

Algèbres de modules et représentations des groupes de difféotopie des surfaces – partie II

Matthieu Faitg

Rappels. On se réfère aux notes de la partie I ainsi : [GdT1].

- $\Sigma_{g,0}^\circ$ est la surface compacte orientée de genre g avec une composante de bord.
- $H = (H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon, S)$ est une \mathbb{k} -algèbre de Hopf de dimension finie, factorisable et enrubannée [Kas95, §VIII.2, §XIV.6]. On note $R = \sum_i R'_i \otimes R''_i$ la R -matrice de H , v son élément ruban et $R^{fl} = \sum_i R''_i \otimes R'_i$ le “flip” de R . On utilise la notation de Sweedler : $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.
- $\pi_1(\Sigma_{g,0}^\circ) = \text{Free}\langle b_1, a_1, \dots, b_g, a_g \rangle$, où les courbes b_i et a_i sont fixés dans [GdT1].
- On fera beaucoup usage des actions corégulières à gauche et à droite de H sur H^* , définies par

$$\forall h, x \in H, \forall \varphi \in H^*, \quad \langle h \triangleright \varphi, x \rangle = \langle \varphi, xh \rangle \text{ et } \langle \varphi \triangleleft h, x \rangle = \langle \varphi, hx \rangle. \quad (1)$$

- $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ est l’espace vectoriel H^* muni d’un “produit tordu par R ” [GdT1, Déf. 2.4]. C’est un module-algèbre pour l’action coadjointe à droite de H : $\text{coad}^r(h)(\varphi) = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \triangleright \varphi \triangleleft h_{(1)}$.
- $\mathcal{L}_{g,0}(H) = (H^*)^{\otimes 2g} = \underset{(b_1)}{H^*} \otimes \underset{(a_1)}{H^*} \otimes \dots \otimes \underset{(b_g)}{H^*} \otimes \underset{(a_g)}{H^*}$ en tant qu’espace vectoriel. La deuxième égalité signifie que chacune des copies de H^* dans $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ est implicitement associée à un générateur de $\pi_1(\Sigma_{g,0}^\circ)$, ce qui donne des injections linéaires $\mathfrak{i}_{b_j}, \mathfrak{i}_{a_j} : H^* \rightarrow \mathcal{L}_{g,0}(H)$ pour $1 \leq j \leq g$.
- Le produit dans $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ est tel que

$$\psi_1 \otimes \varphi_1 \otimes \psi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \psi_g \otimes \varphi_g = \mathfrak{i}_{b_1}(\psi_1) \mathfrak{i}_{a_1}(\varphi_1) \mathfrak{i}_{b_2}(\psi_2) \mathfrak{i}_{a_2}(\varphi_2) \dots \mathfrak{i}_{b_g}(\psi_g) \mathfrak{i}_{a_g}(\varphi_g) \quad (2)$$

et les injections linéaires $\mathfrak{i}_{b_j}, \mathfrak{i}_{a_j}$ sont des morphismes d’algèbres $\mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,0}(H)$.¹ Ainsi, pour multiplier dans $\mathcal{L}_{g,0}(H)$, on commute des $\mathfrak{i}_{b_j}(\psi_j), \mathfrak{i}_{a_j}(\varphi_j)$ avec des $\mathfrak{i}_{b_k}(\psi_k), \mathfrak{i}_{a_k}(\varphi_k)$ [GdT1, éq. (19), (20)] puis on utilise le produit dans $\mathcal{L}_{0,1}(H)$. $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ est un H -module-algèbre à droite, l’action de H étant entièrement définie par la propriété suivante : les $\mathfrak{i}_{b_j}, \mathfrak{i}_{a_j} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,0}(H)$ sont des morphismes de H -modules à droite.

- On a un morphisme d’algèbres

$$\Phi_{0,1} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow H, \quad \varphi \mapsto (\varphi \otimes \text{id})(RR^{fl}) = \sum_{i,j} \varphi(R'_i R''_j) R''_i R'_j. \quad (3)$$

“ H est factorisable” signifie que $\Phi_{0,1}$ est un isomorphisme.

- Plus généralement, il y a un morphisme d’algèbres $\Phi_{g,n} : \mathcal{L}_{g,n}(H) \rightarrow \text{End}(H^*)^{\otimes g} \otimes H^{\otimes n}$ appelé “morphisme d’Alekseev”. Sous nos hypothèses sur H c’est un isomorphisme [GdT1, §2.3]. En particulier $\mathcal{L}_{g,0}(H) \cong \text{End}((H^*)^{\otimes g}) \cong M_d(\mathbb{k})$, avec $d = \dim(H)^g$.

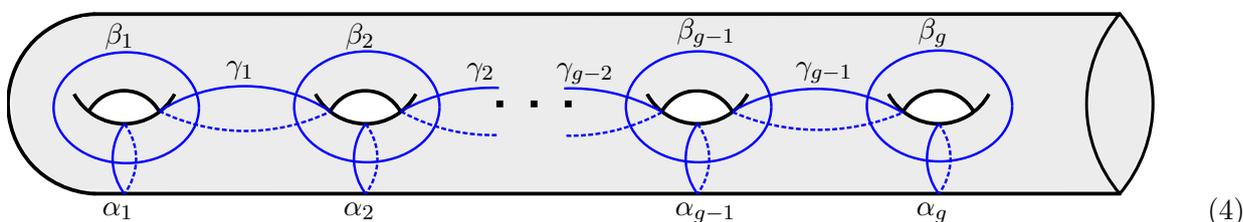
¹On rappelle que $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ est H^* en tant qu’espace vectoriel mais pas en tant qu’algèbre.

1 Introduction

Dans le premier exposé on a construit une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$ de la façon suivante :

1. Il y a un morphisme de groupes $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ) \rightarrow \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{L}_{g,0}(H))$, $f \mapsto \tilde{f}$.
2. Puisque $\mathcal{L}_{g,0}(H) \cong \text{End}_{\mathbb{k}}((H^*)^{\otimes g})$ on a une représentation ρ sur $(H^*)^{\otimes g}$, unique à iso près.
3. Puisque $\mathcal{L}_{g,0}(H) \cong M_d(\mathbb{k})$, tout automorphisme est intérieur. Ainsi, pour tout $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ il existe un élément inversible $\hat{f} \in \mathcal{L}_{g,0}(H)$ unique à scalaire près tel que $\tilde{f}(x) = \hat{f}x\hat{f}^{-1}$.
4. On a donc une représentation projective $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ) \rightarrow \text{PGL}((H^*)^{\otimes g})$ donnée par $f \mapsto \rho(\hat{f})$.
5. Étape supplémentaire (dont nous ne nous parlerons pas davantage) : il existe un sous-espace $\text{Inv}_g \subset (H^*)^{\otimes g}$ stable par l'action de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$. Lorsqu'on se restreint à Inv_g on obtient une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0})$; noter qu'il s'agit de la surface fermée ici.

Il reste maintenant à *décrire explicitement* cette représentation, c'est-à-dire donner des formules pour l'action d'une famille de générateurs de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$. Pour cela nous allons utiliser les générateurs de Lickorish, qui sont les twists de Dehn $\tau_{\alpha_j}, \tau_{\beta_j}, \tau_{\gamma_j}$ autour des courbes $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ représentées ci-dessous.



Afin d'obtenir les formules de l'action des générateurs $\tau_{\alpha_j}, \tau_{\beta_j}, \tau_{\gamma_j}$ sur $(H^*)^{\otimes g}$, on doit d'abord décrire de façon générale la représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$; ceci est fait au §2. Puis il faut déterminer l'action des éléments $\widehat{\tau}_{\alpha_j}, \widehat{\tau}_{\beta_j}, \widehat{\tau}_{\gamma_j} \in \mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$; ceci est fait au §3. On peut ensuite montrer l'équivalence avec la représentation construite par Lyubashenko [Lyu95b], dans le cas où la catégorie tensorielle sous-jacente est $\mathcal{C} = H\text{-mod}$. Les formules de la représentation de Lyubashenko des générateurs de Lickorish pour $H\text{-mod}$ et la preuve de l'équivalence sont données dans [Fai19, §5.4].

Nous allons aussi revenir sur l'existence du morphisme de groupes $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ) \rightarrow \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{L}_{g,0}(H))$, qui est le point de départ de la construction de la représentation de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ rappelée ci-dessus. La dernière fois nous avons vu que ce morphisme est une généralisation de l'action de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sur (l'algèbre des fonctions de) la variété des caractères. Mais le fait que cette action survive à la quantification semble miraculeux et la preuve directe est basée sur des calculs fastidieux [AS96, Prop. 27], [Fai19, §5.3.3]. Dans le §4 nous verrons que le lien entre $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ et l'algèbre d'écheveaux à états $\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ donne une explication naturelle à l'existence de cette action : en effet, il est clair que $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ agit sur $\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ et que cette action se fait par automorphismes d'algèbres.

Remarques bibliographiques. Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus dans [Fai19b] pour le cas de $\Sigma_{1,0}^\circ$ et dans [Fai20] pour le cas de $\Sigma_{g,0}^\circ$. Ils sont également présentés dans ma thèse [Fai19]. Ces trois textes utilisent un formalisme matriciel pour les algèbres $\mathcal{L}_{g,n}$ qui a tendance à perturber ceux qui n'y sont pas habitués. Ce formalisme matriciel est parfois très efficace pour montrer certains résultats, mais d'autres fois il peut alourdir certains raisonnements. Ici nous allons donc plutôt utiliser les notations de [BFR23], comme dans [GdT1]. Une autre petite différence concerne la représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$, voir commentaire au début du §2. C'est pourquoi les formules de la représentation de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ obtenues ici seront légèrement différentes de [Fai20]; il existe évidemment un isomorphisme entre les deux ensembles de formules.

2 La représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$

On a vu qu'il y a un isomorphisme d'algèbres $\Phi_{g,0} : \mathcal{L}_{g,0}(H) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{k}}(H^*)^{\otimes g} \cong \text{End}_{\mathbb{k}}((H^*)^{\otimes g})$. Ceci donne une représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$, qui est irréductible et unique à isomorphisme près.

Dans [Fai19b, Fai20, Fai19] on a directement utilisé cette représentation. Comme la définition de $\Phi_{g,0}$ est assez technique, je vais définir une représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$ sans utiliser le morphisme $\Phi_{g,0}$; ceci est basé sur [Fai20b, §6] (le cas $g = 1$ avait été traité dans [AS96, Th. 21]). Ces deux représentations de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$ sont évidemment isomorphes (mais pas égales).

Rappelons-nous de la formule (2). Les règles de commutation entre $\mathbf{i}_{b_j}(\psi_i)$ et $\mathbf{i}_{a_k}(\varphi_l)$ [GdT1, eq. (19)] impliquent qu'on peut réécrire le produit de (2) dans l'ordre qu'on veut, le prix à payer étant de faire apparaître plein de R -matrices. Mais puisque la R -matrice est inversible tous ces changements sont inversibles, et donc

$$\mathcal{L}_{g,0}(H) = \text{vect} \left\{ \mathbf{i}_{b_1}(\psi_1) \mathbf{i}_{b_2}(\psi_2) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \mathbf{i}_{a_1}(\varphi_1) \mathbf{i}_{a_2}(\varphi_2) \dots \mathbf{i}_{a_g}(\varphi_g) \mid \forall j, \psi_j, \varphi_j \in H^* \right\}. \quad (5)$$

Si les ψ_j et φ_j sont pris dans une base de H^* alors on obtient ainsi une base de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$.

On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{g,0}(H)$ qui est engendré par les éléments

$$\mathbf{i}_{a_1}(\varphi_1) \mathbf{i}_{a_2}(\varphi_2) \dots \mathbf{i}_{a_g}(\varphi_g) = \varepsilon \otimes \varphi_1 \otimes \varepsilon \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varepsilon \otimes \varphi_g$$

où ε est la counité de H et $\varphi_i \in H^*$ pour tout i . Les formules de [GdT1, §2.2] montrent de suite que \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ isomorphe à $\mathcal{L}_{0,g}(H)$. On vérifie facilement que $\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_{0,g}(H)$ a une représentation sur \mathbb{k} définie par

$$\mathbf{i}_{a_1}(\varphi_1) \mathbf{i}_{a_2}(\varphi_2) \dots \mathbf{i}_{a_g}(\varphi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} = \varphi_1(1_H) \varphi_2(1_H) \dots \varphi_g(1_H).$$

Soit $V = \mathcal{L}_{g,0}(H) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{k}$ la représentation induite à $\mathcal{L}_{g,0}(H)$. Grâce à (5) on voit que

$$V = \text{vect} \left\{ \mathbf{i}_{b_1}(\psi_1) \mathbf{i}_{b_2}(\psi_2) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \mid \forall j, \psi_j \in H^* \right\}$$

et donc $V = (H^*)^{\otimes g}$ en tant que \mathbb{k} -espace vectoriel, en identifiant $\mathbf{i}_{b_1}(\psi_1) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}}$ avec $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g$. Nous venons donc de construire une représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $(H^*)^{\otimes g}$.

Afin de décrire cette représentation, on rappelle que

$$\text{coad}^r(h)(\varphi) = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \triangleright \varphi \triangleleft h_{(1)}$$

est l'action à droite de H sur $\mathcal{L}_{0,1}(H)$.

Proposition 2.1. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$, on a les formules suivantes pour la représentation de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ sur $V = (H^*)^{\otimes g}$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{a_j}(\varphi) \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) &= \sum_{k,l,m,(R'_m)} \text{coad}^r(R'_{m(1)})(\psi_1) \otimes \dots \otimes \text{coad}^r(R'_{m(j-1)})(\psi_{j-1}) \\ &\quad \otimes [\Phi_{0,1}(S(R'_k) \triangleright \text{coad}^r(R''_m)(\varphi) \triangleleft R'_l) \triangleright \psi_j \triangleleft R'_k R'_l] \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{b_j}(\varphi) \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) &= \sum_{k,(R'_k)} \text{coad}^r(R'_{k(1)})(\psi_1) \otimes \dots \otimes \text{coad}^r(R'_{k(j-1)})(\psi_{j-1}) \\ &\quad \otimes \text{coad}^r(R''_k)(\varphi) \psi_j \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g. \end{aligned}$$

Attention : dans la deuxième égalité on utilise le produit de $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ [GdT1, Def. 2.4] pour multiplier $\text{coad}^r(R''_k)(\varphi)$ et ψ_j , à ne pas confondre avec le produit usuel $\star = \Delta^*$ sur H^* .

Preuve. Par définition de la représentation V on a

$$\mathbf{i}_{a_j}(\varphi) \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) = \mathbf{i}_{a_j}(\varphi) \mathbf{i}_{b_1}(\psi_1) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}}.$$

Il s'agit donc d'utiliser les relations de commutation dans $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ pour éliminer le $\mathbf{i}_{a_j}(\varphi)$ en le faisant agir sur $\mathbf{1}_{\mathbb{k}}$. Soit $x_r = a_r$ ou b_r et $y_s = a_s$ ou b_s , avec $r < s$. Alors la relation [GdT1, eq. (20)] peut se réécrire ainsi [BFR23, §4.1] :

$$\mathbf{i}_{y_s}(\varphi) \mathbf{i}_{x_r}(\psi) = \sum_k \mathbf{i}_{x_r}(\text{coad}^r(R'_k)(\psi)) \mathbf{i}_{y_s}(\text{coad}^r(R''_k)(\varphi)).$$

Commençons par noter qu'on a $\mathbf{i}_{x_r}(\omega) \mathbf{i}_{y_s}(\psi) = \sum_k \mathbf{i}_{y_s}(\text{coad}^r(R''_k)(\psi)) \mathbf{i}_{x_r}(\text{coad}^r(S(R'_k))(\omega))$ puisque $R^{-1} = (S \otimes \text{id})(R)$. Donc (explications après le calcul) :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{i}_{a_j}(\omega) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\psi_{j+1}) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_{g-j}} \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\text{coad}^r(R''_{k_1})(\psi_{j+1})) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\text{coad}^r(R''_{k_{g-j}})(\psi_g)) \mathbf{i}_{a_j}(\text{coad}^r(S(R'_{k_{g-j}} \dots R'_{k_1}))(\omega)) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \\
&= \sum_{k, (R''_k)} \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\text{coad}^r(R''_{k(1)})(\psi_{j+1})) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\text{coad}^r(R''_{k(g-j)})(\psi_g)) \mathbf{i}_{a_j}(\text{coad}^r(S(R'_k))(\omega)) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \\
&= \omega(1_H) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\psi_{j+1}) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}}
\end{aligned} \tag{6}$$

pour tout $\omega \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$. Pour la deuxième égalité on a utilisé que $\sum_{k_1, k_2} R'_{k_2} R'_{k_1} \otimes R''_{k_1} \otimes R''_{k_2} = \sum_{k, (R''_k)} R'_k \otimes R''_{k(1)} \otimes R''_{k(2)}$ par définition d'une R -matrice. Pour la troisième égalité, noter que $\langle \text{coad}^r(h)(\omega), 1 \rangle = \sum_{(h)} \omega(h_{(1)} S(h_{(2)})) = \varepsilon(h) \omega(1)$ et que $(\varepsilon \otimes \text{id})(R) = 1$.

Ensuite on trouve (explications après le calcul) :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{i}_{a_j}(\omega) \mathbf{i}_{b_j}(\psi_j) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \\
&= \sum_{k, l, m, n} \mathbf{i}_{b_j}(R''_n R'_m \triangleright \psi_j \triangleleft R'_k R'_l) \mathbf{i}_{a_j}(R''_m S(R''_k) \triangleright \omega \triangleleft R'_l R'_n) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\psi_j) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \\
&= \sum_{k, l, m, n} \omega(R'_l R'_n R''_m S(R''_k)) \mathbf{i}_{b_j}(R''_n R'_m \triangleright \psi_j \triangleleft R'_k R'_l) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\psi_j) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}} \\
&= \sum_{k, l} \mathbf{i}_{b_j}(\Phi_{0,1}(S(R''_k) \triangleright \omega \triangleleft R'_l) \triangleright \psi_j \triangleleft R'_k R'_l) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\psi_{j+1}) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\psi_g) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{k}}
\end{aligned} \tag{7}$$

La première égalité utilise [GdT1, eq. (19)], la deuxième utilise (6) et la troisième utilise (3) et (1). Enfin $\sum_{k_1, k_2} R'_{k_1} \otimes R'_{k_2} \otimes R''_{k_1} R''_{k_2} = \sum_{k, (R'_k)} R'_{k(1)} \otimes R'_{k(2)} \otimes R''_k$ par définition d'une R -matrice, ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \mathbf{i}_{a_j}(\varphi) \mathbf{i}_{b_1}(\psi_1) \dots \mathbf{i}_{b_{j-1}}(\psi_{j-1}) \\
&= \sum_{k, (R'_k)} \mathbf{i}_{b_1}(\text{coad}^r(R'_{k(1)})(\psi_1)) \dots \mathbf{i}_{b_{j-1}}(\text{coad}^r(R'_{k(j-1)})(\psi_{j-1})) \mathbf{i}_{a_j}(\text{coad}^r(R''_k)(\varphi)).
\end{aligned} \tag{8}$$

La formule pour l'action de $\mathbf{i}_{a_j}(\varphi)$ s'obtient en combinant (8) et (7). La preuve de la formule pour l'action de $\mathbf{i}_{b_j}(\varphi)$ est analogue et plus facile. \square

3 Action des générateurs de Lickorish sur $(H^*)^{\otimes g}$

On note τ_γ le twist de Dehn autour d'une courbe simple γ . D'après la construction rappelée au §1, l'action de τ_γ sur $(H^*)^{\otimes g}$ s'obtient en représentant un élément $\widehat{\tau}_\gamma \in \mathcal{L}_{g,0}(H)$ (unique à scalaire près) sur $(H^*)^{\otimes g}$, grâce à la représentation décrite au §2. On a vu dans [GdT1, Prop. 3.2] que

$$\widehat{\tau}_\gamma = \mathbf{i}_\gamma(\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1})) \tag{9}$$

où $\Phi_{0,1}$ est défini dans (3) et le morphisme $\mathbf{i}_\gamma : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,0}(H)$ est défini dans [GdT1, §2.4]. En fait \mathbf{i}_γ n'a pas de sens car γ est une courbe libre non-orientée : il faut choisir une courbe positivement orientée avec point base $\Gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,0}^\circ)$ qui représente γ et utiliser \mathbf{i}_Γ . À scalaire près $\mathbf{i}_\Gamma(\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1}))$ ne dépend pas du choix de Γ [Fai19, Prop. 5.3.16].

Nous allons exprimer l'élément $\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1}) \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$ grâce à l'*intégrale à gauche* $\lambda : H \rightarrow \mathbb{k}$, qui est unique à scalaire près et satisfait

$$\sum_{(h)} h_{(1)} \lambda(h_{(2)}) = \lambda(h) 1_H \tag{10}$$

pour tout $h \in H$. Autrement dit $\varphi \star \lambda = \varepsilon(\varphi) \lambda$ pour tout $\varphi \in H^*$, où \star est le produit usuel sur H^* (dual au coproduit sur H) et $\varepsilon(\varphi) = \varphi(1)$.

Proposition 3.1. *On peut normaliser λ en posant $\lambda(v) = 1$; dans toute la suite on utilise cette normalisation. Alors $\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1}) = v \triangleright \lambda$.*

Preuve. Voir par exemple [Fai19, Prop. 2.3.4], où λ est notée μ^l . □

Notation. *On pose $\lambda^v = v \triangleright \lambda$. On a aussi $\lambda^v = \lambda \triangleleft v$ puisque v est un élément central dans H .*

Les générateurs de Lickorish de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sont les twists de Dehn $\tau_{\alpha_j}, \tau_{\beta_j}, \tau_{\gamma_j}$ autour des courbes $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ représentées en (4). Avec les générateurs de $\pi_1(\Sigma_{g,0}^\circ)$ fixés dans [GdT1], des représentants de ces courbes sont

$$\alpha_j = a_j, \quad \beta_j = b_j, \quad \gamma_j = a_j b_{j+1} a_{j+1}^{-1} b_{j+1}^{-1}$$

et donc par définition des morphismes \mathbf{i}_γ [GdT1, §2.4] on a

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_{\alpha_j} &= \mathbf{i}_{a_j}(\lambda^v), \quad \widehat{\tau}_{\beta_j} = \mathbf{i}_{b_j}(\lambda^v), \\ \widehat{\tau}_{\gamma_j} &= \mathbf{i}_{a_j b_{j+1} a_{j+1}^{-1} b_{j+1}^{-1}}(\lambda^v) = \sum_{(\lambda^v)} \langle \lambda_{(1)}^v, v^2 \rangle \mathbf{i}_{a_j}(\lambda_{(2)}^v) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(\lambda_{(3)}^v) \mathbf{i}_{a_{j+1}}(S_{\mathcal{L}_{0,1}}(\lambda_{(4)}^v)) \mathbf{i}_{b_{j+1}}(S_{\mathcal{L}_{0,1}}(\lambda_{(5)}^v)). \end{aligned} \quad (11)$$

Théorème 3.2. *On rappelle que v est l'élément ruban de H et λ est son intégrale à gauche. Pour tout $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g \in (H^*)^{\otimes g}$ on a*

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_{\alpha_j} \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) &= \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes (v^{-1} \triangleright \psi_j) \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g \\ \widehat{\tau}_{\beta_j} \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) &= \sum_{(v)} \psi_j(S(v_{(1)})) \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes (\lambda \triangleleft v_{(2)}) \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g \\ \widehat{\tau}_{\gamma_j} \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) &= \sum_{(v)} \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes (S(v_{(1)}^{-1}) \triangleright \psi_j) \otimes (\psi_{j+1} \triangleleft v_{(2)}^{-1}) \otimes \psi_{j+2} \otimes \dots \otimes \psi_g \end{aligned}$$

Ces formules sont les actions des générateurs de Lickorish (4) pour la représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sur $(H^)^{\otimes g}$ que nous avons construite dans [GdT1, §3] (et rappelée au §1 ci-dessus).*

Le reste de la section est dédié à la preuve de ces formules. Rappelons que l'intégrale à gauche satisfait $\lambda(xy) = \lambda(S^{-2}(y)x)$ pour tous $x, y \in H$. C'est aussi vrai pour λ^v puisque v est central. On a donc

$$\forall h \in H, \quad h \triangleright \lambda^v = \lambda^v \triangleleft S^{-2}(h). \quad (12)$$

C'est équivalent à

$$\forall h \in H, \quad \text{coad}^r(h)(\lambda^v) = \varepsilon(h)\lambda^v. \quad (13)$$

Preuve de la formule pour α_j . On sait que $\widehat{\tau}_{\alpha_j} = \mathbf{i}_{a_j}(\lambda^v)$, donc en combinant la Proposition 2.1 avec (13) on a déjà

$$\widehat{\tau}_{\alpha_j} \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) = \sum_{k,l} \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes [\Phi_{0,1}(S(R''_k) \triangleright \lambda^v \triangleleft R''_l) \triangleright \psi_j \triangleleft R'_k R'_l] \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g.$$

Maintenant grâce à (12) et à la formule $(\text{id} \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$ on obtient

$$\sum_{k,l} S(R''_k) \triangleright \lambda^v \triangleleft R''_l \otimes R'_k R'_l = \sum_{k,l} \lambda^v \triangleleft S^{-1}(R''_k) R''_l \otimes R'_k R'_l = \lambda^v \otimes 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_{\alpha_j} \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) &= \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes (\Phi_{0,1}(\lambda^v) \triangleright \psi_j) \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g \\ &= \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes (v^{-1} \triangleright \psi_j) \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est la Proposition 3.1. □

Preuve de la formule pour β_j . On sait que $\widehat{\tau}_{\beta_j} = \mathbf{i}_{b_j}(\lambda^v)$, donc en combinant la Proposition 2.1 avec (13) on a déjà

$$\widehat{\tau}_{\beta_j} \cdot (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g) = \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{j-1} \otimes \lambda^v \psi_j \otimes \psi_{j+1} \otimes \dots \otimes \psi_g.$$

Pour tout $h \in H$, on a (explications après le calcul) :

$$\begin{aligned} \langle \lambda^v \psi, h \rangle &= \left\langle \sum_{i,j} (R'_j S(R''_i) \triangleright \lambda^v) \star (R'_j \triangleright \psi \triangleleft R'_i), h \right\rangle = \sum_{i,j,(h)} \langle \lambda, v h_{(1)} R'_j S(R''_i) \rangle \langle \psi, R'_i h_{(2)} R'_j \rangle \\ &= \sum_{i,j,(h)} \langle \lambda, v R'_j h_{(2)} S(R''_i) \rangle \langle \psi, R'_i R'_j h_{(1)} \rangle = \sum_{i,j,(h)} \langle \lambda, v S^{-1}(R''_i) R'_j h_{(2)} \rangle \langle \psi, R'_i R'_j h_{(1)} \rangle \\ &= \sum_{(h)} \psi(h_{(1)}) \lambda(v h_{(2)}) = \sum_{(h),(v)} \psi(S(v_{(1)}) v_{(2)} h_{(1)}) \lambda(v_{(3)} h_{(2)}) \\ &= \sum_{(v),(v_{(2)} h)} \psi(S(v_{(1)})(v_{(2)} h)_{(1)}) \lambda((v_{(2)} h)_{(2)}) = \sum_{(v)} \psi(S(v_{(1)})) \lambda(v_{(2)} h). \end{aligned}$$

La première égalité est la définition du produit dans $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ [GdT1, Déf.2.4], la deuxième égalité utilise simplement la définition de \triangleright , \triangleleft et \star , la troisième égalité utilise $R\Delta = \Delta^{\text{op}}R$, la quatrième égalité utilise que $\lambda(xy) = \lambda(S^{-2}(y)x)$ et que v est central, la cinquième égalité utilise $(\text{id} \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$, la sixième égalité est une ruse, la septième égalité utilise que le coproduit Δ est un morphisme d'algèbres et la dernière égalité utilise (10). Ainsi

$$\lambda^v \psi = \sum_{(v)} \psi(S(v_{(1)})) (\lambda \triangleleft v_{(2)})$$

ce qui donne la formule voulue. \square

Preuve de la formule pour γ_j . Ça se corse! Grâce à un argument similaire à celui qui commence les preuves pour α_j et β_j , on obtient déjà que l'action de $\widehat{\tau}_{\gamma_j}$ sur $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_g$ est "locale", c'est-à-dire qu'elle touche uniquement ψ_j et ψ_{j+1} et que son expression ne dépend pas de j . Pour alléger les notations, on prend donc $g = 2$ et on calcule l'action de $\widehat{\tau}_{\gamma_1}$ sur $\psi_1 \otimes \psi_2$, où $\widehat{\tau}_{\gamma_1} = \mathbf{i}_{\gamma_1}(\lambda^v)$. Le point clé est la formule suivante, vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$

$$\mathbf{i}_{\gamma_1}(\varphi) \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) = \sum_{i,j,k,l,m,n} \varphi(R''_n R'_m S(R''_k R'_l) R'_j S(R''_i)) (R''_m R'_j \triangleright \psi_1 \triangleleft R'_i R'_n) \otimes (\psi_2 \triangleleft R'_k R'_l). \quad (14)$$

Nous l'admettrons; le moyen le plus agréable de l'obtenir est d'utiliser le calcul diagrammatique de [Fai19, §6.1], [Fai20b, §3]. On peut réécrire cette formule en posant $\sum_s X_s \otimes Y_s = R R^l = \sum_{k,l} R'_k R''_l \otimes R''_k R'_l$ (explications après le calcul) :

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l,m} R'_m S(R''_k R'_l) R'_j \otimes R''_m R'_j \otimes R'_k R'_l &= \sum_{j,k,l,m} R'_m R'_l R''_k R'_j \otimes R''_m R'_j \otimes S^{-1}(R''_l R'_k) \\ &= \sum_{k,m,(R''_m),(R'_k)} R'_m R'_k \otimes (R''_m)_{(2)} (R'_k)_{(2)} \otimes S^{-1}((R''_m)_{(1)} (R'_k)_{(1)}) = \sum_{s,(Y_s)} X_s \otimes (Y_s)_{(2)} \otimes S^{-1}((Y_s)_{(1)}). \end{aligned}$$

Pour la première égalité on a utilisé que $(S \otimes S)(R) = R$ et que S est un antimorphisme, pour la deuxième égalité on a utilisé que $(\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13} R_{23}$ et $(\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}$ par définition d'une R -matrice. Donc

$$\mathbf{i}_{\gamma_1}(\varphi) \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) = \sum_{i,n,s,(Y_s)} \varphi(R''_n X_s S(R''_i)) ((Y_s)_{(2)} \triangleright \psi_1 \triangleleft R'_i R'_n) \otimes (\psi_2 \triangleleft S^{-1}((Y_s)_{(1)}))$$

Prenons maintenant $\varphi = \lambda^v$. Puisque $\lambda^v(xy) = \lambda^v(S^{-2}(y)x)$ et $(\text{id} \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$ on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_{\gamma_1} \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) &= \mathbf{i}_{\gamma_1}(\lambda^v) \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) = \sum_{s, (Y_s)} \lambda^v(X_s) ((Y_s)_{(2)} \triangleright \psi_1) \otimes (\psi_2 \triangleleft S^{-1}((Y_s)_{(1)})) \\ &= \sum_{(\Phi_{0,1}(\varphi))} (\Phi_{0,1}(\lambda^v)_{(2)} \triangleright \psi_1) \otimes (\psi_2 \triangleleft S^{-1}(\Phi_{0,1}(\lambda^v)_{(1)})) \\ &= \sum_{(v^{-1})} (v_{(2)}^{-1} \triangleright \psi_1) \otimes (\psi_2 \triangleleft S^{-1}(v_{(1)}^{-1})) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité utilise simplement la définition $\Phi_{0,1}(\varphi) = \sum_s \varphi(X_s)Y_s$ et la troisième égalité utilise la Proposition 3.1. Finalement puisque $v = S(v)$ (axiome de v) et que S est un antimorphisme de bialgèbres on a la formule annoncée :

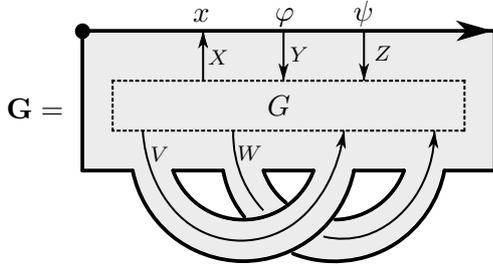
$$\widehat{\tau}_{\gamma_1} \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) = \sum_{(v^{-1})} (S(v^{-1})_{(2)} \triangleright \psi_1) \otimes (\psi_2 \triangleleft S^{-1}(S(v^{-1})_{(1)})) = \sum_{(v^{-1})} (S(v_{(1)}^{-1}) \triangleright \psi_1) \otimes (\psi_2 \triangleleft v_{(2)}^{-1}).$$

□

4 Action de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sur $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ via l'algèbre d'écheveaux

Pour simplifier un peu on va donner les explications dans le cas $g = 1$, c'est-à-dire un tore avec une composante de bord. Le cas général est complètement analogue, il y a juste des formules plus longues.

Soit $\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet}$ la surface $\Sigma_{1,0}^\circ$ avec une piqûre (point enlevé) sur le bord (notée \bullet). On note $\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet})$ l'**algèbre d'écheveaux à états** de cette surface. La définition générale de ces algèbres paraîtra dans [CKL], voir [BFR23, §6.1] pour la définition dans le cas de $\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet}$. Un élément de $\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet})$ est une combinaison \mathbb{k} -linéaire de graphes en ruban H -coloriés et orientés, plongés dans $\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet} \times [0, 1]$, considérés à isotopie près et dont les points de bord dans $\partial(\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet}) \times [0, 1]$ sont marqués par des "états". Voici un exemple :



$X, Y, Z, V, W \in H\text{-mod}$
 $G \subset [0, 1]^3$ graphe en rubans, orienté et H -colorié
 $x \in X, \varphi \in Y^*, \psi \in Z^*$ sont les états

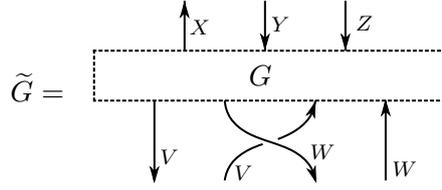
(15)

On impose par définition que les points au bord de \mathbf{G} (marqués par x, φ, ψ) ont des hauteurs qui augmentent strictement lorsqu'on suit le bord en partant de la piqûre (\bullet) selon l'orientation de $\partial(\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet})$ indiquée par la flèche. On voit qu'un *état* est un vecteur dans le H -module qui colorie le brin ou dans son dual, selon l'orientation du brin. En fait \mathbf{G} représente un élément assez général : quitte à utiliser des coupons identité on peut toujours se ramener à ce qu'il n'y ait qu'un seul brin qui passe dans chaque anse avec l'orientation comme ci-dessus (ce brin sera alors colorié par le produit tensoriel des couleurs des brins qui passaient dans l'anse avant transformation, certaines couleurs étant dualisées pour se ramener à cette orientation). La seule chose qui est spécifique à \mathbf{G} est le nombre de points de bord (ici 3), qui est en général arbitraire et peut aussi valoir 0. Enfin il y a des **relations d'écheveaux** qui proviennent du foncteur de Reshetikhin–Turaev pour $H\text{-mod}$ et qui prennent en compte les états.

On va définir une application linéaire

$$\text{hol}^{\text{st}} : \mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{1,0}^{\circ, \bullet}) \rightarrow \mathcal{L}_{1,0}(H).$$

On explique comment calculer hol^{st} sur l'élément \mathbf{G} de (15), pour la définition générale voir [BFR23, §6.2]. Soit



Grâce au foncteur de Reshetikhin–Turaev, on obtient un morphisme de H -modules

$$F_{\text{RT}}(\tilde{\mathbf{G}}) : V \otimes V^* \otimes W \otimes W^* \rightarrow X^* \otimes Y \otimes Z.$$

Maintenant, soit $\{v_j\}$ (resp. $\{w_l\}$) une base de V (resp. W) avec base duale $\{v^i\}$ (resp. $\{w^k\}$). Alors on peut former les coefficients matriciels ${}_V\phi_j^i : h \mapsto v^i(h \cdot v_j)$ et ${}_W\phi_l^k : h \mapsto w^k(h \cdot w_l)$. Ceci nous donne des éléments ${}_V\phi_j^i \otimes {}_W\phi_l^k \in \mathcal{L}_{1,0}(H)$. Soit

$$\text{hol}(\mathbf{G}) = \sum_{i,j,k,l} ({}_V\phi_j^i \otimes {}_W\phi_l^k) \otimes F_{\text{RT}}(\tilde{\mathbf{G}})(v_i \otimes v^j \otimes w_k \otimes w^l) \in \mathcal{L}_{1,0}(H) \otimes X^* \otimes Y \otimes Z$$

(ceci est le hol défini dans [Fai20b, §4.1]; ne pas confondre hol et hol^{st}). Il est évident que $\text{hol}(\mathbf{G})$ ne dépend pas du choix des bases, puisque chaque indice apparaît une fois en position covariante et une fois en position contravariante. On obtient ainsi un tenseur $\text{hol}(\mathbf{G})$ à coefficient dans $\mathcal{L}_{1,0}(H)$. L'idée est maintenant de contracter ce tenseur avec les états x, φ, ψ de \mathbf{G} , afin d'obtenir un élément dans $\mathcal{L}_{1,0}(H)$. Soit donc

$$\begin{aligned} \langle x \otimes \varphi \otimes \psi, - \rangle : X^* \otimes Y \otimes Z &\rightarrow \mathbb{k} \\ \omega \otimes y \otimes z &\mapsto \omega(x)\varphi(y)\psi(z) \end{aligned}$$

On définit $\text{hol}^{\text{st}}(\mathbf{G}) = (\text{id}_{\mathcal{L}_{1,0}(H)} \otimes \langle x \otimes \varphi \otimes \psi, - \rangle)(\text{hol}(\mathbf{G})) \in \mathcal{L}_{1,0}(H)$. La généralisation de cette procédure à d'autres éléments que (15) est évidente.

Théorème 4.1. *Soit H une algèbre de Hopf enrubannée de dimension finie. L'application $\text{hol}^{\text{st}} : \mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet}) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

La preuve est comme pour [BFR23, Th. 6.5].

Par définition $\text{MCG}(\Sigma_{g,n}^{\circ})$ fixe point-par-point le bord (et les n piqûres). Il est facile de voir $\text{MCG}(\Sigma_{g,n}^{\circ})$ agit sur $\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet})$:

- Pour un graphe en ruban $\mathbf{G} \subset \Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet} \times [0, 1]$ et $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,n}^{\circ})$ on pose $\tilde{f}(\mathbf{G}) = (f \times \text{id}_{[0,1]})(\mathbf{G})$.
- Pour une combinaison \mathbb{k} -linéaire formelle $x = \sum_i \lambda_i \mathbf{G}_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{k}$ on pose $\tilde{f}(x) = \sum_i \lambda_i \tilde{f}(\mathbf{G}_i)$.
- Il est clair que \tilde{f} passe au quotient par les relations d'écheveaux et définit donc un automorphisme linéaire $\tilde{f} : \mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet}) \rightarrow \mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet})$.
- Enfin il est évident par définition que $\widetilde{f_1 \circ f_2} = \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$.

De plus \tilde{f} est un morphisme d'algèbres puisque le produit dans $\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet})$ se fait par empilement. On a donc gratuitement un morphisme de groupes

$$\text{MCG}(\Sigma_{g,n}^{\circ}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{S}_H^{\text{st}}(\Sigma_{g,n}^{\circ, \bullet})), \quad f \mapsto \tilde{f}.$$

Grâce au Théorème 4.1 on obtient un morphisme de groupes

$$\theta : \text{MCG}(\Sigma_{g,n}^{\circ}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{L}_{g,n}(H)), \quad f \mapsto \text{hol}^{\text{st}} \circ \tilde{f} \circ (\text{hol}^{\text{st}})^{-1}.$$

Dans [GdT1, §3] on a expliqué qu'il y a un morphisme $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^{\circ}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{L}_{g,0}(H))$, $f \mapsto \tilde{f}$ défini de façon purement algébrique dans [AS96, Prop. 27], [Fai19, §5.3.3]. Un inconvénient de cette approche est qu'il faut faire beaucoup de calculs fastidieux, notamment pour montrer que les \tilde{f} définis par [GdT1, éq. (25)] sont bien des morphismes d'algèbres.

Théorème 4.2. [Fai20b, Th. 4.5] *Pour tout $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ on a $\theta(f) = \tilde{f}$. Autrement dit l'isomorphisme hol^{st} est équivariant sous l'action de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$.*

θ donne donc une définition topologique des morphismes \tilde{f} . De plus cette définition fonctionne directement pour tout (g, n) et elle permet de court-circuiter les longues preuves concernant la construction usuelle des \tilde{f} .

References

- [AS96] A.Y. Alekseev, V. Schomerus, *Representation theory of Chern-Simons observables*, Duke Math. J. **85**(2), 447–510 (1996).
- [BFR23] S. Baseilhac, M. Faitg, P. Roche, *Unrestricted quantum moduli algebras III: Surfaces of arbitrary genus and skein algebras*, arXiv:2302.00396.
- [CKL] F. Costantino, J. Korinman, T. T. Q. Lê, *Stated skein modules for Tannakian (half) ribbon categories*, en préparation.
- [Fai19] M. Faitg, *Mapping class groups, skein algebras and combinatorial quantization*, Thèse, Université de Montpellier, 2019. arxiv:1910.04110.
- [Fai19b] M. Faitg, *Modular group representations in combinatorial quantization with non-semisimple Hopf algebras*, SIGMA **15**, 077, 39 pages (2019).
- [Fai20] M. Faitg, *Projective representations of mapping class groups in combinatorial quantization*, Comm. Math. Phys. **377**, 161–198 (2020).
- [Fai20b] M. Faitg, *Holonomy and (stated) skein algebras in combinatorial quantization*, arXiv:2003.08992, to appear in Quantum Topology.
- [GdT1] M. Faitg, *Algèbres de modules et représentations des groupes de difféotopie des surfaces – partie I*, groupe de travail quantique, Montpellier, 17/11/2023.
- [Kas95] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer, 1995.
- [Lyu95b] V. Lyubashenko, *Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity*, Commun. Math. Phys. **172**(3), 467–516 (1995).