M1 MAPI3 - Simulations stochastiques 2024-2025
Xavier Bressaud *xavier.bressaud@math.univ-toulouse.fr*
Manon Costa *manon.costa@math.univ-toulouse.fr*
Bastien Mallein *bastien.mallein@math.univ-toulouse.fr*

TD 3 - Modèle gaussien : le conditionnement

Cours : Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ un vecteur gaussien (en vecteurs colonnes) avec

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_Y \end{pmatrix}.$$

On suppose que Σ_Y est inversible. L'espérance conditionnelle de X sachant Y est donnée par

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mu_X + \Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1}(Y - \mu_Y).$$

C'est la meilleure approximation L^2 de X par une fonction de Y. L'erreur commise en remplaçant X par $\mathbb{E}[X|Y]$ est la variable aléatoire $X - \mathbb{E}[X|Y]$, qui suit une distribution gaussienne $\mathcal{N}(0, \Sigma_{X|Y})$ avec

$$\Sigma_{X|Y} = \Sigma_X - \Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1}\Sigma_{YX}.$$

On dit parfois que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi gaussienne de moyenne $\mathbb{E}[X|Y]$ et de variance $\Sigma_{X|Y}$

1 Loi vers conditionnement

Soit Z_1, Z_2, Z_3 des v.a. réelles indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère les variables $X = Z_1 + Z_2$ et $Y = Z_1 + Z_3$.

1. Justifier que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien et donner sa moyenne et sa matrice de covariance
2. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.
3. Quelle est la loi de $X - \mathbb{E}[X|Y]$?

2 Prévision

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ en colonne de moyenne $m := (m_1, m_2, m_3)^T$ et de matrice de variance covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \sigma^2 & c_2 & c_3 \\ c_2 & \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ c_3 & \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

On suppose $|\rho| < 1$.

1. Montrer que la matrice $\tilde{\Gamma} := \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer $\tilde{\Gamma}^{-1}$.
2. Calculer l'espérance conditionnelle de X_1 sachant $(X_2, X_3)^T$.
3. Une agricultrice a modélisé les températures $(T_1, T_2, T_3)^T$ moyennes journalières, mesurées en trois points de sa propriété comme un vecteur gaussien d'espérance $(25, 25, 25)^T$ et de matrice de variance covariance

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Un jour T_1 ne peut pas être mesurée mais T_2 vaut 26 et T_3 vaut 25. Donner une prédiction pour T_1.

3 Somme empirique

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$ avec $i = 1, \ldots, n$. Soit $S = X_1 + \ldots + X_n$. Quelle est l'espérance conditionnelle du vecteur colonne $(X_1, \ldots, X_n)^T$ sachant S, et quelle est la loi de l'erreur commise en remplaçant le vecteur par son espérance conditionnelle ?

4 Conditionnement vers loi

On considère un vecteur gaussien (D, S) tel que D suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \tau^2)$ et tel que l'espérance conditionnelle de S sachant que D est égale à D et $S - \mathbb{E}[S|D]$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Décrire comment simuler le couple (D, S) à partir de deux gaussiennes standards indépendantes $\mathcal{N}(0, 1)$ notées U et V.
2. Quelle est la loi de S ?
3. Quelle est la loi du couple (D, S) ?
4. Déterminer l'espérance conditionnelle de D sachant S.
5. Déterminer la loi de $D - \mathbb{E}[D|S]$.

5 Variance empirique

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0, 1)$ avec $i = 1, \ldots, n$. Soit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

et

$$\bar{\sigma}_n = \frac{1}{n}\Big((X_1 - \bar{X}_n)^2 + \ldots + (X_n - \bar{X}_n)^2\Big).$$

1. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que $\begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ X_i - \bar{X}_n \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.
2. Montrer que les variables aléatoires $\bar{X}_n$ et $X_i - \bar{X}_n$ sont indépendantes.
3. Montrer que $\bar{X}_n$ et $\bar{\sigma}_n$ sont indépendants.