et d'autre de l'inégalité, on obtient* $(n+1)+2 \leq n+1$. *C'est bien sûr l'hypothèse d'initialisation qui n'est pas vérifiée. Ceci montre d'ailleurs l'importance de vérifier TOUTES les hypothèses de la récurrence.*

Exemple d'utilisation du principe de récurrence

Montrons par récurrence que la propriété P_1 des exemples 6 est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est à dire que $n < 2^n$ pour tout $n \geq 0$.
Vérifions tout d'abord l'initialisation. Si $n = 0$ alors $2^n = 2^0 = 1 > 0 = n$, donc la propriété est vraie au premier rang $n = 0$.
Vérifions maintenant l'hérédité, pour cela supposons que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$ donné et montrons qu'elle est encore vraie pour le rang suivant $n+1$. Si la propriété est vraie au rang n alors $n < 2^n$ et on veut montrer que $n + 1 < 2^{n+1}$.

$$n < 2^n \Rightarrow n + 1 < 2^n + 1 = 2^n \left(1 + \frac{1}{2^n}\right). \tag{1}$$

Mais pour tout $n \geq 0$, on a

$$2^n = \exp(n \ln(2)) \geq \exp(0 \ln(2)) = 1,$$

car $\ln(2) > 0$ et que la fonction exp est croissante.
Ainsi $2^n \geq 1$ et donc $1 \leq 1/2^n$, en reportant ce résultat dans (1), on obtient

$$n + 1 < 2^n + 1 = 2^n \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq 2^n (1 + 1) = 2^n\, 2 = 2^{n+1}.$$

Ainsi, lorsque la propriété est vraie pour un rang donné, elle est encore vraie pour le suivant. Comme la propriété est vraie au premier rang $n_0 = 0$, alors le principe de récurrence implique que $n < 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

5 Suites convergentes

Définition 5 *On dit qu'une suite réelle $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (dans $\mathbb{R}$) s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l.$$

Ceci s'écrit mathématiquement :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon, \tag{2}$$

ce qui ce lit "Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon$ entraine $|\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon$".
Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Remarque 4 1. *La définition mathématique de la convergence (2) signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut) on peut trouver un rang dépendant de ε (N_ε) à partir duquel tous les éléments de la suites sont proches de la limite l dans le sens où la distance entre ces éléments et la limite est plus petite que ε.*

2. *Cette définition se comprend bien graphiquement. En effet, on peut dessiner la suite avec en abscisse les $n \in \mathbb{N}$ et en ordonnée les images $\mathcal{U}_n \in \mathbb{N}$. On représente sur la Figure 1 deux suites. À gauche, la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et à droite la suite $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 2. On voit sur cette dernière figure que pour la valeur de ε choisie sur le dessin, le rang N_ε à partir duquel les éléments de la suite $(\mathcal{V}_n)$ sont distants de la limite d'une longueur inférieure à ε est $N_\varepsilon = 3$.*
   On montre la convergence de la suite $(\mathcal{V}_n)$ de la manière suivante. On doit établir la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathcal{V}_n - 2| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

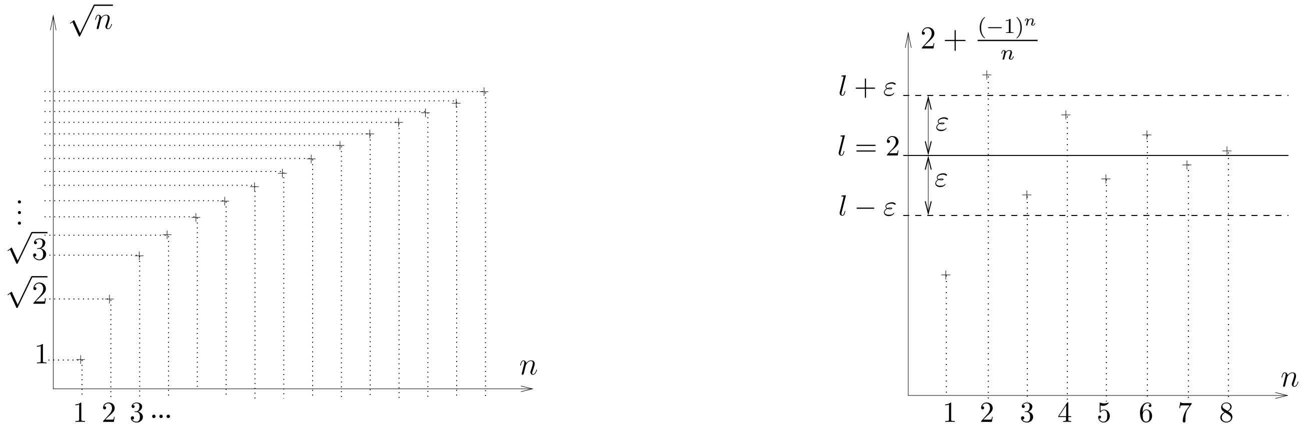

FIG. 1 – Représentation graphique d'une suite, à gauche la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et à droite la suite $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, on a alors

$$|\mathcal{V}_n - 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left|2+\frac{(-1)^n}{n} - 2\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

or ceci est vrai dès que

$$n \geq E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1,$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier relatif inférieur à x.
On a donc

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1.$$

Cet entier existe bien pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc démontré la propriété (3).
Notons que N_ε n'est pas défini de manière unique, en effet on pourrait aussi choisir

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 2.$$

Mais pour établir la convergence il suffit de démontrer l'existence d'un N_ε.

Proposition 5 *Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite réelle convergente, la limite de $(\mathcal{U}_n)$ est unique.*

Preuve : On suppose qu'il existe deux limites et on montre qu'elles sont identiques.
Supposons donc qu'il existe $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l_1, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l_2.$$

Ceci s'écrit mathématiquement

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N} \text{ tel que } |\mathcal{U}_n - l_1| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq N_{\varepsilon,1}, \tag{4}$$

et

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N} \text{ tel que } |\mathcal{U}_n - l_2| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq N_{\varepsilon,2}. \tag{5}$$

Mais alors,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - \mathcal{U}_n + \mathcal{U}_n - l_2| \leq |l_1 - \mathcal{U}_n| + |\mathcal{U}_n - l_2| \leq 2\,\varepsilon,$$

dès que $n \geq N_{\varepsilon,1}$ et $n \geq N_{\varepsilon,2}$, soit dès que $n \geq \max(N_{\varepsilon,1}, N_{\varepsilon,2})$.
On choisit dans (4) et (5), $\varepsilon = |l_1 - l_2|/4$ et on obtient

$$|l_1 - l_2| \leq \frac{|l_1 - l_2|}{2} \Leftrightarrow |l_1 - l_2| \leq 0 \Leftrightarrow |l_1 - l_2| = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2.$$

Ce qui termine la démonstration.

Proposition 6 *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente vers $l \in I\!\!R$, alors la limite de $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ ne dépend pas des premiers termes de la suite. Ce qui s'écrit mathématiquement :*
Soit $p \in I\!\!N$ fixé, et soit $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_{n+p}, \qquad \textit{pour tout } n \geq 0,$$

alors $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

Preuve : On écrit tout d'abord les hypothèses, c'est à dire la convergence de $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ vers l :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N_\varepsilon \in I\!\!N \text{ tel que } |\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon, \; \forall n \geq N_\varepsilon. \tag{6}$$

On écrit alors ce que l'on veut montrer, c'est à dire que $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ converge vers l :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N_{\varepsilon,1} \in I\!\!N \text{ tel que } |\mathcal{V}_n - l| = |\mathcal{U}_{n+p} - l| \leq \varepsilon, \; \forall n \geq N_{\varepsilon,1}. \tag{7}$$

On montre maintenant (7) en utilisant le fait que (6) est vraie. Soit $\varepsilon > 0$, on doit déterminer $N_{\varepsilon,1}$ pour que

$$|\mathcal{V}_n - l| = |\mathcal{U}_{n+p} - l| \leq \varepsilon.$$

Mais d'après (6)

$$|\mathcal{U}_{n+p} - l| \leq \varepsilon,$$

dès que $n + p \geq N_\varepsilon$ soit dès que $n \geq N_\varepsilon - p$.
Si $N_\varepsilon - p \geq 0$ on pose $N_{\varepsilon,1} = N_\varepsilon - p$ sinon, on pose $N_{\varepsilon,1} = 0$. Dans tous les cas, on a trouvé $N_{\varepsilon,1} = max(0, N_\varepsilon - p)$ tel que

$$|\mathcal{V}_n - l| = |\mathcal{U}_{n+p} - l| \leq \varepsilon, \; \forall n \geq N_{\varepsilon,1}.$$

Ce qui montre bien que $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.
Cette preuve peut être faite en exercice.

Théorème 7 *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Preuve : Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in I\!\!N}$ une suite convergeant vers $l \in I\!\!R$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N_\varepsilon \in I\!\!N \text{ tel que } |\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon, \; \forall n \geq N_\varepsilon.$$

On choisit $\varepsilon = 1$ alors il existe $N_1 \in I\!\!N$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait

$$|\mathcal{U}_n - l| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \mathcal{U}_n - l \leq 1 \Leftrightarrow l - 1 \leq \mathcal{U}_n \leq 1 + l.$$

On note $M = \max_{n=0}^{N_1} \mathcal{U}_n$ et $m = \min_{n=0}^{N_1} \mathcal{U}_n$ respectivement le plus grand et le plus petit des termes de l'ensemble $\{\mathcal{U}_0, \cdots, \mathcal{U}_{N_1}\}$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{U}_n \leq M, & \forall n \leq N_1 \\ \mathcal{U}_n \leq 1 + l, & \forall n \geq N_1 \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{U}_n \leq \max(M, 1 + l), \quad \forall n \in I\!\!N.$$

Et donc, $(\mathcal{U}_n)_{n\in I\!\!N}$ est majorée. De même, on montre que

$$\min(l - 1, m) \leq \mathcal{U}_n, \quad \forall n \in I\!\!N.$$

Ce qui montre que $(\mathcal{U}_n)_{n\in I\!\!N}$ est minorée. La suite est majorée et minorée donc bornée.

Remarque 8 *Toute suite convergente est bornée par contre toute suite bornée n'est pas nécessairement convergente, l'exemple le plus classique est la suite $((-1)^n)_{n\in I\!\!N}$. Nous verrons qu'on peut établir une réciproque partielle en montrant que toute suite bornée possède une sous-suite convergente. Dans l'exemple précédent $((-1)^n)_{n\in I\!\!N}$, les sous-suites paire et impaire sont convergentes puisqu'elles sont constantes $((-1)^{2n})_{n\in I\!\!N} = (1)_{n\in I\!\!N}$ et $((-1)^{2n+1})_{n\in I\!\!N} = (-1)_{n\in I\!\!N}$.*

6 Opérations et limites

On montre le résultat suivant :

Théorème 9 *On considère deux suites réelles $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ convergeant respectivement vers l et m. Alors*

1. *pour tout $\lambda \in I\!\!R$ et $\mu \in I\!\!R$, la suite $(\lambda\,\mathcal{U}_n + \mu\,\mathcal{V}_n)$ converge vers $\lambda\, l + \mu\, m$, on a*
$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda\,\mathcal{U}_n + \mu\,\mathcal{V}_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n + \mu \lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n.$$
2. *la suite $(\mathcal{U}_n\,\mathcal{V}_n)$ converge vers $l\, m$.*
3. *si $l \neq 0$ alors il existe $N \in I\!\!N$ tel que $\mathcal{U}_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$.*
De plus la suite $\left(\dfrac{1}{\mathcal{U}_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers $1/l$.
4. *soit une fonction $f : I\!\!R \to I\!\!R$ continue, la suite $(f(\mathcal{U}_n))_{n\in I\!\!N}$ converge vers $f(l)$.*
$$\lim_{n\to+\infty} f(\mathcal{U}_n) = f(\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n).$$
En particulier
$$\lim_{n\to+\infty} |\mathcal{U}_n| = |\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n|.$$

Preuve : Dans tous les cas, on écrit que les suites $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ convergent vers l et m. On a donc que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_{1,\varepsilon}$ et $N_{2,\varepsilon}$ dans $I\!\!N$ tels que

$$n \geq N_{1,\varepsilon} \Rightarrow |\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon,$$
$$n \geq N_{2,\varepsilon} \Rightarrow |\mathcal{V}_n - m| \leq \varepsilon.$$

1. Notons tout d'abord que pour le cas $\lambda = \mu = 0$, il n'y a rien à démontrer puisque dans ce cas $\lambda\,\mathcal{U}_n + \mu\,\mathcal{V}_n = 0$ pour tout $n \in I\!\!N$.
Dans le cas $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ (attention un des deux peut être nul mais pas les deux à la fois), on veut montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in I\!\!N \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\lambda\,\mathcal{U}_n - \mu\,\mathcal{V}_n - (\lambda\, l + \mu m)| \leq \varepsilon.$$
Soit donc $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in I\!\!N$, on a
$$|\lambda\,\mathcal{U}_n - \mu\,\mathcal{V}_n - (\lambda\, l + \mu m)| \leq |\lambda|\,|\mathcal{U}_n - l| + |\mu|\,|\mathcal{V}_n - m|,$$
Ainsi
$$|\lambda|\,|\mathcal{U}_n - l| + |\mu|\,|\mathcal{V}_n - m| \leq \varepsilon \Rightarrow |\lambda\,\mathcal{U}_n - \mu\,\mathcal{V}_n - (\lambda\, l + \mu m)| \leq \varepsilon.$$
Mais, on peut rendre $|\mathcal{U}_n - l|$ et $|\mathcal{V}_n - m|$ aussi petit que l'on veut. Soit $\varepsilon_1 > 0$,
$$n \geq N_{1,\varepsilon_1} \Rightarrow |\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon_1,$$
$$n \geq N_{2,\varepsilon_1} \Rightarrow |\mathcal{V}_n - m| \leq \varepsilon_1,$$
et donc
$$n \geq \max(N_{1,\varepsilon_1}, N_{2,\varepsilon_1}) \Rightarrow |\lambda|\,|\mathcal{U}_n - l| + |\mu|\,|\mathcal{V}_n - m| \leq (|\lambda| + |\mu|)\,\varepsilon_1.$$
Puisque $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, on a $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ et il suffit de choisir
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$
pour avoir
$$|\lambda\,\mathcal{U}_n - \mu\,\mathcal{V}_n - (\lambda\, l + \mu m)| \leq \varepsilon,$$
et dans ce cas on peut choisir
$$N_\varepsilon = \max(N_{1,\varepsilon_1}, N_{2,\varepsilon_1}),$$
avec $\varepsilon_1 = \varepsilon/(|\lambda| + |\mu|)$.

2. Pour ce point, on veut montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathcal{U}_n\, \mathcal{V}_n - l\, m| \leq \varepsilon.$$
Soit donc $\varepsilon > 0$, on a
$$|\mathcal{U}_n\, \mathcal{V}_n - l\, m| = |\mathcal{U}_n\, \mathcal{V}_n - l\, \mathcal{V}_n + l\, \mathcal{V}_n - l\, m| \leq |\mathcal{V}_n|\, |\mathcal{U}_n - l| + |l|\, |\mathcal{V}_n - m|.$$
Comme précédemment, on peut rendre $|\mathcal{U}_n - l|$ et $|\mathcal{V}_n - m|$ aussi petit que l'on veut. Soit $\varepsilon_1 > 0$,
$$n \geq \max(N_{1,\varepsilon_1}, N_{2,\varepsilon_1}) \Rightarrow |\mathcal{U}_n\, \mathcal{V}_n - l\, m| \leq |\mathcal{V}_n|\, \varepsilon_1 + |l|\, \varepsilon_1.$$
Mais $(\mathcal{V}_n)$ est convergente donc $(\mathcal{V}_n)$ est bornée et ainsi, il existe $M > 0$ tel que
$$|\mathcal{V}_n| \leq M,$$
et
$$n \geq \max(N_{1,\varepsilon_1}, N_{2,\varepsilon_1}) \Rightarrow |\mathcal{U}_n\, \mathcal{V}_n - l\, m| \leq (M + |l|)\, \varepsilon_1.$$
Il suffit donc de choisir
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M + |l|},$$
pour avoir
$$|\mathcal{U}_n\, \mathcal{V}_n - l\, m| \leq \varepsilon,$$
et dans ce cas on peut choisir
$$N_\varepsilon = \max(N_{1,\varepsilon_1}, N_{2,\varepsilon_1}),$$
avec $\varepsilon_1 = \varepsilon/(M + |l|)$.
3. On montre tout d'abord qu'il existe $N \in I\!N$ tel que $\mathcal{U}_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$.
Notons tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$
$$|\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq \mathcal{U}_n - l \leq \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon \leq \mathcal{U}_n \leq l + \varepsilon.$$
Si $l > 0$, on choisit $\varepsilon = l/2$ et alors
$$0 < l/2 = l - l/2 \leq \mathcal{U}_n,$$
pour tout $n \geq N_{1,l/2}$. De même, si $l < 0$, on choisit $\varepsilon = -l/2$ et alors
$$\mathcal{U}_n \leq l - l/2 = l/2 < 0,$$
pour tout $n \geq N_{1,-l/2}$.
Dans tous les cas, on a
$$|\mathcal{U}_n| \geq |l|/2 > 0, \qquad \text{pour tout } n \geq N_{1,|l|/2} = N,$$
et donc $\mathcal{U}_n$ non nul pour $n \geq N$.
Montrons maintenant que $(1/\mathcal{U}_n)$ converge vers $1/l$. Pour cela, on doit montrer
$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{\mathcal{U}_n} - \frac{1}{l} \right| \leq \varepsilon.$$
On se place d'emblée avec $n \geq N = N_{1,|l|/2}$ et donc
$$|\mathcal{U}_n| \geq |l|/2.$$
De plus, on a
$$\left| \frac{1}{\mathcal{U}_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|\mathcal{U}_n - l|}{|\mathcal{U}_n|\, |l|} \leq \frac{|\mathcal{U}_n - l|}{|l|/2\, |l|} = 2\, \frac{|\mathcal{U}_n - l|}{|l|^2}.$$
Il suffit donc de choisir
$$N_\varepsilon = N_{1,\varepsilon_1},$$
avec $\varepsilon_1 = |l|^2\, \varepsilon/2$.

4. On admet le cas général, il nécessite la définition mathématique d'une fonction continue qui n'est pas connue à ce stade. On peut toutefois faire la démonstration dans le cas particulier de $|\cdot|$. Elle repose sur l'inégalité suivante

$$||a|-|b|| \leq |a-b|,$$

pour tout a et b dans $I\!R$. En effet, si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathcal{U}_n - l| \leq \varepsilon.$$

alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow ||\mathcal{U}_n| - |l|| \leq \varepsilon,$$

puisque pour tout $n \geq 0$, on a

$$||\mathcal{U}_n| - |l|| \leq |\mathcal{U}_n - l|\,.$$

La réciproque du résultat précédent est en général fausse excepté pour la cas particulier de $l = 0$. On le résultat suivant

Corollaire 10 *Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite réelle alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes*

1. $(\mathcal{U}_n)$ *converge vers* 0.
2. $(|\mathcal{U}_n|)$ *converge vers* 0.

Preuve : Si $(\mathcal{U}_n)$ converge vers 0, alors d'après le théorème précédent (point *4.*), on sait que $(|\mathcal{U}_n|)$ converge vers $|0| = 0$. Réciproquement, si $(|\mathcal{U}_n|)$ converge vers 0 alors

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \Big||\mathcal{U}_n| - 0\Big| = |\mathcal{U}_n| \leq \varepsilon,$$

ce qui veut exactement dire que $(\mathcal{U}_n)$ converge vers 0.

7 Comparaison de limites

Théorème 11 *Soient $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergeant respectivement vers $l_u \in I\!R$ et $l_v \in I\!R$, on suppose que pour tout $n \geq 0$, on ait*

$$\mathcal{U}_n \leq \mathcal{V}_n,$$

alors

$$l_u = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n \leq \lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = l_v.$$

Preuve : On écrit les hypothèses, c'est à dire ici les trois points suivants

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l_u \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_{u,\varepsilon} \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_{u,\varepsilon} \Rightarrow |\mathcal{U}_n - l_u| \leq \varepsilon, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = l_v \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_{v,\varepsilon} \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_{v,\varepsilon} \Rightarrow |\mathcal{V}_n - l_v| \leq \varepsilon, \tag{9}$$

$$\mathcal{U}_n \leq \mathcal{V}_n, \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{10}$$

On raisonne par l'absurde, on suppose $l_u > l_v$.
Remarquons que d'après (10), pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 < l_u - l_v = l_u - \mathcal{U}_n + \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n + \mathcal{V}_n - l_v \leq l_u - \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n - l_v,$$

or les termes de droite peuvent être choisis aussi petit qu'on veut. On choisit dans (8) et (9), $\varepsilon < |l_u - l_v|/2$ et alors pour tout $n \in I\!N$ tel que $n \geq N_{u,\varepsilon}$ et $n \geq N_{v,\varepsilon}$, on a

$$l_u - \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n - l_v \leq 2\,\varepsilon < |l_u - l_v| = l_u - l_v \quad \Rightarrow \quad l_u - l_v < l_u - l_v,$$

ce qui absurde on a donc nécessairement

$$l_u \leq l_v.$$

Remarque 12 1. *Nous avons déjà vu que la limite d'une suite ne dépend pas des premiers termes de la suite. Ainsi, ce résultat est encore vrai si la comparaison n'est possible qu'à partir d'un certain rang. C'est à dire que si $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites convergentes et s'il existe $n_0 \in I\!N$ tel que*

$$\mathcal{U}_n \leq \mathcal{V}_n, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n \leq \lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n.$$

La démonstration de ce résultat est laissée en exercice.

2. *Il n'est pas possible d'affiner ce résultat avec des inégalités strictes. En effet, il existe des suites convergentes $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ telles que*

$$\mathcal{U}_n < \mathcal{V}_n, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0,$$

et pourtant

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n.$$

Il suffit de choisir $\mathcal{U}_n = 0$ et $\mathcal{V}_n = 1/n$ pour tout $n \geq 0$.

Théorème 13 *Soient $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergeant vers la même limite $l \in I\!R$ et soit $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que*

$$\mathcal{V}_n \leq \mathcal{W}_n \leq \mathcal{U}_n, \qquad \text{pour tout } n \in I\!N,$$

alors la suite $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

Preuve : On écrit que $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ convergent vers l, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_{u,\varepsilon} \text{ et } N_{v,\varepsilon} \text{ dans } I\!N \text{ tels que } \begin{cases} n \geq N_{u,\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon \leq \mathcal{U}_n - l \leq \varepsilon, \\ n \geq N_{v,\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon \leq \mathcal{V}_n - l \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe N_ε tel que

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathcal{W}_n - l| \leq \varepsilon.$$

Mais

$$\mathcal{V}_n - l \leq \mathcal{W}_n - l \leq \mathcal{U}_n - l$$

Ainsi pour tout $n \in I\!N$ tel que $n \geq N_{u,\varepsilon}$ et $n \geq N_{v,\varepsilon}$ c'est à dire pour tout $n \geq \max(N_{u,\varepsilon}, N_{v,\varepsilon})$, on a

$$-\varepsilon \leq \mathcal{W}_n - l \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |\mathcal{W}_n - l| \leq \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir $N_\varepsilon = \max(N_{u,\varepsilon}, N_{v,\varepsilon})$.

Remarque 14 *Comme précédemment ce résultat est encore vrai si la comparaison n'est possible qu'à partir d'un certain rang.*

Très souvent, on utilise le corollaire suivant :

Corollaire 15 *Soit* $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ *une suite convergeant vers* 0 *et* $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0}$ *une suite telle que pour tout* $n \geq 0$*, on ait*

$$|\mathcal{W}_n| \leq |\mathcal{U}_n|.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = 0.$$

Preuve : Tout d'abord remarquons que puisque $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 alors $(|\mathcal{U}_n|)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
Ainsi, d'après le théorème précédent, on a

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathcal{W}_n| = 0,$$

il suffit de choisir $\mathcal{V}_n = 0$ pour tout $n \in I\!N$.
Puisqu'il y a équivalence entre la suite converge vers 0 et la suite des valeurs absolues converge vers 0, on a $(\mathcal{W}_n)$ qui converge aussi vers 0.

8 Limites infinies

Définition 6 *On dit qu'une suite* (u_n) *diverge vers* $+\infty$ *si*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Mathématiquement ceci s'écrit

$$\forall A > 0,\ \exists\ N_A \in I\!N \text{ tel que } n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A, \tag{11}$$

ce qui se lit, pour tout $A > 0$ *il existe* N_A *dans* $I\!N$ *tel que* $n \geq N_A$ *entraine* $u_n \geq A$.

Remarque 16 *La propriété mathématique (11) peut aussi s'écrire*

$$\forall A > 0,\ \exists\ N_A \in I\!N \text{ tel que } u_n \geq A,\ \forall n \geq N_A.$$