Mise à niveau - Algèbre

1 Calculs matriciels

Exercice 1. Calculer tous les produits de deux matrices possibles :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Montrer que M et N sont inversibles et calculer M^{-1}, N^{-1}, $(MN)^{-1}$, N^{-2}.

Exercice 3. Inverser les matrices suivantes lorsque c'est possible :

$$A = \begin{pmatrix} t^2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Pour les matrices suivantes, déterminer les valeurs propres, diagonaliser si possible.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. En utilisant la diagonalisation, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Applications linéaires

Exercice 6. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, -x+2y+z, x-y+z) \end{array}$.

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. Montrer $u = (1,1,0)$ et $w = (1,0,1)$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes.
3. Soit $v = (0,0,1)$. Vérifier que $f(v) - v = u$.
4. Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
5. L'application f est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriels des polynômes de degré au plus 3 (c'est-à-dire de la forme $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$). Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1(X) = 1, P_2(X) = 1 + X, P_3(X) = 1 + X + X^2, P_4(X) = 1 + X + X^2 + X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, et vice versa.
6. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 8. Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2v_n. \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$.

1. Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Donner une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
3. En déduire une formule explicite de X_n en fonction de A et X_0 et n.
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   (a) Déterminer $f(-2, 1)$ et $f(1, -1)$.
   (b) En déduire une matrice diagonale D semblable à A.
5. Donner une formule explicite du terme général des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

Exercice 9.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $f \circ g$ est bijective alors f et g sont bijectives.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si MN est inversible alors M et N sont inversibles.

3 Produits scalaires et projection orthogonale

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère des vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in E$ tels que

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 3, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 4, \text{ et } \langle v_2, v_3 \rangle = -1.$$

Trouver les quantités suivantes : $\|v_1\|$, $\langle 0, v_1 \rangle$, $\langle v_1 - 2v_2, v_3 \rangle$, et $\langle v_1, 2v_2 - v_3 \rangle$.

Exercice 11. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et on note $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y = 0 \right\}$.

1. Donner une base orthonormale de H.
2. Montrer que $H^\perp = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Calculer la projection $P_{H^\perp}(e_1)$ de $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $H^\perp$.
4. Montrer que $P_{H^\perp}(e_1)$ est la meilleure approximation de e_1 dans $H^\perp$, c'est-à-dire, montrer que

$$\|e_1 - P_{H^\perp}(e_1)\|^2 = \inf_{v \in H^\perp} \{\|e_1 - v\|^2 \}.$$

Exercice 12. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. On note

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que pour tout x, y dans $\mathbb{R}^2$: $\langle R_\theta x, R_\theta y\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. En déduire que R_θ préserve la norme, c'est à dire que pour tout x dans $\mathbb{R}^2$: $||R_\theta x|| = ||x||$.
3. Vérifier que $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$. (Indice : Utiliser les formules de trigonométrie)

Supplément : On dit que R_θ est une matrice de rotation. Pourquoi ?

Exercice 13. On considère W un ensemble non vide de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et

$$W^\perp := \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0 \text{ pour tout } u \in W\}.$$

Montrer que $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14. Voici un lien entre probabilité et produit scalaire.

On considère H l'ensemble des variables aléatoires sur un espace probabilisé et

$$H_0 = \{V \in H \,|\mathbb{E}(V) = 0\}.$$

1. Montrer que H_0 satisfait les propriétés d'un sous-espace vectoriel (de H).
2. Montrer que la covariance satisfait les propriétés d'un produit scalaire.
3. Montrer que la variance satisfait les propriétés d'une norme.
4. Écrire un équivalent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et, montrer que le coefficient de corrélation
$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{V(X)V(Y)} \text{ satisfait : } \forall X, Y \in H_0,\ -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$
5. Soit X et Z des variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit une loi normale centré $\mathcal{N}(0, 1)$ et que $P(Z = -1) = P(Z = 1) = 0,5$. On note $Y = ZX$
   (a) Est-ce que X et Y sont indépendants ?
   (b) Montrer que $X, Y, Z \in H_0$
   (c) Calculer $Cov(X, Y)$.
6. Montrer que si $X, Y \in H_0$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $Cov(X, Y) = 0$ (X, Y sont "orthogonaux".)
7. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse (dans H_0).

Remarque : La réciproque et vrai si (X, Y) est un vecteur gaussien, c'est-à-dire que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ la variable aléatoire $aX + bY$ suit une loi normale.

Exercice 15. Soit V le plan d'équation $x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. On considère le couple de vecteurs de V :

$$\mathfrak{U} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \text{ où } \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

1. Est-ce qu'il s'agit d'une famille orthonormale ?
2. Si $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$, calculer $\langle \vec{x}, \vec{u}_1\rangle$ et $\langle \vec{x}, \vec{u}_2\rangle$. Qu'est-ce que vous observez ? Peut-on généraliser ce résultat ?
3. Qu'est-ce que l'on peut dire sur c_1 et c_2 dans le cas où $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = \vec{0}$? Qu'est-ce que l'on en déduit sur $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$?
4. Tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique $\vec{x} = \vec{x}^\parallel + \vec{x}^\perp$ où $\vec{x}^\parallel \in V$ et $\vec{x}^\perp \in V^\perp$.
   On note $\vec{y} = \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{u}_1\rangle\vec{u}_1 - \langle \vec{x}, \vec{u}_2\rangle\vec{u}_2$.
   Prouver que $\vec{y} \in V^\perp$. Quelle(s) information(s) peut-on en déduire sur $\vec{x}^\parallel$ et $\vec{x}^\perp$?
5. Soit $\vec{x} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$; trouver $\text{proj}_V(\vec{x})$ et $\vec{x}^\perp$.

Exercice 16. Soit V_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ forme une base orthogonale de V_1.
(Indice : on pourra commencer par trouver une base de V_1 pour prouver que $\dim(V_1) = 3$.)
2. Trouver une base orthonormale de V_1.
3. Trouver la projection de $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sur V_1