
TD 4 & TP2 - Modèle gaussien : le filtre de Kalman

1 Le filtre de Kalman: les formules

On s'intéresse à une suite $x_k \in \mathbb{R}^n$ de variables aléatoires gaussiennes qui évoluent linéairement selon un temps discret:

$$x_{k+1} = Fx_k + \epsilon_k$$

où F est une matrice $n \times n$ connue et $(\epsilon_k)_{k \geq 0}$ une suite indépendantes de gaussiennes centrée $\mathcal{N}(0, Q)$ de taille n . Malheureusement on n'a ni accès aux $(\epsilon_k)_{k \geq 0}$ ni aux $(x_k)_{k \geq 0}$. Pour connaître x_k , on a des observations indirectes. On a accès à des mesures $y_k \in \mathbb{R}^m$ qui sont des transformations linéaires bruitées de x_k :

$$y_k = Hx_k + \eta_k$$

où H est une matrice $m \times n$ et $(\eta_k)_{k \geq 0}$ une suite indépendantes de gaussiennes centrée $\mathcal{N}(0, R)$ de taille m .

- On va noter d'une part $\hat{x}_{k+1|k}$ l'estimation de x_{k+1} à partir des données jusqu'à l'instant k : c'est-à-dire l'espérance conditionnelle de x_{k+1} sachant (y_0, \dots, y_k) .
- D'autre part, on appellera $\hat{x}_{k+1|k+1}$ l'estimation de x_{k+1} à partir des données jusqu'à l'instant $k+1$: c'est-à-dire l'espérance conditionnelle de x_{k+1} sachant (y_0, \dots, y_{k+1}) .

Les espérances conditionnelles $\hat{x}_{k|k}$ et $\hat{x}_{k+1|k}$ sont des quantités qu'on peut calculer au fur et à mesure grâce à la proposition suivante.

Filtre de Kalman La loi de $x_k - \hat{x}_{k|k}$ est une gaussienne $\mathcal{N}(0, P_{k|k})$, et la loi de $x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}$ est une gaussienne $\mathcal{N}(0, P_{k+1|k})$. De plus, on a d'une part

- $\hat{x}_{k+1|k} = F\hat{x}_{k|k}$;
- $P_{k+1|k} = F \cdot P_{k|k} \cdot F^T + Q$;

et d'autre part

- $K_{k+1} = P_{k+1|k} H^T (H P_{k+1|k} H^T + R)^{-1}$;
- $\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_{k+1} - H \hat{x}_{k+1|k})$;
- $P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H) P_{k+1|k}$.

L'estimation initiale $\hat{x}_{0|-1}$ et sa variance $P_{0|-1}$ sont la moyenne et la variance de x_0 . Dans le cas particulier où x_0 est déterministe, on peut partir de $\hat{x}_{0|0}$ car $\hat{x}_{0|-1} = x_0 = \hat{x}_{0|0}$ et $P_{0|-1} = 0 = P_{0|0}$.

On utilise donc les formules en 2 temps : pour passer de $(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$ à $(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$; puis pour passer de $(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$ à $(\hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1})$.

On peut aussi réunir les deux étapes et calculer directement $P_{k+1|k}$ en fonction de $P_{k|k-1}$. C'est ce qu'on appelle l'équation de Riccati, qui s'écrit alors

$$P_{k+1|k} = Q + F P_{k|k-1} F^T - F P_{k|k-1} H^T \cdot (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1} \cdot H P_{k|k-1} F^T.$$

2 Filtre de Kalman

Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance σ_x^2 . Soit (ε_n) une suite de variables gaussiennes i.i.d. centrées de variance σ_ε^2 indépendantes de X . Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les observations bruitées

$$Y_n = X + \varepsilon_n.$$

On connaît les paramètres $m, \sigma_x^2, \sigma_\varepsilon^2$, et on veut avoir une estimation \hat{X}_n de X à partir des valeurs observées Y_0, \dots, Y_n .

On considère le problème sous la forme dynamique suivante

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \\ Y_n = X_n + \varepsilon_n \end{cases}$$

afin de pouvoir utiliser les formules du filtre de Kalman. On note $\mathcal{N}(\hat{X}_n, p_n)$ la loi conditionnelle de X sachant Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} .

Pour $n = 0$, la loi $\mathcal{N}(\hat{X}_0, p_0)$ est donc la loi de X , et on pose donc $\hat{X}_0 = m$ et $p_0 = \sigma_x^2$.

1. Montrer qu'en posant $F = 1$, $Q = 0$, $H = 1$ et $R = \sigma_\varepsilon^2$, nous sommes dans le cadre du filtre de Kalman de la section précédente. Expliquer pourquoi \hat{X}_n correspond à $\hat{x}_{n-1|n-1}$ ET à $\hat{x}_{n|n-1}$, et que p_n correspond à $P_{n-1|n-1}$ ET à $P_{n|n-1}$ dans cette situation.
2. Ecrire l'équation de Riccati pour p_n associé au filtre de Kalman pour ce système dynamique. Résoudre explicitement cette équation, et montrer qu'on obtient alors

$$p_n = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}.$$

Indication: on pourra remarquer que $1/p_n$ est une suite arithmétique

3. Dédurre de la question précédente la formule de récurrence de l'estimateur \hat{X}_n donné par l'espérance conditionnelle de X sachant Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} .
4. Résoudre l'équation trouvée dans la question c), c'est-à-dire, exprimer \hat{X}_n à partir de Y_0, Y_1, \dots, Y_n et des paramètres $m, \sigma_x^2, \sigma_\varepsilon^2$. *Indication: on pourra remarquer que*

$$\left(n + 1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2}\right) \hat{X}_{n+1} = \left(n + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2}\right) \hat{X}_n + Y_n$$

5. Que se passe-t-il si l'on suppose que σ_x^2 tend vers $+\infty$. Commenter ce résultat.
6. **TP** - Dans le fichier disponible sur moodle se trouvent 300 valeurs de l'observation $(Y_k)_{1 \leq k \leq 300}$ pour une valeur de X inconnue. Charger le fichier de données avec la commande `numpy.loadtxt("nomdudossier.txt")` et afficher les données sur un graphique.
7. **TP** - Calculer à l'aide d'un programme les valeurs de \hat{p}_k et \hat{X}_k pour $0 \leq k \leq 300$. Les valeurs des paramètres sont $m = 2$, $\sigma_x^2 = 1$ et $\sigma_\varepsilon^2 = 2$.
8. **TP** - Tracer sur un même graphique la valeur de \hat{X}_k ainsi que l'intervalle de confiance à 95%.
9. **TP** - Aurait-on pu utiliser une autre méthode pour retrouver la valeur de X ?

3 Oscillateur

Soit $\omega > 0$. Si on veut modéliser les oscillations $z(t)$ d'un pendule soumis à l'équation

$$z''(t) = -\omega^2 z(t), \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1, \quad (t \in \mathbb{R}); \quad (1)$$

on peut l'écrire sous la forme vectorielle $x'(t) = Ax(t)$ pour le vecteur $x(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et une matrice A .

1. Expliciter les quantités A et $x(0)$, et montrer que la solution $x(t) = e^{tA}x(0)$ vérifie

$$x(t+h) = e^{hA}x(t).$$

2. Vérifier que

$$e^{hA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega h) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega h) \\ -\omega \sin(\omega h) & \cos(\omega h) \end{pmatrix}.$$

On fixe $\omega = 1$ et $h = 0.01$. On s'intéresse à un modèle gaussien $(X_k)_{k \geq 0}$ d'une version discrétisée du pendule :

$$X_{k+1} = e^{hA} X_k + \epsilon_k,$$

avec $X_0 = z(0)$ et (ϵ_k) des vecteurs gaussiens centrés de \mathbb{R}^2 , de variance $\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$ avec $\sigma > 0$.

3. **TP** - Simuler $(X_k)_{0 \leq k \leq 3000}$, afficher graphiquement la première composante de X_k (pour différents σ).

On ne mesure que la position, c'est-à-dire la première coordonnée bruitée de X_k

$$Y_k = H \cdot X_k + \eta_k,$$

avec $H = (1 \ 0)$, et (η_k) des gaussiennes réelles centrées de variance $\delta^2 > 0$.

4. **TP** - Simuler $(Y_k)_{0 \leq k \leq 3000}$ à partir de $(X_k)_{0 \leq k \leq 3000}$.

5. **TP** - Construire le filtre de Kalman permettant l'estimation $\hat{X}_{k|k}$ de X_k sachant Y_0, Y_1, \dots, Y_k .

6. **TP** - Afficher graphiquement les observations bruitées Y_k , la première composante de $\hat{X}_{k|k}$ et la première composante de X_k (prendre par exemple $\sigma = 0.01, \delta = 0.5$, ou $\sigma = 0.1, \delta = 5$). Commentez.