
TD 5 & TP 3 - Processus de Poisson et files d'attente

Définition : Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . On définit $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 1$. Alors

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{S_n \leq t\}} = \max\{n \text{ tels que } S_n \leq t\}$$

définit un processus de Poisson d'intensité λ .

Ainsi, $(N_t)_{t \geq 0}$ est une fonction aléatoire croissante, constante par morceaux qui compte le nombre d'événements survenus avant l'instant t lorsque ces événements surviennent à des dates séparées par des durées indépendantes exponentielles de paramètre λ .

Exercice 1 : Simulation d'un processus de Poisson

1. **TP - Simulation des n premiers sauts.** Soit $n > 1$, proposer un algorithme qui renvoie les n premiers instants de saut d'un processus de Poisson.
2. **TP -** En utilisant le programme précédent, tracer un histogramme de la loi du n^{eme} saut.
3. **TP - Simulation jusqu'à un instant t fixé.** Soit $t > 0$ fixé. Pour simuler N_t , il faut donc tirer des exponentielles jusqu'à ce que $S_{n+1} > t$. Écrire l'algorithme qui stocke les instants de sauts S_1, S_2, \dots du processus entre 0 et t et qui renvoie la valeur terminale N_t .
4. **TP -** Vérifier à l'aide d'un histogramme que pour $t \geq 0$ fixé, la variable N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .
5. **TP -** Tracer une trajectoire du processus sur $[0, 10]$. On pourra par exemple utiliser la fonction `matplotlib.pyplot.step`.
6. **TP -** Illustrer par un algorithme la convergence presque sûre de (N_t/t) vers λ lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 2 : Superposition de processus de Poisson

On s'intéresse dans cet exercice à une propriété intéressante des processus de Poisson :

Si $(M_t^1)_{t \geq 0}$ et $(M_t^2)_{t \geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants d'intensité λ_1 et λ_2 , alors le processus $(N_t)_{t \geq 0} = (M_t^1 + M_t^2)_{t \geq 0}$ est aussi un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

1. Soit $t > 0$ fixé, quelle est la loi de N_t ?
2. On définit le premier saut d'un processus de Poisson comme le premier instant où le processus vaut 1. Par construction, ce premier saut est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ . On notera U^1 le premier saut de $(M_t^1)_{t \geq 0}$ et U^2 celui de $(M_t^2)_{t \geq 0}$. Donner la loi du premier instant de saut de $(N_t)_{t \geq 0}$.
3. Calculer la probabilité que ce premier instant de saut corresponde au premier instant de saut de $(M_t^1)_{t \geq 0}$.
4. **TP -** Inversement, si $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ , on construit les processus $(M_t^1)_{t \geq 0}$ et $(M_t^2)_{t \geq 0}$ comme suit : ils partent de 0, sont constants par morceau, et à chaque saut de $(N_t)_{t \geq 0}$, on fait sauter $(M_t^1)_{t \geq 0}$ avec probabilité p , sinon c'est $(M_t^2)_{t \geq 0}$ qui saute, les tirages étant indépendants à chaque saut de $(N_t)_{t \geq 0}$. Alors $(M_t^1)_{t \geq 0}$ et $(M_t^2)_{t \geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants. Écrire un algorithme qui simule $(N_t)_{t \geq 0}$, $(M_t^1)_{t \geq 0}$ et $(M_t^2)_{t \geq 0}$ en même temps. A l'aide de ces simulations retrouver les paramètres de $(M_t^1)_{t \geq 0}$ et $(M_t^2)_{t \geq 0}$ en fonction de λ et p .

Exercice 3 - Paradoxe des autobus.

Des autobus arrivent à une station suivant un processus $(N_t)_{t \geq 0}$ de Poisson de paramètre 4 (l'unité de temps étant l'heure). On note $T_1 \leq T_2 \leq \dots$ la suite des instants de passage des bus.

1. Combien d'autobus passe-t-il en moyenne en une heure ?
2. On suppose que l'on arrive à l'instant $a > 0$ à l'arrêt de bus. Le prochain bus passera à un instant T_K où K est un entier aléatoire tel que $T_{K-1} < a \leq T_K$. On note $D = T_K - a$ la durée d'attente avant le prochain autobus.
3. Calculer la loi jointe de D et $a - T_{K-1}$.
4. En déduire le temps d'attente moyen $\mathbb{E}(D)$.

Exercice 4 - Comportement en temps long

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda \quad p.s..$$

1. On regarde tout d'abord le processus à des temps entiers. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N_n = \sum_{k=1}^n N_k - N_{k-1}.$$

2. Appliquer la loi forte des grands nombres à la somme précédente.
3. Justifier que pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$\frac{N_n}{n+1} \frac{n+1}{n} \leq \frac{N_t}{t} \leq N_{n+1} n \frac{n}{n+1}$$

4. Conclure

Exercice 5 : Files d'attentes $M/M/1$ - théorie et pratique

On veut modéliser une file d'attente devant un unique guichet pour lequel les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: c'est à dire que les arrivées des clients successifs sont espacées de variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre $\lambda > 0$.

Les temps de services des clients sont indépendants entre eux et indépendants des temps d'arrivées des clients et suivent une loi exponentielle de paramètres μ . On note $(W_t)_{t \geq 0}$ le processus qui compte le nombre de personnes présentes dans la file (avec la convention qu'une personne au guichet en train d'être servie compte comme étant dans la file). $(W_t)_{t \geq 0}$ est un processus de saut à valeurs dans \mathbb{N} qui augment de 1 lorsqu'un nouveau client arrive et diminue de 1 lorsqu'un client à été servi.

On note T_n la suite des temps de sauts (arrivée ou départs des clients) avec $T_0 = 0$ et $Z_n = W_{T_n}$ le nombre de clients à cet instant de saut. Remarquons que la donnée de $(T_n, Z_n)_{n \geq 0}$ permet de reconstruire la file d'attente en temps continu.

Dans la suite on admettra le résultat suivant :

Proposition Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ sont indépendantes. Alors $V = \min(X, Y) \sim \mathcal{E}(\lambda + \mu)$ et $W = \mathbf{1}_{V=X} \sim \text{Ber}(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})$ et V et W sont indépendantes.

1. Déduire de la proposition les affirmations suivantes :
 - Si $Z_n = 0$ alors $T_{n+1} - T_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Z_{n+1} = 1$
 - Si $Z_n > 0$ alors $T_{n+1} - T_n \sim \mathcal{E}(\lambda + \mu)$ et $Z_{n+1} = Z_n + Y_n$ où Y_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.
2. On s'intéresse maintenant uniquement à la chaîne de Markov $(Z_n)_{n \geq 0}$. Décrire ses probabilités de transitions.

3. On note p_n la probabilité que Z atteigne 0 partant de n . En conditionnant par rapport au premier évènement, montrer que p_n est solution du système d'équations suivant :

$$p_n = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} p_{n+1} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} p_{n-1} \qquad p_0 = 1$$

4. Résoudre cette équation de récurrence en écrivant une relation entre $p_{n+1} - p_n$ et $p_n - p_{n-1}$. En déduire que si $\lambda < \mu$, alors $p_1 = 1$.
5. **TP** - Écrire une fonction qui prend en paramètre λ, μ et t , et simule la file d'attente sur l'intervalle $[0, t]$. Ce programme renvoie une matrice avec les temps de sauts et le nombre de client dans la file d'attente.
6. **TP** - Observez que la file d'attente semble avoir des comportements différents selon que $\lambda > \mu$, $\lambda < \mu$ et $\lambda = \mu$.
7. **TP** - Cas $\lambda > \mu$: Représenter graphiquement $(Z_n/T_n)_{n \geq 0}$ en fonction de T_n . En faisant varier successivement les valeurs de λ et μ proposer une expression de la limite presque sûre $a(\lambda, \mu)$ de $\frac{W_t}{t}$ quand $t \rightarrow \infty$.
8. **TP** - Cas $\lambda < \mu$: Illustrer le fait que lorsque $t \rightarrow \infty$ la loi du processus W_t converge vers une loi stationnaire π définie par

$$\pi(\{k\}) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Attention : il faut vraiment considérer le processus en temps continu pour prendre en compte le fait qu'on peut rester plus longtemps dans certains états.

9. **TP** - Calcul du temps d'inactivité du serveur : On considère ici $\lambda < \mu$. On appelle temps d'inactivité du serveur, les durées pendant lesquelles la file est vide. En simulant la file d'attente sur un temps long, obtenir un échantillon de 1000 temps d'inactivité du serveur. Donner une estimation du temps moyen d'inactivité. Ceci vous paraît-il cohérent ?