M1 MAPI3 - Simulations stochastiques 2024-2025
Xavier Bressaud *xavier.bressaud@math.univ-toulouse.fr*
Manon Costa *manon.costa@math.univ-toulouse.fr*
Bastien Mallein *bastien.mallein@math.univ-toulouse.fr*

TD 6 & TP 4 - Processus de branchement

1 La poule et les poussins

Une poule pond N oeufs, N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque oeuf éclôt selon une loi de Bernoulli de paramètre p, indépendamment des autres oeufs. On appelle K le nombre de poussins.

1. Calculer $\mathbb{P}[K = k|N = n]$, puis $\mathbb{E}[K|N = n]$ et enfin $\mathbb{E}[K]$.
2. A l'aide de la question précédente, calculer $\mathbb{P}[K = k]$ et dire de quelle loi il s'agit.
3. Montrer que la loi de $N - k$ sachant que $K = k$ est une loi de Poisson de paramètre $(1 - p)\lambda$. En déduire $\mathbb{E}[N|K = k]$.

Théorème. *Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de fonction génératrice G_X. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i et de fonction génératrice G_N. Alors si $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, la fonction génératrice de S_N est*

$$G_{S_N}(s) = G_N(G_X(s)).$$

4. Utiliser le résultat précédent pour retrouver rapidement la loi de K.

2 Processus de Galton-Watson : probabilité d'extinction

On considère un processus de Galton-Watson, ou processus de branchement,

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$$

avec $Z_0 = 1$ et $(X_{k,n})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m, et donc de même fonction génératrice

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

On pose $x_n = \mathbb{P}[Z_n = 0]$ la probabilité d'extinction à la n-ième génération, et $q = \lim_{n\to\infty} x_n$ la probabilité d'extinction, c'est-à-dire la probabilité que $(Z_n)_{n\geq 0}$ s'annule pour un n assez grand.

1. En utilisant le théorème de l'exercice précédent, donner la fonction génératrice G_n de Z_n en fonction de G.
2. Montrer que $x_{n+1} = G(x_n)$.
3. Trouver la valeur de q lorsque $p_0 = 0$.
4. Trouver la valeur de q lorsque $p_0 + p_1 = 1$.
5. On suppose à partir de maintenant que $p_0 \neq 0$ et que $p_0 + p_1 < 1$. Montrer que G est strictement convexe sur $[0, 1]$.
6. Montrer que si $m = G'(1) \leq 1$, le réel 1 est l'unique solution de l'équation $G(s) = s$. En déduire que $q = 1$.
7. Montrer que si $m = G'(1) > 1$, il existe une unique solution de l'équation $G(s) = s$ dans $[0, 1[$. En déduire que q est cette unique solution.
8. Conclure que dans tous les cas, q est le plus petit point fixe de G de l'intervalle $[0, 1]$.

3 Processus de Galton-Watson : probabilité d'extinction

On considère un processus de Galton-Watson, ou processus de branchement, $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$ avec $Z_0 = 1$ et $(X_{k,n})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre p *commençant en* 0, c'est-à-dire de fonction génératrice $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k s^k$.

1. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, calculer $q = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Z_n = 0]$ la probabilité d'extinction du processus en fonction de p.
2. Calculer l'espérance m et la probabilité d'extinction q.
   TP - Proposer un algorithme pour simuler les effectifs des 20 premières générations de ce processus.
3. **TP -** Proposer une représentation graphique de l'évolution de $(Z_n)_{n\geq 0}$. Tracer sur le même dessin une centaine de réalisations (on pourra choisir successivement les valeurs $p = 0.6$ et $p = 0.4$) et commenter les différents types de comportement asymptotique obtenus.
4. **TP -** Proposer un estimateur empirique du vecteur $(\mathbb{P}[Z_0 = 0], \ldots, \mathbb{P}[Z_{100} = 0])$ et vérifiez la convergence (lorsque n grandit) vers la probabilité d'extinction théorique q (on pourra par exemple prendre $p = 0.47$, 0.48 et 0.49).

4 Processus de Galton-Watson et forme autorégressive

On considère un processus de Galton-Watson, ou processus de branchement, $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$ avec $Z_0 = 1$ et $(X_{k,n})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de moyenne m et de variance σ^2.

Montrer que le processus peut s'écrire sous la forme autorégressive $Z_{n+1} = mZ_n + \epsilon_{n+1}$ et calculer $\mathbb{E}[\epsilon_{n+1}|Z_n]$ et $\mathbb{E}[\epsilon_{n+1}^2|Z_n]$. En déduire que (Z_n/m^n) est une martingale bornée dans L^2.

5 Processus de Galton-Watson : cas sous-critique, critique et sur-critique

On considère un processus de Galton-Watson, ou processus de branchement, $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$ avec $Z_0 = 1$ et $(X_{k,n})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

Théorème. *On note q la probabilité d'extinction de la population.*

- *Si $m < 1$, on est dans le* ***cas sous-critique*** *: $q = 1$ donc la population va s'éteindre presque sûrement.*
- *Si $m = 1$, on est dans le* ***cas critique*** *: $q = 1$ donc la population va également s'éteindre presque sûrement. On a aussi $n\mathbb{P}[Z_n > 0] \to 2/\sigma^2$ et*
$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[Z_n|Z_n > 0] \to \frac{\sigma^2}{2}.$$
- *Si $m > 1$, on est dans le* ***cas sur-critique*** *: q est l'unique point fixe < 1 de la fonction génératrice associée à la loi de $X_{n,k}$. De plus (Z_n/m^n) converge p.s. et en moyenne quadratique vers une variable aléatoire finie L avec $\mathbb{E}[L] = 1$, $Var[L] = \sigma^2/(m^2 - m)$ et $\mathbb{P}[L = 0] = q$.*

0. Calculer l'espérance m et la probabilité d'extinction q.
1. **TP -** Simuler un processus de Galton-Watson pour lequel chaque individu admet 0, 1 ou 2 descendants (avec le choix de p_0 et p_2 en entrée).
2. **TP -** Dans le cas où $m < 1$, représenter une évolution assez longue de la population. Pour 100 trajectoires, calculer la moyenne empirique de Z_n pour chaque n et vérifier que cette moyenne divisée par m^n est proche de 1.
3. **TP -** Dans le cas où $m = 1$, représenter une évolution de la population. Pour 100 trajectoires pour lesquelles $Z_n > 0$, calculer la moyenne empirique de Z_n sachant $Z_n > 0$ avec $n = 10, 20, 50$. Vérifier que ctte moyenne est proche de $n\sigma^2/2$.
4. **TP -** Dans le cas où $m > 1$, représenter une évolution de la population puis représenter plusieurs trajectoires de Z_n/m^n. Estimer empiriquement la loi de la limite L de (Z_n/m^n). Commentez.