Mise à niveau - Intégration

1 Calcul d'intégrales

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)dt \end{array}$.

Répondre par vrai ou faux et justifier :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$
3. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
4. Si f est positive alors F est positive
5. Si f est croissante alors F est croissante
6. Si f est positive alors F est croissante

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}dt$
3. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \quad (u = \sqrt{x})$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}dx$
5. $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$, où $a > 0 \quad (x = \frac{1}{t})$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt \quad (x = \pi - t)$
8. $\displaystyle\int_1^{e^2} (\ln(t))^2 dt$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $f(x) = \arctan(x)$
2. $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2+3x-2}$
3. $f(x) = e^x \sin(e^x)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
5. $f(x) = x^2\sin(x)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$
7. $f(x) = x^n \ln(x)$, $n \in \mathbb{N}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (2x^2+3)e^{-x}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^5(x)\sin^2(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{(x^2+2x+2)^3}dx$
6. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(x)}dx$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. À l'aide d'un changement de variable bien choisi,

1. montrer que si f est impaire alors : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

2. montrer que si f est paire alors : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

3. montrer que si f est périodique de période $T > 0$ alors : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$

et donner une interprétation graphique de ces résultats.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
2. En déduire une expression explicite de I_n.
3. En déduire une expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

2 Probabilités

Exercice 9.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité :

(a) $f(t) = \begin{cases} 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 4\dfrac{\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. Pour chaque fonction f de la question précédente, on considère une variable aléatoire X de densité f. Déterminer si X admet une espérance et, dans ce cas, la calculer.

Exercice 10. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la fonction suivante est une densité de probabilité :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-|t|} & \text{si } t \in]-a; a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire à densité f.
Est-ce que les variables aléatoires X^2, $|X|$ et $X + |X|$ sont à densité ?

Exercice 12.

1. Soit X qui suit une loi uniforme sur $[2;5]$. Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{X}$.
2. Soit X qui suit une loi uniforme sur $[0;1[$ et $\alpha \in]0;+\infty[$. Déterminer la loi de $Y = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-X)$.
3. Soit X qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $T = \lfloor X \rfloor + 1$.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}([-1,1])$.

1. Montrer que $|X|$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
2. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f nulle hors de $[0,1]$ et telle que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{1+x}.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \frac{1}{X}$.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ et en déduire que Z et X ont même loi.

Exercice 15. Soit X un variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $\sqrt{\mathrm{X}}$ est une variable à densité, en donner une densité puis étudier son espérance.

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1 et Y la variable aléatoire qui vaut X si $\mathrm{X} > 1$ et 0 sinon. La variable aléatoire Y est-elle une variable à densité ?

Exercice 17 (Loi normale)**.**

1. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi normale centrée réduite et F_{X} sa fonction de répartition.
   (a) À l'aide de la table (voir sur internet), déterminer les probabilités suivantes :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1),\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 1),\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq -2),\ \mathrm{P}(-2 \leq \mathrm{X} \leq 1)$$
   (b) Montrer que : $F_{\mathrm{X}}(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\mathrm{X}}(-x) = 1 - F_{\mathrm{X}}(x)$.
2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi normale $\mathcal{N}(8,4)$. À l'aide d'une renormalisation, déterminer les probabilités suivantes :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 7,5),\ \mathrm{P}(\mathrm{X} > 8,5),\ \mathrm{P}_{(\mathrm{X}>5)}(\mathrm{X} > 6)$$

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire réelle presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui ne soit pas presque sûrement nulle.

Montrer que l'on a équivalence entre :

1. X suit une loi exponentielle ;
2. X est à densité et vérifie la propriété d'*absence de mémoire* :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ P(\mathrm{X} > x + y) = P(\mathrm{X} > x)\, P(\mathrm{X} > y).$$

On admet que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ sont égales.

(* pour 2. $\Rightarrow$ 1.)