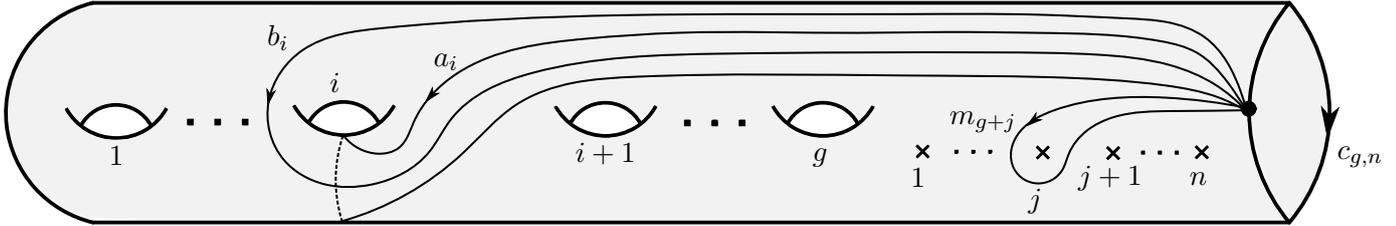


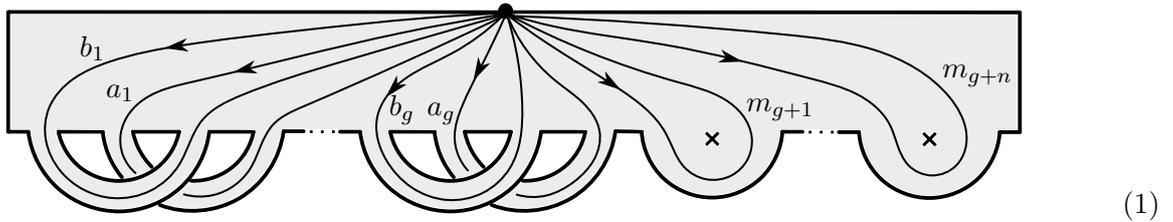
Algèbres de modules et représentations des groupes de difféotopie des surfaces – partie I

Matthieu Faitg

Soit $\Sigma_{g,n}$ la surface compacte orientée de genre g avec n piqûres (*i.e.* points enlevés). Soit $D \subset \Sigma_{g,n}$ un disque ouvert. On note $\Sigma_{g,n}^\circ = \Sigma_{g,n} \setminus D$. Voici un dessin de $\Sigma_{g,n}^\circ$, où on fixe un point base (\bullet) et des générateurs $\{b_i, a_i, m_{g+j}\}_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq n}$ de son groupe fondamental:



Il est souvent commode de dessiner $\Sigma_{g,n}^\circ$ comme ceci (“surface en rubans”) :



On a

$$\begin{aligned} c_{g,n} &= \partial(\Sigma_{g,n}^\circ) = b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \dots b_g a_g^{-1} b_g^{-1} a_g m_{g+1} \dots m_{g+n}, \\ \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ) &= \langle b_1, a_1, \dots, b_g, a_g, m_{g+1}, \dots, m_{g+n} \mid \emptyset \rangle \quad (\text{groupe libre}), \\ \pi_1(\Sigma_{g,n}) &= \langle b_1, a_1, \dots, b_g, a_g, m_{g+1}, \dots, m_{g+n} \mid c_{g,n} = 1 \rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Si S est une surface orientée, on note $\text{MCG}(S)$ le *groupe de difféotopie* de S : ses éléments sont les classes d’isotopie des difféomorphismes $S \rightarrow S$ qui préservent l’orientation et fixent le bord de S (point par point).

1 Discussion dans le cas classique

Soit G un groupe de Lie algébrique complexe semisimple. On note $\mathcal{O}(G)$ l’algèbre des fonctions sur G . Par exemple $\mathcal{O}(\text{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[a, b, c, d] / \langle ad - bc - 1 \rangle$; plus généralement on définit $\mathcal{O}(G)$ grâce aux coefficients matriciels des représentations de G . C’est une algèbre de Hopf dont le produit, coproduit, counité et antipode sont :

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \Delta(\varphi)(x \otimes y) = \varphi(xy), \quad \varepsilon(\varphi) = \varphi(1_G), \quad S(\varphi)(x) = \varphi(x^{-1}) \tag{3}$$

pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(G)$ et $x, y \in G$. Pour des détails dans le cas $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ voir [Kas95, §I.5].

La *variété des représentations* et la *variété des caractères* (de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ dans G) sont respectivement

$$\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) = \text{Hom}_{\text{grp}}(\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ), G), \quad \mathcal{X}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) = \mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) / G$$

où G agit par conjugaison sur lui-même et donc sur $\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)$. Grâce au fait que $\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) \cong G^{2g}$ on peut voir ces espaces comme des variétés algébriques, en définissant leurs algèbres de fonctions ainsi :

$$\mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)] = \mathcal{O}(G)^{\otimes (2g+n)}, \quad \mathcal{O}[\mathcal{X}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)] = \mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)]^{G\text{-inv}}. \tag{4}$$

Remarque 1.1. Il est donc plus correct d'écrire $\mathcal{X}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) = \mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) // G$, c'est-à-dire qu'on considère le quotient au sens de la théorie géométrique des invariants.

Pour $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ on peut définir un morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\gamma : \mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{0,1}^\circ)] &\rightarrow \mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)] \\ \varphi &\mapsto (l \mapsto \varphi(l(\gamma))) \end{aligned} \quad (5)$$

où on utilise que $\mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{0,1}^\circ)] = \mathcal{O}(G)$.

Puisqu'on a mis le point base sur $\partial(\Sigma_{g,n}^\circ)$ et que $\text{MCG}(\Sigma_{g,n}^\circ)$ fixe le bord, on a une action (à gauche) de $\text{MCG}(\Sigma_{g,n}^\circ)$ sur $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ par pushforward. Donc il agit à droite sur $\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)$, donc il agit à gauche sur $\mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)]$. Plus clairement, si $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,n}^\circ)$ on définit

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)] &\rightarrow \mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)] \\ \psi &\mapsto (l \mapsto \psi(l \circ f)) \end{aligned}$$

où f est vue comme une fonction $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$. On a alors la proposition suivante, qui est immédiate :

Proposition 1.2. *Ceci donne un morphisme de groupes*

$$\begin{aligned} \text{MCG}(\Sigma_{g,n}^\circ) &\rightarrow \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)]) \\ f &\mapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

De plus on a $\tilde{f} \circ \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{i}_{f(\gamma)}$.

On va reformuler les définitions de \mathbf{i}_γ et de \tilde{f} en voyant vraiment $\mathcal{O}[\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)]$ comme une algèbre de fonctions sur G^{2g+n} plutôt que sur $\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)$ comme ci-dessus; autrement dit on veut définir ces morphismes d'algèbres sans jamais utiliser $\mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)$. Pour cela on fixe une bijection une fois pour toutes:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_G(\Sigma_{g,n}^\circ) &\xrightarrow{\sim} G^{2g+n} \\ l &\mapsto (l(b_1), l(a_1), \dots, l(b_g), l(a_g), l(m_{g+1}), \dots, l(m_{g+n})) \end{aligned} \quad (6)$$

où on utilise les générateurs de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ introduits dans les dessins ci-dessus. On change aussi les notations de (4) et on note maintenant :

$$F_{g,n}(G) = \mathcal{O}(G)^{\otimes(2g+n)}, \quad F_{g,n}^{\text{inv}}(G) = F_{g,n}(G)^{G\text{-inv}}.$$

En particulier $F_{0,1}(G) = \mathcal{O}(G)$. Par exemple un élément $P \in F_{1,0}(G)$ s'écrit $P = \sum_i \beta_i \otimes \alpha_i$ et il est dans $F_{1,0}^{\text{inv}}(G)$ si et seulement si $P(gxg^{-1}, gyg^{-1}) = P(x, y)$ pour tous $x, y, g \in G$.

Soit $\varepsilon \in \mathcal{O}(G)$ définie par $\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in G$. Étant donné (6), les morphismes d'algèbres $\mathbf{i}_{b_1}, \mathbf{i}_{a_1}, \dots, \mathbf{i}_{b_g}, \mathbf{i}_{a_g}, \mathbf{i}_{m_{g+1}}, \dots, \mathbf{i}_{m_{g+n}} : F_{0,1}(G) \rightarrow F_{g,n}(G)$ définis par (5) sont

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{b_1}(\varphi) &= \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes(2g+n-1)}, & \mathbf{i}_{a_1}(\varphi) &= \varepsilon \otimes \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes(2g+n-2)}, \\ \mathbf{i}_{b_2}(\varphi) &= \varepsilon^{\otimes 2} \otimes \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes(2g+n-3)}, & \mathbf{i}_{a_2}(\varphi) &= \varepsilon^{\otimes 3} \otimes \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes(2g+n-4)}, \\ & & \vdots & \\ \mathbf{i}_{b_g}(\varphi) &= \varepsilon^{\otimes(2g-2)} \otimes \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes(n+1)}, & \mathbf{i}_{a_g}(\varphi) &= \varepsilon^{\otimes(2g-1)} \otimes \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes n}, \\ & & \mathbf{i}_{m_{g+1}}(\varphi) &= \varepsilon^{\otimes(2g)} \otimes \varphi \otimes \varepsilon^{\otimes(n-1)}, \\ & & \vdots & \\ & & \mathbf{i}_{m_{g+n}}(\varphi) &= \varepsilon^{\otimes(2g+n-1)} \otimes \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Tout élément de $F_{g,n}(G)$ est une somme d'éléments de la forme

$$\begin{aligned} &\beta_1 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \beta_g \otimes \alpha_g \otimes \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \\ &= \mathbf{i}_{b_1}(\beta_1) \mathbf{i}_{a_1}(\alpha_1) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\beta_g) \mathbf{i}_{a_g}(\alpha_g) \mathbf{i}_{m_{g+1}}(\psi_1) \dots \mathbf{i}_{m_{g+n}}(\psi_n) \end{aligned} \quad (8)$$

avec $\beta_i, \alpha_i, \psi_j \in \mathcal{O}(G)$ et la structure d'algèbre de $F_{g,n}(G)$ est entièrement décrite par les relations suivantes:

$$\mathbf{i}_c(\varphi) \mathbf{i}_c(\psi) = \mathbf{i}_c(\varphi\psi), \quad \mathbf{i}_{c'}(\varphi) \mathbf{i}_c(\psi) = \mathbf{i}_c(\psi) \mathbf{i}_{c'}(\varphi) \quad (9)$$

pour tous $\varphi, \psi \in F_{0,1}(G)$ et où c, c' sont $b_1, a_1, \dots, b_g, a_g, m_{g+1}, \dots, m_{g+n}$ avec $c \neq c'$.

Pour $\varphi \in \mathcal{O}(G)$ on définit

$$\mathbf{i}_{b_i^{-1}}(\varphi) = \mathbf{i}_{b_i}(S(\varphi)), \quad \mathbf{i}_{a_i^{-1}}(\varphi) = \mathbf{i}_{b_i}(S(\varphi)), \quad \mathbf{i}_{m_{g+j}^{-1}}(\varphi) = \mathbf{i}_{m_{g+j}}(S(\varphi)).$$

où S est l'antipode de $\mathcal{O}(G)$, voir (3). Soit $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$. Écrivons $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_k$, où chaque γ_i est un des générateurs de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ ou son inverse. On définit

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\gamma : F_{0,1}(G) &\rightarrow F_{g,n}(G) \\ \varphi &\mapsto \sum_{(\varphi)} \mathbf{i}_{\gamma_1}(\varphi_{(1)}) \dots \mathbf{i}_{\gamma_k}(\varphi_{(k)}) \end{aligned} \quad (10)$$

où $\sum_{(\varphi)} \varphi_{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{(k)} = \Delta^{(k-1)}(\varphi)$ est le coproduit itéré de (3) (notation de Sweedler). Les définitions (5) et (10) sont équivalentes : s'en convaincre en regardant des exemples. Soit $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,n}^\circ)$. D'après la Proposition 1.2 on a

$$\tilde{f}(\mathbf{i}_{b_j}(\varphi)) = \mathbf{i}_{f(b_j)}(\varphi), \quad \tilde{f}(\mathbf{i}_{a_j}(\varphi)) = \mathbf{i}_{f(a_j)}(\varphi), \quad \tilde{f}(\mathbf{i}_{m_{g+k}}(\varphi)) = \mathbf{i}_{f(m_{g+k})}(\varphi) \quad (11)$$

pour tous j, k et d'après (8) ces valeurs déterminent entièrement \tilde{f} .

2 Algèbres de modules

2.1 Discussion

Il y a deux façons de motiver les définitions du §2.2 ci-dessous :

- **Quantification** : si G est un groupe de Poisson–Lie, $F_{g,n}(G)$ est une algèbre de Poisson et le crochet de Poisson peut se décrire grâce à la r -matrice classique de G [FR98]. Une stratégie pour quantifier $F_{g,n}(G)$ est donc de considérer le $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -module $F_{g,n}^h(G) = \mathcal{O}_h(G)^{\otimes(2g+n)}$, où $\mathcal{O}_h(G)$ est l'algèbre des fonctions quantique sur G [CP94, Chap. 7], et de le munir de relations de commutation bien choisies basées sur la R -matrice quantique de $U_h(\mathfrak{g})$ qui satisfait $R = 1 + \hbar r + O(\hbar)$ [CP94, Chap. 8]. Cette motivation n'est pas très adaptée pour ce qui va suivre car on veut considérer d'autres algèbres de Hopf que $U_h(\mathfrak{g})$.

- **Théorie de jauge sur réseau avec des algèbres de Hopf** : La discussion du §1 montre que $\mathcal{O}(G)$ est plus important que G . On peut définir $\mathcal{O}(G)$ comme l'algèbre de Hopf duale à $U(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ et dans la définition de $F_{g,n}^{\text{inv}}(G)$ on peut considérer les éléments $U(\mathfrak{g})$ -invariants au lieu des G -invariants, de sorte que G n'apparaisse jamais. Et donc autant noter $F_{g,n}(U(\mathfrak{g}))$ et $F_{g,n}^{\text{inv}}(U(\mathfrak{g}))$. Maintenant on demande : si H est une algèbre de Hopf, peut-on définir une algèbre $F_{g,n}(H)$? En s'inspirant du §1, on prend $F_{g,n}(H) = (H^*)^{\otimes(2g+n)}$ en tant qu'espace vectoriel. Ensuite il faut définir un produit. On veut que ce soit un H -module-algèbre pour "l'action par conjugaison" afin d'avoir une sous-algèbre des éléments H -invariants $F_{g,n}^{\text{inv}}(H)$, qu'on appellera "algèbre de modules"¹. On voit vite que cela n'est possible que si H a une R -matrice. Le produit est alors défini grâce à cette R -matrice, en s'imposant des contraintes qui proviennent de considérations topologiques/combinatoires. C'est l'approche utilisée dans les articles fondateurs [AGS95, BR95] puis qui a été axiomatisée dans [BFK98a, BFK98b] et [MW21]. Dans ces articles on utilise un "graphe en rubans" à la place de la surface $\Sigma_{g,n}^\circ$; le dessin (1) ci-dessus devrait suggérer ce qu'est un graphe en rubans. De plus [BFK98b, §9] montre que $F_{g,n}(U_h(\mathfrak{g}))$ est une quantification de $F_{g,n}(G)$.

Dans la suite nous utiliserons les notations habituelles $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ et $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$ au lieu de $F_{g,n}(H)$ et $F_{g,n}^{\text{inv}}(H)$.

¹ou "algèbre des observables" dans certains articles.

Remarque 2.1. On peut donc imaginer les algèbres $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ et $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$ comme étant des “substituts” pour $\mathcal{O}[\mathcal{R}_H(\Sigma_{g,n}^\circ)]$ et $\mathcal{O}[\mathcal{X}_H(\Sigma_{g,n}^\circ)]$, puisque $\mathcal{R}_H(\Sigma_{g,n}^\circ) = \text{Hom}_{\text{grp}}(\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ), H)$ et $\mathcal{X}_H(\Sigma_{g,n}^\circ)$ n’ont pas de sens. Par contre nous allons voir que les reformulations de i_γ et f faites en (10) et (11) se généralisent à $\mathcal{L}_{g,n}(H)$; c’est exactement ce qui va permettre la construction des représentations des groupes de difféotopie. Nous n’avons pas beaucoup parlé de $\Sigma_{g,n}$ pour l’instant : en fait nous n’aurons pas besoin de définir un substitut pour $\mathcal{O}[\mathcal{X}_H(\Sigma_{g,n})]$; disons juste que la définition d’une telle algèbre utilise le morphisme μ du §2.5 ci-dessous et une sorte de quotient appelé *réduction quantique*, voir [BFR23, §7].

Remarque 2.2. La variété des caractères $\mathcal{X}_G(\Sigma_{g,n}^\circ)$ s’identifie avec l’espace de modules des G -connexions plates sur $\Sigma_{g,n}^\circ$ (voir par exemple [Lab13, Chap. 3]). Donc $F_{g,n}^{\text{inv}}(G)$ s’identifie à l’algèbre des fonctions sur cet espace de modules, d’où le nom “algèbre de modules”. Plus généralement, si H est une algèbre de Hopf, on continue à utiliser le nom “algèbre de modules” pour $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$. Enfin si $H = U_h(\mathfrak{g})$ ou par abus $H = U_q(\mathfrak{g})$ alors $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$ est une quantification de $F_{g,n}^{\text{inv}}(G)$, d’où le nom “algèbre de modules quantique” (et dans ce cadre on peut appeler $F_{g,n}^{\text{inv}}(G)$ l’algèbre de modules *classique*).

Remarque 2.3. Les algèbres $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ peuvent aussi être retrouvées grâce à l’homologie de factorisation des surfaces [BZBJ18].

Remarques bibliographiques. Les algèbres $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ ont été introduites dans [Ale94, AGS95, BR95]. Dans [AS96] les représentations de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ sont étudiées et une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,n})$ est construite sous l’hypothèse que H est modulaire (en particulier semisimple); ils montrent que cette représentation est équivalente à celle de la TQFT de Reshetikhin–Turaev. Le principal but de [Fai19b, Fai20] est de généraliser la représentation projective de [AS96] dans le cas où H n’est pas nécessairement semisimple; on y montre aussi que la représentation ainsi obtenue est équivalente à celle de Lyubashenko [Lyu95b]. Dans la suite on citera plutôt la thèse [Fai19], qui contient plus de détails. Tous les articles cités dans cette remarque utilisent un formalisme matriciel que j’ai préféré éviter ici car il a tendance à déconcerter ceux qui n’y sont pas habitués; voir [BFR23, §3.1, §4.1] pour le lien entre les notations utilisées ici et ce formalisme matriciel.

Il existe une présentation de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ et $\text{MCG}(\Sigma_{g,0})$ basée sur les générateurs de Humphries [Waj83]. Pour comprendre la construction présentée ici il suffit de savoir que $\text{MCG}(\Sigma_{g,0})$ est un quotient de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$, en fait par une seule relation. Une référence sur les groupes de difféotopie est [FM12].

2.2 Définition de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ et $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$

Soit $H = (H, m, 1, \Delta, \varepsilon, S, R)$ une \mathbb{C} -algèbre de Hopf quasitriangulaire, où $R \in H^{\otimes 2}$ est la R -matrice. On utilisera la notation de Sweedler

$$\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}, \quad (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)} \quad \text{etc...}$$

et on écrira la R -matrice comme ceci

$$R = \sum_i R'_i \otimes R''_i.$$

Pour simplifier un peu, *supposons dès maintenant que H est de dimension finie*. Alors l’espace vectoriel dual H^* est aussi une algèbre de Hopf dont le produit, coproduit, counité et antipode sont :

$$\forall \varphi, \psi \in H^*, \quad \varphi \star \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta, \quad \Delta(\varphi) = \varphi \circ m, \quad \varepsilon(\varphi) = \varphi(1), \quad S(\varphi) = \varphi \circ S. \quad (12)$$

Les *actions corégulières* à gauche (\triangleright) et à droite (\triangleleft) de H sur H^* sont définies par

$$\forall h, x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*, \quad \langle h \triangleright \varphi, x \rangle = \langle \varphi, xh \rangle, \quad \langle \varphi \triangleleft h, x \rangle = \langle \varphi, hx \rangle. \quad (13)$$

Définition 2.4. $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ est l’espace vectoriel H^* muni du produit suivant :

$$\varphi \psi = \sum_{i,j} (R''_j S(R'_i) \triangleright \varphi) \star (R'_j \triangleright \psi \triangleleft R'_i). \quad (14)$$

C'est une algèbre associative². Le neutre multiplicatif est ε .

Pour $h \in H$ et $\varphi \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$ on définit

$$\text{coad}^r(h)(\varphi) = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \triangleright \varphi \triangleleft h_{(1)}, \quad \text{i.e. } \langle \text{coad}^r(h)(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, \text{ad}(h)(x) \rangle \quad (15)$$

où $\text{ad}(h)(x) = \sum_{(h)} h_{(1)}xS(h_{(2)})$, pour tout $x \in H$. Un calcul facile qui utilise $R\Delta = \Delta^{\text{op}}R$ montre que coad^r est une structure de H -module-algèbre à droite sur $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ (d'où l'exposant "r" pour "right"), i.e.

$$\forall h \in H, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_{0,1}(H), \quad \text{coad}^r(h)(\varphi\psi) = \sum_{(h)} \text{coad}^r(h_{(1)})(\varphi) \text{coad}^r(h_{(2)})(\psi).$$

Définition 2.5. $\mathcal{L}_{1,0}(H)$ est l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{0,1}(H) \otimes \mathcal{L}_{0,1}(H)$ muni du produit

$$(\beta \otimes \alpha)(\beta' \otimes \alpha') = \sum_{i,j,k,l} \beta (R'_i R'_k \triangleright \beta \triangleleft R'_i R'_j) \otimes (R''_k S(R''_i) \triangleright \alpha \triangleleft R''_j R''_l) \alpha'.$$

C'est une algèbre associative³. Le neutre multiplicatif est $\varepsilon \otimes \varepsilon$.

Pour $h \in H$ et $\beta \otimes \alpha \in \mathcal{L}_{1,0}(H)$ on définit

$$\text{coad}^r(h)(\beta \otimes \alpha) = \sum_{(h)} \text{coad}^r(h_{(1)})(\beta) \otimes \text{coad}^r(h_{(2)})(\alpha)$$

où on utilise le coad^r de (15); en d'autres termes $\mathcal{L}_{1,0}(H) = \mathcal{L}_{0,1}(H)^{\otimes 2}$ en tant que H -module. Alors $\mathcal{L}_{1,0}(H)$ muni de coad^r est un H -module-algèbre à droite (calcul un peu long mais facile). Notons qu'on a deux morphismes de H -module-algèbres $\mathfrak{i}_b, \mathfrak{i}_a : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{1,0}(H)$ donnés par $\mathfrak{i}_b(\beta) = \beta \otimes \varepsilon$, $\mathfrak{i}_a(\alpha) = \varepsilon \otimes \alpha$ tels que $\beta \otimes \alpha = \mathfrak{i}_b(\beta)\mathfrak{i}_a(\alpha)$ et

$$\mathfrak{i}_a(\alpha)\mathfrak{i}_b(\beta) = \sum_{i,j,k,l} \mathfrak{i}_b(R'_i R'_k \triangleright \beta \triangleleft R'_i R'_j) \mathfrak{i}_a(R''_k S(R''_i) \triangleright \alpha \triangleleft R''_j R''_l).$$

Ces conditions définissent entièrement la structure de module-algèbre de $\mathcal{L}_{1,0}(H)$.

Soit $\mathcal{C} = \text{mod-}H$ la catégorie des H -modules à droite de dimension finie. Elle est tressée grâce à la R -matrice de H . Un H -module-algèbre à droite est la même chose qu'un objet algèbre dans \mathcal{C} . On peut donc utiliser le produit tensoriel tressé $\tilde{\otimes}$ des objets algèbres [Maj92, Lem. 9.2.12] :

Définition 2.6. $\mathcal{L}_{g,n}(H) = \mathcal{L}_{1,0}(H)^{\tilde{\otimes} g} \tilde{\otimes} \mathcal{L}_{0,1}(H)^{\tilde{\otimes} n}$.

Par définition, en tant que H -module à droite, $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ est $\mathcal{L}_{1,0}(H)^{\otimes g} \otimes \mathcal{L}_{0,1}(H)^{\otimes n}$. Puisque $\mathcal{L}_{1,0}(H)$ est lui-même $\mathcal{L}_{0,1}(H)^{\otimes 2}$ en tant que H -module, on voit que $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ est l'espace vectoriel $(H^*)^{\otimes (2g+n)}$ muni de l'action à droite coad^r de H donnée par

$$\forall h \in H, \quad \text{coad}^r(h)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{2g+n}) = \sum_{(h)} \text{coad}^r(h_{(1)})(\varphi_1) \otimes \dots \otimes \text{coad}^r(h_{(2g+n)})(\varphi_{2g+n})$$

où on utilise le coad^r de (15). C'est la généralisation de l'action par conjugaison de G sur $\mathcal{O}(G)^{\otimes (2g+n)}$ du §1. Par construction $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ est un H -module-algèbre pour cette action. Pour décrire plus explicitement la structure d'algèbre de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ nous utilisons les injections linéaires

$$\mathfrak{i}_{b_1}, \mathfrak{i}_{a_1}, \dots, \mathfrak{i}_{b_g}, \mathfrak{i}_{a_g}, \mathfrak{i}_{m_{g+1}}, \dots, \mathfrak{i}_{m_{g+n}} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H) \quad (16)$$

définies comme dans (7). Alors le produit de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ possède les propriétés suivantes, qui le décrivent entièrement :

²Ceci peut se montrer directement par un calcul un peu long en utilisant les propriétés de la R -matrice (équation de Yang–Baxter notamment). Mais le moyen le plus rapide est de définir $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ comme un *twist* de H^* , voir [BR22, §4] ou [BFR23, §3.1].

³Même remarque que dans le cas $\mathcal{L}_{0,1}(H)$, voir [BFR23, §3.1].

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \mathbf{i}_{b_1}(\beta_1) \mathbf{i}_{a_1}(\alpha_1) \dots \mathbf{i}_{b_g}(\beta_g) \mathbf{i}_{a_g}(\alpha_g) \mathbf{i}_{m_{g+1}}(\psi_1) \dots \mathbf{i}_{m_{g+n}}(\psi_n) \\ & \quad = \beta_1 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \beta_g \otimes \alpha_g \otimes \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \end{aligned} \quad (17)$$

$$\bullet \quad \mathbf{i}_{b_j}, \mathbf{i}_{a_j}, \mathbf{i}_{m_{g+k}} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H) \text{ sont des morphismes d'algèbres.} \quad (18)$$

$$\bullet \quad \mathbf{i}_{a_r}(\varphi) \mathbf{i}_{b_r}(\psi) = \sum_{i,j,k,l} \mathbf{i}_{b_r}(R'_i R'_k \triangleright \psi \triangleleft R'_i R'_j) \mathbf{i}_{a_r}(R'_k S(R'_i) \triangleright \varphi \triangleleft R'_j R'_l) \quad (19)$$

$$\bullet \quad \mathbf{i}_{v_s}(\varphi) \mathbf{i}_{u_r}(\psi) = \sum_{i,j,k,l} \mathbf{i}_{u_r}(S(R'_k R'_l) \triangleright \psi \triangleleft R'_i R'_j) \mathbf{i}_{v_s}(S(R'_i R'_k) \triangleright \varphi \triangleleft R'_j R'_l) \quad (20)$$

pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$, où $1 \leq r < s \leq g+n$ et u_r (resp. v_s) est indifféremment a_r , b_r ou m_r (resp. a_s , b_s ou m_s). Les conditions (18) et (19) signifient qu'on a des morphismes (injectifs) d'algèbres $\mathcal{L}_{1,0}(H) \hookrightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$, $\beta \otimes \alpha = \mathbf{i}_b(\beta) \mathbf{i}_a(\alpha) \mapsto \mathbf{i}_{b_r}(\beta) \mathbf{i}_{a_r}(\alpha)$ pour $1 \leq r \leq g$ et $\mathcal{L}_{0,1}(H) \hookrightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$, $\varphi \mapsto \mathbf{i}_{m_r}(\varphi)$ pour $g+1 \leq r \leq g+n$. La condition (20) provient de la définition d'un produit tensoriel tressé.

Comparer ceci avec (8)–(9). Noter aussi qu'on a bien $\mathcal{L}_{g,n}(U(\mathfrak{g})) = F_{g,n}(G)$ car $U(\mathfrak{g})$ est co-commutative, donc on prend $R = 1 \otimes 1$.

Définition 2.7. *Puisque $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ est un H -module-algèbre, les éléments H -invariants forment une sous-algèbre que l'on note $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$ et qu'on appelle "algèbre de modules" :*

$$\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H) = \{x \in \mathcal{L}_{g,n}(H) \mid \forall h \in H, \text{coad}^r(h)(x) = \varepsilon(h)x\}.$$

Remarque 2.8. Les H -modules-algèbres $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ peuvent aussi se construire en utilisant des *twists*, voir [BR22, §4, §6.1] et [BFR23, §3.1, §4.1].

2.3 Morphisme d'Alekseev et représentations de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$

On note $R^{fl} = \sum_i R'_i \otimes R'_i$ le "flip" de R . Le *morphisme RSD* (Reshetikhin–Semenov–Tian–Shianski–Drinfeld) est l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi_{0,1} : H^* & \rightarrow H \\ \varphi & \mapsto (\varphi \otimes \text{id}_H)(RR^{fl}) = \sum_{i,j} \varphi(R'_i R'_j) R'_i R'_j \end{aligned} \quad (21)$$

Ceci donne un *morphisme d'algèbres* $\Phi_{0,1} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow H$ (bien connu, calcul facile)⁴. Si on munit H de l'action adjointe $\text{ad}^r(h)(x) = \sum_{(h)} S(h_{(1)})xh_{(2)}$ c'est même un morphisme de H -module-algèbres.

Définition 2.9. *Le double de Heisenberg de H^* , noté $\mathcal{H}(H^*)$, est l'espace vectoriel $H^* \otimes H$ muni du produit*

$$(\varphi \otimes x)(\psi \otimes y) = \sum_{(x)} \varphi \star (x_{(1)} \triangleright \psi) \otimes x_{(2)} y.$$

où \star est défini en (12). C'est une algèbre associative. Le neutre multiplicatif est $\varepsilon \otimes 1$.

On a un *morphisme d'algèbres* [Ale94] :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,0} : \mathcal{L}_{1,0}(H) & \rightarrow \mathcal{H}(H^*) \\ \beta \otimes \alpha & \mapsto \sum_{i,j,k} (R''_i R''_j \triangleright \beta \triangleleft R'_k R'_i) \otimes (R''_k R'_j \Phi_{0,1}(\alpha)) \end{aligned}$$

Enfin, en combinant $\Phi_{0,1}$ et $\Phi_{1,0}$ de façon non-triviale grâce à la R -matrice, on obtient un morphisme d'algèbres

$$\Phi_{g,n} : \mathcal{L}_{g,n}(H) \rightarrow \mathcal{H}(H^*)^{\otimes g} \otimes H^{\otimes n}$$

qu'on appelle le *morphisme d'Alekseev* [Ale94]. Pour une définition de $\Phi_{g,n}$ (et une preuve que c'est un morphisme d'algèbres) dans les notations et conventions employées ici, voir [BFR23, §5.2]⁵.

⁴Par contre ce n'est pas un morphisme d'algèbres pour le produit usuel (12) sur H^* .

⁵[Fai19] et [BFR23] utilisent des définitions un peu différentes de $\Phi_{g,n}$, voir [BFR23, Rem. 5.5].

Définition 2.10. On dit que H est factorisable si $\Phi_{0,1}$ est un isomorphisme.

Proposition 2.11. [Fai19, §5.1.2] Si H est de dimension finie et factorisable, alors $\Phi_{g,n}$ est un isomorphisme d'algèbres pour tous g, n .

Lemme 2.12. [Mon93, Lem. 9.4.2] Il y a une représentation fidèle de $\mathcal{H}(H^*)$ sur H^* , définie par

$$\forall \varphi \otimes h \in \mathcal{H}(H^*), \quad \forall \psi \in H^*, \quad (\varphi \otimes h) \cdot \psi = \varphi \star (h \triangleright \psi).$$

On a donc un morphisme injectif $\mathcal{H}(H^*) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(H^*)$. Puisqu'on suppose que H est de dimension finie, c'est un isomorphisme par égalité des dimensions. D'où un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{L}_{g,n}(H) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(H^*)^{\otimes g} \otimes H^{\otimes n}. \quad (22)$$

Corollaire 2.13. Pour H de dimension finie et factorisable, les représentations irréductibles de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ sont de la forme $(H^*)^{\otimes g} \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ où les V_i sont des représentations irréductibles de H .

2.4 Morphismes $\mathbf{i}_\gamma : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$

À partir de maintenant on suppose que H contient un élément ruban v [Kas95, §XIV.6]

On rappelle que $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ est H^* en tant qu'espace vectoriel, donc on peut utiliser les actions corégulières (13) et l'antipode $S = S_{H^*} = S^*$ de H^* (12). On définit

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}_{0,1}(H)} : \mathcal{L}_{0,1}(H) &\rightarrow \mathcal{L}_{0,1}(H) \\ \varphi &\mapsto \sum_i S_{H^*} \left(S(R'_i) \triangleright \varphi \triangleleft R''_i u^{-1} \right) \end{aligned}$$

où $u = \sum_j S(R''_j) R'_j$ est l'élément de Drinfeld [Kas95, §XIV.6].

Remarque 2.14. En fait $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ a une structure d'algèbre de Hopf interne à mod- H et $S_{\mathcal{L}_{0,1}(H)}$ est l'antipode de cette structure. Plus précisément $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ est le coend de Lyubashenko de mod- H [Fai19, Prop. 5.4.3]; or le coend de Lyubashenko $\int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes X$ d'une catégorie enrubannée \mathcal{C} est une algèbre de Hopf dans \mathcal{C} [Lyu95].

Soit c un des générateurs de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ) : b_j, a_j, m_k$. Rappelons de (16) les morphismes d'algèbres $\mathbf{i}_c : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$. On définit l'application linéaire

$$\mathbf{i}_{c^{-1}} = \mathbf{i}_c \circ S_{\mathcal{L}_{0,1}(H)} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H). \quad (23)$$

On dit qu'une courbe simple $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ est *orientée positivement* si son orientation va dans le sens trigonométrique lorsqu'on la dessine sur la "surface en rubans" (1). Par exemple les générateurs de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ fixés dans (1) sont orientés positivement et $b_1 a_1$ aussi. $a_1 b_1^{-1}$ ne l'est pas. À une courbe simple γ on associe un entier $N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, défini dans [Fai19, §5.3.2]. Par exemple $N(b_i) = N(a_i) = N(m_{g+j}) = 0$, $N(b_i a_i) = -1$.

Définition 2.15. Soit $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ une courbe simple positivement orientée. Écrivons $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_k$ où chaque γ_i est un générateur de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ ou son inverse. On définit

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\gamma : \mathcal{L}_{0,1}(H) &\rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H) \\ \varphi &\mapsto \sum_{(\varphi)} \varphi_{(1)}(v^{N(\gamma)}) \mathbf{i}_{\gamma_1}(\varphi_{(2)}) \dots \mathbf{i}_{\gamma_k}(\varphi_{(k+1)}) \end{aligned}$$

Comparer avec (10). Par exemple $\mathbf{i}_{b_1 a_1}(\varphi) = \varphi_{(1)}(v^{-1}) \mathbf{i}_{b_1}(\varphi_{(2)}) \mathbf{i}_{a_1}(\varphi_{(3)}) = \varphi_{(1)}(v^{-1}) \varphi_{(2)} \otimes \varphi_{(3)} \otimes \varepsilon^{\otimes (2g-2+n)}$. Puisque $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$ est un groupe libre, l'écriture de $\gamma_1 \dots \gamma_k$ est presque unique; les seules ambiguïtés sont du type cc^{-1} et un calcul qui utilise les formules (23) et (14) montre qu'elles sont sans conséquence.

Proposition 2.16. Pour toute courbe simple positivement orientée $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$, $\mathbf{i}_\gamma : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$ est un morphisme de H -module-algèbres.

Cette proposition est démontrée dans [Fai19, Prop. 5.3.14] pour $n = 0$ (surfaces $\Sigma_{g,0}^\circ$) mais sans aucun doute elle est vraie pour tout n .

2.5 “Application moment quantique” et représentations de $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$

À partir de maintenant on suppose que l’algèbre de Hopf quasitriangulaire et de dimension finie H est factorisable et a un élément ruban v .

Parmi toutes les courbes simples positivement orientées de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^\circ)$, il y en a une qui va jouer un rôle particulier: la courbe de bord $c_{g,n} = \partial(\Sigma_{g,n}^\circ)$ exprimée en (2). On a $N(c_{g,n}) = 2g$ et la Définition 2.15 donne un morphisme d’algèbres $\mathfrak{i}_{c_{g,n}} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H)$. De plus le morphisme $\Phi_{0,1} : \mathcal{L}_{0,1}(H) \rightarrow H$ (21) est un iso par hypothèse, donc on peut définir

$$\mu = \mathfrak{i}_{c_{g,n}} \circ \Phi_{0,1}^{-1} : H \rightarrow \mathcal{L}_{g,n}(H).$$

Puisque coad^r est une structure de H -module-algèbre à droite sur $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ et que l’antipode S est un anti-automorphisme de bialgèbres, on obtient une structure de H^{cop} -module-algèbre à gauche sur $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ en posant

$$h \blacktriangleright x = \text{coad}^r(S^{-1}(h))(x).$$

Proposition 2.17. μ est une application moment quantique, ce qui signifie que μ est un morphisme d’algèbres et qu’on a

$$\forall h \in H, \forall x \in \mathcal{L}_{g,n}(H), \quad \mu(h)x = \sum_{(h)} (h_{(2)} \blacktriangleright x) \mu(h_{(1)})$$

Ce résultat a été obtenu dans [Jor14, §7.4] pour $H = U_q(\mathfrak{sl}_n)$; attention : notations et conventions différentes de celles employées ici. La preuve pour tout H avec nos notations et conventions est dans [BFR23, Th. 7.14]. Notons qu’il est immédiat que μ est un morphisme d’algèbres d’après la Prop. 2.16; le point important est la relation de commutation pour $\mu(h)x$.

Corollaire 2.18. $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H) = \{x \in \mathcal{L}_{g,n}(H) \mid \forall h \in H, \mu(h)x = x\mu(h)\}$.

Preuve. L’inclusion \subset est évidente. L’autre inclusion provient de $h \blacktriangleright x = \sum_{(h)} \mu(h_{(2)})x\mu(S^{-1}(h_{(1)}))$. \square

Soit W une représentation de $\mathcal{L}_{g,n}(H)$ et définissons

$$\text{Inv}(W) = \{w \in W \mid \forall h \in H, \mu(h) \cdot w = \varepsilon(h)w\}. \quad (24)$$

D’après le Corollaire 2.18 le sous-espace $\text{Inv}(W)$ est stable sous l’action de $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$, donc

on a une représentation de $\mathcal{L}_{g,n}^{\text{inv}}(H)$ sur $\text{Inv}(W)$.

Pour $W = (H^*)^{\otimes g} \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ où les V_i sont des représentations de H , voir (22), des calculs permettent d’obtenir une formule pour l’action de $\mu(h)$ sur $w = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_g \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ (avec $\varphi_i \in H^*$ et $v_j \in V_j$) [Fai19, §5.2], ce qui donne une description plus explicite de $\text{Inv}(W)$. En particulier pour $(g, n) = (1, 0)$ on a

$$\text{Inv}(H^*) = \text{SLF}(H) = \{\varphi \in H^* \mid \forall x, y \in H, \varphi(xy) = \varphi(yx)\}$$

où SLF signifie “symmetric linear forms”.

Intuitivement, l’espace $\text{Inv}(W)$ “simule” la relation $c_{g,n} = 1$ qui définit $\pi_1(\Sigma_{g,n})$.

3 Représentations projectives de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ et $\text{MCG}(\Sigma_{g,0})$

À partir de maintenant on se restreint à des surfaces du type $\Sigma_{g,0}^\circ$ (et $\Sigma_{g,0}$ à la fin). On rappelle que H est une algèbre de Hopf de dimension finie factorisable et enrubannée.⁶

⁶Exemple : les petits groupes quantiques $u_\epsilon(\mathfrak{g})$, avec $\epsilon \in \mathbb{C}$ une racine de l’unité d’ordre impair [Lyu95b, Cor. A.3.3]. On peut aussi prendre $\bar{U}_\epsilon(\mathfrak{sl}_2)$ avec ϵ d’ordre pair, qui est “factorisable mais pas quasitriangulaire” [Fai19b, §6].

Soit $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$. Alors f envoie une courbe simple positivement orientée $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,0}^\circ)$ sur une autre courbe simple positivement orientée $f(\gamma)$. En utilisant la Définition 2.15 on peut donc poser

$$\tilde{f}(\mathbf{i}_{b_j}(\varphi)) = \mathbf{i}_{f(b_j)}(\varphi), \quad \tilde{f}(\mathbf{i}_{a_j}(\varphi)) = \mathbf{i}_{f(a_j)}(\varphi) \quad (25)$$

pour tout $1 \leq j \leq g$ et $\varphi \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$. Comparer avec (11).

Proposition 3.1. *Ceci définit des morphismes d'algèbres $\tilde{f} : \mathcal{L}_{g,0}(H) \rightarrow \mathcal{L}_{g,0}(H)$ et l'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ) & \rightarrow & \text{Aut}_{\text{alg}}(\mathcal{L}_{g,0}(H)) \\ f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$$

est un morphisme de groupes. De plus pour toute courbe simple γ on a $\tilde{f} \circ \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{i}_{f(\gamma)}$.

Comparer avec la Proposition 1.2. Le fait que \tilde{f} est entièrement défini par les valeurs (25) est dû à (17). La Prop. 3.1 est démontrée dans [Fai19, §5.3.3]. Ce résultat avait auparavant été énoncé dans [AS96, Prop. 27] avec l'idée de la preuve.

D'après (22), $\mathcal{L}_{g,0}(H) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}((H^*)^{\otimes g})$ est une algèbre de matrices, dont on sait que tout automorphisme est intérieur (théorème de Skolem–Noether). Pour chaque $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$, il existe donc un élément inversible $\hat{f} \in \mathcal{L}_{g,0}(H)$ unique à scalaire près tel que

$$\forall x \in \mathcal{L}_{g,0}(H), \quad \tilde{f}(x) = \hat{f}x\hat{f}^{-1}.$$

Si γ est une courbe simple on note τ_γ le twist de Dehn autour de γ .

Proposition 3.2. *On a $\hat{\tau}_\gamma = \mathbf{i}_\gamma(\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1}))$.*

On rappelle que v est l'élément ruban de H et que $\Phi_{0,1}$ défini en (21) est un iso par hypothèse (H factorisable)⁷. Pour une preuve de la Prop. 3.2 voir [Fai19, Prop. 5.3.16]; dans le cas où H est modulaire ce résultat avait été énoncé dans [AS96, eq. (9.7)]. Puisque tout $f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ est un produit de twists de Dehn, la proposition donne une formule pour \hat{f} . Puisque v est central dans H on a $\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1}) \in \mathcal{L}_{0,1}^{\text{inv}}(H)$ et donc $\hat{\tau}_\gamma \in \mathcal{L}_{g,0}^{\text{inv}}(H)$ et donc

$$\forall f \in \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ), \quad \hat{f} \in \mathcal{L}_{g,0}^{\text{inv}}(H).$$

Soit

$$\rho : \mathcal{L}_{g,0}(H) \xrightarrow[\Phi_{g,0}]{\sim} \mathcal{H}(H^*)^{\otimes g} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}}(H^*)^{\otimes g} = \text{End}_{\mathbb{C}}((H^*)^{\otimes g})$$

l'unique représentation irréductible de $\mathcal{L}_{g,0}(H)$ obtenue au §2.3 et soit

$$\begin{array}{ccc} \rho_{\text{inv}} : \mathcal{L}_{g,0}^{\text{inv}}(H) & \rightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Inv}_g) \\ x & \mapsto & \rho(x)|_{\text{Inv}_g} \end{array}$$

la représentation de $\mathcal{L}_{g,0}^{\text{inv}}(H)$ obtenue par restriction de $\rho(x)$ au sous-espace $\text{Inv}_g = \text{Inv}((H^*)^{\otimes g})$ qui a été défini en (24).

Théorème. 1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ) & \rightarrow & \text{PGL}((H^*)^{\otimes g}) \\ f & \mapsto & \rho(\hat{f}) \end{array}$$

est une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$.

2. Il est connu que $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ est un quotient de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ [Waj83, Th. 2]. L'application

$$\begin{array}{ccc} \text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ) & \rightarrow & \text{PGL}(\text{Inv}_g) \\ f & \mapsto & \rho_{\text{inv}}(\hat{f}) \end{array}$$

passse au quotient et donne une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$.

⁷ $\Phi_{0,1}^{-1}(v^{-1})$ peut s'exprimer dans $\mathcal{L}_{0,1}(H)$ grâce à l'intégrale de H [Fai19, Prop. 2.3.4].

L’item 1 est évident d’après la Proposition 3.1 et l’unicité de \widehat{f} à scalaire près. La preuve de l’item 2 consiste à vérifier que la relation “hyper-elliptique” qui donne $\text{MCG}(\Sigma_{g,0})$ comme un quotient de $\text{MCG}(\Sigma_{g,0}^\circ)$ est satisfaite. C’est ici qu’on utilise que pour tout $w \in \text{Inv}_g$ et $\varphi \in \mathcal{L}_{0,1}(H)$ on a par définition $i_{c_{g,0}}(\varphi) \cdot w = \varepsilon(\varphi)w$. Voir [Fai19, §5.3.4].

La généralisation de la construction précédente pour toutes les surfaces $\Sigma_{g,n}^\circ$ et $\Sigma_{g,n}$ est discutée dans [Fai19, §5.3.5] : la conclusion est que conjecturalement on a une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,n}^\circ)$ sur $(H^*)^{\otimes g} \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ et une représentation projective de $\text{MCG}(\Sigma_{g,n})$ sur

$$\text{Inv}_{g,V_1,\dots,V_n} = \text{Inv}((H^*)^{\otimes g} \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$$

où V_1, \dots, V_n sont des représentations *irréductibles* de H .

References

- [Ale94] A. Yu. Alekseev, *Integrability in the Hamiltonian Chern-Simons theory*, Alg. i Anal. **6**(2), 53–66 (1994).
- [AGS95] A. Y. Alekseev, H. Grosse, V. Schomerus, *Combinatorial quantization of the Hamiltonian Chern-Simons theory I*, Comm. Math. Phys. **172**, 317–358 (1995).
- [AS96] A.Y. Alekseev, V. Schomerus, *Representation theory of Chern-Simons observables*, Duke Math. J. **85**(2), 447–510 (1996).
- [BFR23] S. Baseilhac, M. Faitg, P. Roche, *Unrestricted quantum moduli algebras III: Surfaces of arbitrary genus and skein algebras*, arXiv:2302.00396.
- [BR22] S. Baseilhac, P. Roche, *Unrestricted quantum moduli algebras I: the case of punctured spheres*, SIGMA **18**, 075, 78 pages (2022).
- [BZBJ18] D. Ben-Zvi, A. Brochier, D. Jordan, *Integrating quantum groups over surfaces*, J. Topology **11**(4), 874–917 (2018).
- [BR95] E. Buffenoir, P. Roche, *Two dimensional lattice gauge theory based on a quantum group*, Comm. Math. Phys. **170**, 669–698 (1995).
- [BFK98a] D. Bullock, C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, *Skein Quantization and Lattice Gauge Field Theory*, Chaos, Solitons & Fractals **9**, 811–824 (1998).
- [BFK98b] D. Bullock, C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, *Topological interpretations of lattice gauge field theory*, Commun. Math. Phys. **198**(1), 47–81 (1998).
- [CP94] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994.
- [Fai19] M. Faitg, *Mapping class groups, skein algebras and combinatorial quantization*, Thèse, Université de Montpellier, 2019. arxiv:1910.04110.
- [Fai19b] M. Faitg, *Modular group representations in combinatorial quantization with non-semisimple Hopf algebras*, SIGMA **15**, 077, 39 pages (2019).
- [Fai20] M. Faitg, *Projective representations of mapping class groups in combinatorial quantization*, Comm. Math. Phys. **377**, 161–198 (2020).
- [FM12] B. Farb, D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press (2012).
- [FR98] V.V. Fock, A.A. Rosly, *Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and r-matrix*, arXiv:math/9802054.
- [Jor14] D. Jordan, *Quantized multiplicative quiver varieties*, Adv. Math. **250**, 420–466 (2014).
- [Kas95] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer, 1995.
- [Lab13] F. Labourie, *Lectures on Representations of Surface Groups*, EMS publishing house, Zurich Lectures in Advanced Mathematics (2013).
- [Lyu95] V. Lyubashenko, *Modular transformations for tensor categories*, J. Pure Appl. Alg. **98**(3), 279–327 (1995).
- [Lyu95b] V. Lyubashenko, *Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity*, Commun. Math. Phys. **172**(3), 467–516 (1995).

- [Maj92] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press (1995).
- [MW21] C. Meusburger, D.K. Wise, *Hopf algebra gauge theory on a ribbon graph*, Rev. Math. Phys. **33**(5), 2150016, (2021).
- [Mon93] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 82, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Waj83] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45**(2-3), 157–174 (1983).