L3 MAPI3 - Simulations Stochastiques
Correction de l'exercice 6 - TD1

Exercice 1

1) Montrons par récurrence que $U_1 \dots U_n$ admet la densité f_n.

- n=1, U_1 est une variable uniforme sur $[0,1]$ dont la densité est bien donnée par f_1.
- Supposons que $U_1 \dots U_n$ admet la densité f_n. Pour calculer la densité de $U_1 \dots U_{n+1}$ on considère pour toute fonction g continue bornée $\mathbb{E}(g(U_1 \dots U_{n+1}))$. Commençons par écrire que
$$U_1 \dots U_{n+1} = U_1 \dots U_n \times U_{n+1}$$
et notons $Z_n = U_1 \dots U_n$. Comme les variables $(U_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes, Z_n est indépendantes de U_{n+1}. On en déduit donc avec l'hypothèse de récurrence que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(U_1 \dots U_{n+1})) &= \mathbb{E}(g(Z_n U_{n+1})) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g(zu) f_n(z) dz du \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g(zu) \frac{(-\ln(z))^{n-1}}{(n-1)!} dz du \\ &= \int_0^1 \frac{(-\ln(z))^{n-1}}{(n-1)!} \left[\int_0^1 g(zu) du\right] dz\end{aligned}$$
On effectue le changement de variable $y = zu$ dans la seconde intégrale, $du = dy/z$ donc :
$$\mathbb{E}(g(U_1 \dots U_{n+1})) = \int_0^1 \frac{(-\ln(z))^{n-1}}{(n-1)!} \left[\int_0^z \frac{g(y)}{z} dy\right] dz$$
On peut échanger les deux intégrales en remarquant que
$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq z \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq z \leq 1 \end{cases}$$
D'où
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(U_1 \dots U_{n+1})) &= \int_0^1 g(y) \left[\int_y^1 \frac{(-\ln(z))^{n-1}}{z(n-1)!} dz\right] dy \\ &= \int_0^1 g(y) \left[\frac{(-\ln(z))^{n}}{n!}\right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 g(y) f_{n+1}(y) dy.\end{aligned}$$
Ce qui conclut que $U_1 \dots U_{n+1}$ admet la densité f_{n+1} et termine la récurrence.

2) Commençons par remarquer que comme les variables uniformes sont presque sûrement inférieure strictement à 1, la suite $(U_1 \dots U_n)_{n\geq 1}$ est décroissante presque sûrement. De plus, par définition de K le premier indice tel que $U_1 \dots U_K$ est inférieur à $1/e$ alors

$$\{K = k\} = \{U_1 \dots U_{k-1} \geq 1/e\} \ \cap \ \{U_1 \dots U_k < 1/e\}$$

En reprenant la notation $Z_n = U_1 \dots U_n$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K = k) &= \mathbb{P}\big(Z_{k-1} \geq 1/e \text{ et } U_k Z_{k-1} < 1/e\big) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{z \geq 1/e\}} \mathbf{1}_{\{zu < 1/e\}} f_{k-1}(z) dz du \\
&= \int_{1/e}^1 f_{k-1}(z) \left[\int_0^1 \mathbf{1}_{\{u < 1/ze\}} du\right] dz \\
&= \int_{1/e}^1 \frac{(-\ln(z))^{k-2}}{(k-2)!} \frac{1}{ze} dz \\
&= \frac{(-1)^{k-2}}{e} \left[\frac{(\ln(z))^{k-1}}{(k-1)!}\right]_{1/e}^1 \\
&= \frac{e^{-1}}{(k-1)!}.
\end{aligned}$$