
TD 5-6 - Classification des états Théorèmes de convergence des Chaînes de Markov

Notations : Dans toute cette feuille de TD, on notera pour X_n une chaîne de Markov à valeurs dans E et $x \in E$, T_x le temps d'atteinte de x et T_x^+ le temps de retour en x . Ces deux temps d'arrêts sont définis par

$$T_x = \inf\{n \geq 0, X_n = x\}$$

$$T_x^+ = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$$

Exercice 1. Exemple d'une chaîne non irréductible

Soit $E = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $a \in [0, 1/2]$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur E de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 - a & 0 & a \\ 1/3 & 2/3 - a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le graphe de la chaîne, ainsi que les classes et leur nature (discuter suivant a).
2. Donner les probabilités invariantes pour Q (discuter suivant a).
3. On suppose dans cette question que $X_0 = 1$ et $a = 1/3$.
 - (a) Quelle est la loi du temps de sortie de la classe $\{1, 2\}$?
 - (b) Par une analyse à un pas, calculer $\mathbb{P}_1(T_3 < \infty)$.
Indication : on établira deux équations vérifiées par $p_1 = \mathbb{P}_1(T_3 < \infty)$ et $p_2 = \mathbb{P}_2(T_3 < \infty)$.
 - (c) En déduire $\mathbb{P}_1(T_4 < \infty)$.
 - (d) Quelle est alors la limite de X_n quand $n \rightarrow \infty$?
4. On suppose dans cette question $X_0 = 1$ et $a = 0$. Quelle est la limite de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$?

Exercice 2. Récurrence ou transience de la marche aléatoire sur la droite

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire sur la droite \mathbb{Z} de paramètre $p \in (0, 1)$; sa matrice de transition est donnée par

$$P(k, k+1) = p = 1 - P(k, k-1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse au caractère récurrent ou transitoire de la chaîne. On supposera par convention que $X_0 = 0$.

1. Montrer que cette chaîne est irréductible.
2. On suppose $p \neq 1/2$. Écrire X_n à l'aide d'une suite de variables aléatoires $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\{-1, +1\}$. Montrer que la chaîne est transiente en utilisant la loi des grands nombres
3. On suppose maintenant $p = 1/2$. Montrer que $P^{2n+1}(0, 0) = 0$ et

$$P^{2n}(0, 0) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

4. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $P^{2n}(0, 0) \geq \frac{1}{2n}$.
Indication : on pourra utiliser le fait que $\binom{2n}{n} = 4 \frac{2n-1}{2n} \binom{2(n-1)}{n-1}$
5. Conclure que lorsque $p = 1/2$ la marche aléatoire est récurrente.

Exercice 3. Chateau de cartes Soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels de $[0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur \mathbb{N} partant de $X_0 = 0$ et de matrice de transition

$$Q(k, l) = \begin{cases} p_k & \text{si } l = k + 1 \\ 1 - p_k & \text{si } l = 0. \end{cases}$$

On suppose d'abord que pour tout $k \geq 0$, $p_k = p$, où $p \in (0, 1)$.

1. Dessiner le graphe de la transition.
2. Montrer que la transition est irréductible.
3. Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2 .
4. Montrer qu'il existe une probabilité π invariante pour Q .
5. La transition est-elle récurrente ou transiente ?
6. Calculer $\mathbb{E}_0[T_0^+]$.
7. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X_k$ converge presque sûrement et calculer sa limite.

On suppose maintenant que pour tout $k \geq 1$, $p_k = 1 - 2^{-k-1}$.

1. Montrer que la transition est irréductible.
2. Montrer que

$$\mathbb{P}_0(T_0^+ = \infty) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2^{-k}).$$

3. En étudiant la convergence du produit précédent, dire si la transition est récurrente.

Exercice 4. Records géométriques Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in (0, 1]$. Pour tout $n \geq 0$, soit

$$Z_n = \max(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.
2. Donner les classes de communication et leur nature.

Exercice 5. Marche aléatoire sur un graphe complet

Soit $k \geq 1$ et $G = (V, E)$ le graphe complet à k sommets, autrement dit le graphe à k sommets dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête. On s'intéresse à la marche aléatoire simple sur G , chaîne de Markov de transition Q que l'on notera $(X_n)_{n \geq 0}$.

1. Donner l'expression de Q .
2. Pour tout $n \geq 0$, calculer Q^n . [Indication : on pourra écrire $Q = \frac{1}{k-1}(J_k - I_k)$.]
3. En déduire que pour tout sommet S et pour toute loi initiale μ_0 sur V , $\mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = S)$ converge et préciser sa limite.
4. Si $S \in V$, déterminer la loi, sous \mathbb{P}_S , du temps de retour en S .

Exercice 6. Récurrence nulle de la marche aléatoire simple symétrique

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire sur la droite \mathbb{Z} de paramètre $p \in (0, 1)$; sa matrice de transition est donnée par

$$P(k, k+1) = p = 1 - P(k, k-1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On supposera par convention que $X_0 = 0$. On veut montrer par un critère analytique que pour $p = 1/2$ la chaîne est récurrente nulle.

On définit de façon générale la série génératrice des temps de retour d'une chaîne de Markov par $\forall x, y \in E, s \in [0, 1]$

$$U(x, y, s) = \mathbb{E}_x \left[s^{T_y^+} \mathbf{1}_{T_y^+ < \infty} \right] = \sum_{n \geq 1} s^n \mathbb{P}(T_y^+ = n | X_0 = x).$$

En particulier, $U(x, x, 1) = \mathbb{P}(T_x^+ < \infty | X_0 = x)$.

1. Avec une analyse à un pas, montrer que

$$U(1, 0, s) = s((1-p) + pU(2, 0, s)), \quad \text{et} \quad U(-1, 0, s) = s(p + (1-p)U(-2, 0, s))$$

2. Justifier que pour tout $x, U(x+1, x, s) = U(1, 0, s)$.

3. On veut maintenant calculer $U(2, 0, s)$. En utilisant la propriété de Markov au temps T_1^+ démontrer que

$$U(2, 0, s) = U(1, 0, s)^2$$

4. Dédurre des question précédentes que

$$U(1, 0, s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2p(1-p)}}{2ps}$$

On pourra utiliser que $U(1, 0, 0) = 0$. On admettra qu'un calcul similaire permet d'obtenir

$$U(-1, 0, s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2p(1-p)}}{2(1-p)s}$$

5. En utilisant de nouveau un raisonnement à un pas et les questions précédentes, montrer que

$$U(0, 0, s) = 1 - \sqrt{1 - 4s^2p(1-p)}.$$

6. **On considère maintenant que $p = 1/2$** Justifier que 0 est bien récurrent.

7. Montrer que 0 est récurrent nul, en justifiant que $E_0(T_0^+) = \infty$.

On pourra calculer pour $s \in (0, 1)$ $\partial_s U(0, 0, s)$.

Exercice 7. Chaînes de naissance et mort Soit $(b_k, r_k, d_k)_{k \geq 0}$ une suite de triplets de nombres réels positifs ou nuls tels que $d_0 = 0$ et $b_k + r_k + d_k = 1$ pour tout k . On définit la chaîne de naissance et mort $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{N} de probabilités de transition

$$P(k, k+1) = b_k, \quad P(k, k) = r_k, \quad P(k, k-1) = d_k,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on a imposé $d_0 = 0$ pour ne pas avoir de transition de 0 à -1).

1. Quel est le graphe de la chaîne de Markov ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres pour que la chaîne soit irréductible.

On supposera cette condition vérifiée par la suite

2. Soit $k < l$ et $x \in \{k, \dots, l\}$, par une analyse à un pas, écrire la relation de récurrence que vérifie la fonction $f(x) = \mathbb{P}_x(T_k < T_l, T_k < \infty)$, et donner les valeurs aux bords, $f(l)$ et $f(k)$.

3. On définit la fonction $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\phi(0) = 0$ et

$$\phi(k) = \sum_{l=0}^{k-1} \prod_{j=1}^l \frac{d_j}{b_j},$$

par convention le terme en $l = 0$ du produit étant vide, il est égal à 1.

Vérifier que

$$f(x) = \frac{\phi(l) - \phi(x)}{\phi(l) - \phi(k)}$$

est l'unique solution.

4. Justifier que

$$\mathbb{P}_0(T_0^+ < \infty) \geq P_1(T_0 < \infty) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1(T_0 < T_l, T_0 < \infty)$$

5. On pose $\phi(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \frac{d_j}{b_j} \right)$. En déduire que si $\phi(\infty) = \infty$, alors la chaîne de Markov est récurrente.
6. En utilisant un argument similaire pour $\mathbb{P}_0(T_0^+ = \infty)$ justifier que la réciproque est vraie, c'est à dire que si la chaîne est récurrente, alors $\phi(\infty) = \infty$.
7. On suppose maintenant $\phi(\infty) < \infty$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ presque sûrement, quelle que soit la condition initiale $k \in \mathbb{N}$.