

---

## TD 8,9 - Martingales et théorèmes d'arrêt

---

### Exercice 1. Temps d'arrêts

On considère  $S_n$  une marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ . Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêts pour la filtration  $\mathcal{F}_n$  ?

1.  $T_1 = \min\{n \geq 0, S_n = 2025\}$
2.  $T_2 = \min\{n \geq 2025, S_n = S_{n-2025}\}$
3.  $T_3 = \min\{n \geq 0, S_n = S_{n+2025}\}$
4.  $T_4 = \min\{n \geq T_1, S_n = 0\}$
5.  $T_5 = \max\{0 \leq n \leq 2025, S_n = 0\}$
6.  $T_6 = \min\{0 \leq n \leq 2025, \forall 0 \leq m \leq n, S_m \leq S_n\}$

### Exercice 2. Constructions de martingales

On considère  $S_n$  une marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ .

1. Montrer que  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $\mathcal{F}_n$ .
2. Montrer que  $(S_n^2 - n)_{n \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $\mathcal{F}_n$ .
3. Montrer que  $(S_n^3 - 3nS_n)_{n \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $\mathcal{F}_n$ .
4. Soit  $P(X, Y)$  un polynôme à deux variables.. Montrer que  $P(S_n, n)$  est une martingale par rapport à  $\mathcal{F}_n$  si pour tout  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  
$$P(x+1, y+1) - 2P(x, y) + P(x-1, y+1) = 0.$$
5. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Trouver  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\exp(\alpha S_n - \beta n)$  est une martingale pour  $\mathcal{F}_n$ .

### Exercice 3. Temps de retours

On considère  $S_n$  une marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ . Soient  $a, b \geq 0$ , on définit

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

On rappelle que  $T < \infty$  presque sûrement<sup>1</sup>.

1. En utilisant la première martingale de l'exercice 2 et le théorème d'arrêt, démontrer que

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}.$$

2. En utilisant la deuxième martingale de l'exercice 2 et le théorème d'arrêt, démontrer que

$$\mathbb{E}(T) = ab.$$

### Exercice 4. Modélisation

Au photomaton, Jeanne cherche à obtenir la meilleure photo possible. Elle a trois essais. Après le premier, elle peut l'accepter ou continuer, auquel cas elle perd la première photo. Idem pour le deuxième. Et, si elle a refusé la deuxième photo, elle est obligée de prendre la troisième. Pour modéliser la situation, supposons que Jeanne mette une note entre 0 et 5 à chaque photo et supposons que ces notes  $U_1, U_2, U_3$  soient des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $\llbracket 0, 5 \rrbracket$ . Voici plusieurs stratégies. Pour chacune d'elles, calculer la note moyenne de la photo obtenue par Jeanne.

---

<sup>1</sup>Savez-vous justifier pourquoi ?

1. Jeanne n'accepte la première ou la deuxième photo que si elle la note 5. Sinon, elle prend la troisième.
2. Jeanne refuse la première photo systématiquement. Puis, elle décide de prendre la deuxième si et seulement si sa note est supérieure à un seuil  $s$ . On note  $N(s)$  la note obtenue par cette stratégie. Quel est le meilleur choix pour  $s$  en terme d'espérance de  $N(s)$  ?
3. Jeanne refuse la première photo systématiquement. Puis, elle décide de prendre la deuxième si et seulement si sa note est dans un ensemble  $A_2$ . Quel est le meilleur choix pour  $A_2$  ? On notera  $M_2$  cette stratégie optimale.
4. Forte des expériences précédentes, Jeanne envisage la stratégie optimale  $M_1$ . Quelle est-elle ?  
Indication : On écrira  $A_1$  l'ensemble des cas où on accepte la première photo, et on exprimera la note  $M_1$  en fonction de  $A_1$ ,  $U_1$  et  $M_2$ .

*Remarque :* On peut généraliser ce résultat au cas d'un photomaton à  $n$  essais. La suite  $(M_k)_{1 \leq k \leq n}$  construite ici s'appelle l'enveloppe de Snell de la suite  $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$  des notes des photos. C'est la plus petite surmartingale majorant le processus  $(U_k)$ . Elle est définie par récurrence descendante par

$$M_n = U_n$$

et

$$M_k = \max(N_k, \mathbb{E}[M_{k+1} | \mathcal{F}_k])$$

pour  $F_k = \sigma(U_1, \dots, U_k)$ .

### Exercice 5. (★) Réciproque au théorème d'arrêt

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré. Dans tout le problème,  $(X_n)_{n \geq 0}$  désigne un processus intégrable et adapté sur cet espace.

1. Si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale et  $T$  un temps d'arrêt borné, justifier que

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0].$$

On suppose maintenant que, pour tout temps d'arrêt borné  $T$ ,  $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est alors une martingale.

2. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ .
3. Soit  $n \geq 0$  et  $A \in \mathcal{F}$ . On définit

$$T = n\mathbb{1}_A + (n+1)\mathbb{1}_{A^c}.$$

À quelle condition  $T$  est-il un temps d'arrêt ? On supposera dans la suite que cette condition est réalisée.

4. Exprimer  $\mathbb{E}[X_T]$ .
5. Justifier que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}].$$

6. En déduire que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_A].$$

7. Conclure.

**Exercice 6. Décomposition de Doob** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. positives et intégrables. Soit  $S_0 = 0$  et, pour tout  $n \geq 1$ , soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Soit  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  la filtration canonique associée à  $(S_n)_{n \geq 0}$ . Soit enfin  $T$  un temps d'arrêt pour  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  que l'on suppose intégrable.

1. Montrer que  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale relativement à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
2. On cherche à construire un processus croissant et prévisible  $(A_n)_{n \geq 0}$  tel que  $(S_n - A_n)_{n \geq 0}$  soit une martingale relativement à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Quelle relation doit satisfaire  $A_{n+1} - A_n$  ? Calculer  $A_n$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $S_{T \wedge n}$  est intégrable et que  $\mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[T \wedge n] \cdot \mathbb{E}[X_1]$ .
4. En déduire que  $S_T$  est intégrable et que  $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T] \cdot \mathbb{E}[X_1]$ .