
TD 2 & TP 1 - Méthode de Monte Carlo

Exercice 1: Approximation numérique d'une intégrale.

On considère une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et à valeurs dans $[0, K]$. On se propose d'évaluer numériquement l'intégrale I définie par $I = \int_a^b f(x) dx$.

Méthode déterministe.

On peut approcher I par une intégrale de Riemann, en discrétisant l'intervalle $[a, b]$. On peut alors arbitrairement construire les deux approximations suivantes :

$$I_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i), \quad I_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}),$$

où $x_0 = a$ et $x_n = b$. Par exemple pour une discrétisation régulière, on prendra $x_i = (b - a) \frac{i}{n}$.

1. Faire un dessin pour montrer comment $I_1(n)$ et $I_2(n)$ sont en fait des manières d'approcher l'aire I sous la courbe de f par des rectangles.
2. On suppose que f est C -Lipchitz (c'est-à-dire que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ pour tout $a \leq x, y \leq b$). En choisissant une discrétisation régulière, majorer l'erreur faite par $I_1(n)$ et $I_2(n)$ en fonction de n .
3. On peut améliorer l'approximation, en approchant l'aire I sous la courbe f par des trapèzes au lieu d'utiliser des rectangles. Faire un dessin. Comment peut-on exprimer cette troisième approximation $I_3(n)$ grâce à $I_1(n)$ et $I_2(n)$?

Méthode de Monte-Carlo

Remarquons que $I = (b - a)\mathbb{E}[f(U)]$ lorsque U est uniformément distribué sur $[a, b]$. On considère n variables aléatoires indépendantes (U_i) uniformes sur $[a, b]$ et on définit l'estimateur

$$\hat{I}(n) = \frac{(b - a)}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i).$$

4. Justifier la convergence presque sûre de cet estimateur.
5. En utilisant le théorème central limite, et en majorant la variance par $(b - a)^2 K^2$, donner un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95.
6. **TP** - Pour les TPs, on prend maintenant $a = 0$, $b = 2\pi$, $K = 2$ et $f(x) = \cos(x) \exp(-\frac{x}{5}) + 1$. Vérifier, à l'aide de deux intégrations par parties successives que $\int_0^{2\pi} [\cos(x) \exp(-\frac{x}{5}) + 1] dx = \frac{5}{26} (1 - e^{-2\pi/5})$.
7. **TP** - Représenter graphiquement les approximations $I_3(n)$ et $\hat{I}(n)$ obtenues en fonction de n . Donner l'intervalle de confiance de $\hat{I}(n)$ et vérifier que cet intervalle de confiance contient la vraie valeur de l'intégrale dans plus de 95% des cas.

Exercice 2: Autres intégrales

En écrivant l'intégrale sous forme d'espérance, donner à chaque fois une méthode de Monte-Carlo pour estimer l'intégrale:

1. $\int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx$
2. $\int_0^{+\infty} \sin(x^4) \exp(-2x) \exp(-x^2/2) dx$

Exercice 3: Intervalle de confiance

On suppose que $(X_n)_n$ est une suite de variable aléatoires réelles uniformes indépendantes à valeurs dans $[0, \theta]$, avec $0 \leq \theta \leq 2$. On cherche à évaluer θ .

1. Calculer la loi de $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[n \left(\frac{M_n}{\theta} - 1 \right) \leq -t \right] = e^{-t}.$$

Indications : on pourra utiliser $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$.

3. En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ autour de M_n de niveau $\alpha > 0$ fixé. Comment évolue sa largeur en fonction de n ?

Exercice 4: Réduction de la variance

On cherche à calculer $I = \int_0^1 \exp(x^2) dx$ par une méthode de Monte-Carlo.

1. En écrivant $I = \mathbb{E}[e^{U^2}]$ pour U une variable aléatoire uniforme sur $(0, 1)$, en déduire une première méthode de Monte-Carlo pour approcher I .

TP - Donner un code numérique pour cette méthode utilisant n tirages indépendants d'une variable aléatoire.

TP - Illustrer la convergence de l'algorithme quand la valeur de n augmente. De quel type de convergence s'agit-il ?

2. Dans l'optique de réduire la variance, on cherche une fonction proche de e^{U^2} , mais qu'on sait intégrer. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$, développement limité de e^x , est un bon candidat. Montrer que $I = \mathbb{E}[e^{U^2} - 1 - U^2] + \frac{4}{3}$, et en déduire une seconde méthode de Monte-Carlo.

TP - Estimer numériquement les variances des variables aléatoires e^{U^2} et $e^{U^2} - 1 - U^2$. (*On prendra le soin d'expliquer dans le compte rendu la méthode utilisée.*)

Expliquer pourquoi la variance de l'estimation de I est réduite d'un facteur 10 grâce à la seconde méthode.

3. Imaginer une troisième méthode de Monte-Carlo, en utilisant une fonction encore plus proche de e^x .

TP - Estimer l'amélioration sur la variance de la troisième méthode.

Exercice 5: Volume d'une sphère

On veut comparer la méthode déterministe des pavés et la méthode de Monte-Carlo pour estimer un volume. On va estimer, dans l'espace de dimension d , le volume d'une sphère de rayon R . Voilà les valeurs exactes

Dimension :	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
Volume :	πR^2	$\frac{4}{3} \pi R^3$	$\frac{1}{2} \pi^2 R^4$	$\frac{8}{15} \pi^2 R^5$	$\frac{1}{6} \pi^3 R^6$	$\frac{16}{105} \pi^3 R^7$

1. **TP** - Afficher les volumes en fonction de la dimension. Que constatez-vous ?
2. **TP** - Proposer une méthode déterministe (qui compte le nombre de pavés de côté $1/N$ contenus dans la sphère) et afficher les volumes pour $d = 1, 2, 3$ (avec $N = 100$).
3. **TP** - Vérifiez numériquement que lorsque N est multiplié par 10, l'erreur est divisée par 10. Par combien est alors multiplié le nombre de calculs effectués par l'algorithme ?
4. **TP** - Proposer une méthode de Monte-Carlo d'estimation du volume, en générant N point indépendants dans le cube de dimension d . Afficher les volumes pour $d = 1, 2, 3$ (avec $N = 1000$).
5. **TP** - Comment évolue la taille de l'intervalle de confiance en fonction de N ? Comment évolue le nombre de calculs effectués en fonction de N ?
6. **TP** - Conclure sur les avantages et inconvénients des deux méthodes, et choisir une de ces deux méthodes pour évaluer le volume de la sphère en dimension 7.