M1 MAPI3 - Simulations stochastiques 2025-2026
Manon Costa *manon.costa@math.univ-toulouse.fr*
Laure Coutin *laure.coutin@math.univ-toulouse.fr*

TD 7 - Conditionnement

Conditionnement discret

Exercice 1.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2.

1. Déterminer $\mathbb{P}\left(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n\right)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[X_1 \mid X_1 + X_2\right]$.

On rappelle que pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$; et que la somme de deux variables de Poisson indépendante suit encore une loi de Poisson de paramètre la somme des deux paramètres

Exercice 2.
Soit $(p, q) \in [0, 1]^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un nombre X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Cette valeur de X étant connue, on tire au hasard un nombre Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(X, q)$. Montrer que Y suit encore une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 3.
Soit $p \in (0, 1)$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi$\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi conditionnelle de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sachant $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $\min(X, a)$.

Exercice 5.
Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer sans calculs que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $\mathbb{E}\left[X_i \mid S_n\right] = \mathbb{E}\left[X_j \mid S_n\right]$.
2. En déduire que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}\left[X_i \mid S_n\right] = S_n/n$.
3. Évaluer, pour $m \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{E}\left[S_m \mid S_n\right]$.

Exercice 6. - Processus de Galton Watson
On veut s'intéresser à la taille d'une population au cours du temps mesuré en génération. On suppose qu'initialement, on a un seul individu : $Z_0 = 0$, et que les Z_n individus vivant à la génération se reproduisent tous indépendamment les uns des autres et avec la même loi.
On se donne $(X_{k,n})$ une famille de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $\mathbb{E}(X_{n,k}) = m < \infty$. La variable $X_{n,k}$ décrit le nombre d'enfant du $k$ieme individu de la génération n. On peut alors écrire

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}.$$

On construit alors un processus de Galton Watson.

1. Soit $n \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n = k)$ en fonction de m et n.
2. En déduire $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n)$.
3. A partir de cette relation, exprimer $E(Z_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$.
4. En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

Conditionnement général

Exercice 7. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et a, b et c trois paramètres réels fixés. On définit la variable aléatoire Y

$$Y = aX_1 + bX_1X_2 + cX_2.$$

1. Calculer $Y_1 = \mathbb{E}[Y|X_1]$ et $Y_2 = \mathbb{E}[Y|X_2]$.
2. En déduire une expression de $v_1 = \mathrm{Var}(Y_1)$ et $v_2 = \mathrm{Var}(Y_2)$ en fonction des moments de X_1 et X_2.

Exercice 8. Calculs d'espérances conditionnelles
Trouver la loi conditionnelle et l'espérance conditionnelle de X sachant Y, lorsque la densité du couple (X, Y) est donnée par

1. $f(x, y) = ye^{-y(x+1)}\mathbb{1}_{x\geq 0, y\geq 0}$
2. $f(x, y) = 4y(x-y)e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{0\leq y\leq x}$.

Exercice 9. Loi conditionnelle et loi du couple Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1 et que la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est une loi de Poisson de paramètre y.

1. Calculer les lois du couples (X, Y), de X et la loi conditionnelle de Y sachant X.
2. Montrer que $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = 1$ en conditionnant d'abord par rapport à Y puis par rapport à X.

Exercice 10.Suite construite récursivement
Soit X_1 une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. On définit alors

- Si $X_1 = x_1$, X_2 est une variable uniforme sur $[x_1, x_1 + 1]$
- et de même si $X_n = x_n$, $X_{n+1} \sim \mathcal{U}(x_n, x_n + 1)$.

Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 11.Espérance conditionnelle et égalité p.s.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires positives. On suppose que $\mathbb{E}[X \mid Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y \mid X] = X$. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.