Manon Costa manon.costa@math.univ-toulouse.fr
Laure Coutin laure.coutin@math.univ-toulouse.fr

TD 4 - Mesures invariantes et espace d'état fini

Exercice 1. On considère la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E = [\![1,8]\!]$ telle que, sous $\mathbb{P}_\mu$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ soit une chaîne de Markov de transition Q et de loi initiale μ.

1. Tracer le graphe de la chaîne de Markov.
2. Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}_2(X_n = 3)$.

On note $i \to j$ s'il existe n tel que $\mathbb{P}_i(X_n = j) > 0$, autrement dit s'il existe, dans le graphe, un chemin de i vers j.

3. Dire pour quels couples (i, j) on a $i \to j$.

Exercice 2. Mesure réversibles
Il est souvent difficile de calculer la mesure invariante d'une chaîne de Markov car il faut résoudre Card(E) *équations :*

$$\pi(x) = \sum_{y\in E} \pi(y)P(y,x)$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une condition suffisante plus simple à étudier.
Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov sur E. Une mesure positive ν est dite *réversible pour* P si pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\nu(x)P(x,y) = \nu(y)P(y,x).$$

Montrer que si ν est réversible alors elle est invariante pour P.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Marche aléatoire sur un graphe fini Soit G un graphe fini (simple et sans boucle), c'est à dire un ensemble de sommets S et d'arêtes $\mathcal{A}$ formé de paires $\{x \neq y\}$ de sommets. Le degré d'un sommet est définit par

$$\deg(x) = \text{card}\{y \in S | \{x,y\} \in \mathcal{A}\}.$$

On suppose que $\forall x \in S$, $\deg(x) \geq 1$, et on définit la matrice stochastique

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)}, & \text{si } \{x,y\} \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. A quelles conditions sur le graphe G la chaîne de Markov associée à P est-elle irréductible ?
2. On supposera maintenant que la chaîne est bien irréductible. Trouver une mesure de probabilité réversible pour cette chaîne
3. Étant donnée une trajectoire $(X_n)_{n\geq 0}$ observée sur un temps long $N >> 1$ avec grande probabilité, quels sont les sommets du graphe les plus visités par cette trajectoire ?

Exercice 4. Marche aléatoire réfléchie

Une particule dans $[\![0, N]\!]$ se déplace à chaque instant, avec probabilité $p \in (0,1)$, d'un pas vers la droite et, avec probabilité $q = 1-p$, d'un pas vers la gauche. Sauf quand elle est en 0 (resp. en N), auquel cas elle se déplace, avec probabilité 1, en 1 (resp. en $N-1$).

1. Modéliser le déplacement de la particule par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et préciser son graphe et sa matrice de transition Q.
2. Montrer qu'il existe une unique probabilité π invariante pour Q.
3. Calculer π.
4. En déduire le temps moyen de retour en 0, en partant de 0.

Exercice 5. Urnes d'Ehrenfest On considère une urne contenant N balles réparties entre deux compartiments A et B. On note X_n le nombre de balles dans le compartiment A à l'instant n. On remarque que $X_n \in \{0, \cdots, N\}$ et qu'il y a $N - X_n$ balles dans le compartiment B.
L'évolution de X_n se fait de la façon suivante : à chaque instant on tire uniformément au hasard une boule de l'urne et on la change de compartiment.

1. Donner la matrice de transition P de la chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, et montrer qu'elle est irréductible.
2. Calculer l'unique mesure invariante π de P. De quelle probabilité classique s'agit-il ?
   Indication : on pourra chercher une mesure réversible.
3. Si N est pair, comparer $\mathbb{E}_0(T_0^+)$ et $\mathbb{E}_{N/2}(T_{N/2}^+)$ où T_x^+ est le premier temps de retour à l'état x.
4. (**) Supposons par exemple que $X_0 = 0$, est-ce que $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \pi(k)$.
5. On suppose maintenant qu'à chaque instant, la boule tirée est laissée dans son compartiment avec probabilité 1/2 et changée de compartiment avec probabilité 1/2. Reprendre les questions précédentes pour cette nouvelle dynamique.

Exercice 6. Construction de la mesure invariante - Reprise du cours

Soit E un ensemble fini et Q une matrice stochastique irréductible sur E. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de transition Q. On a vu dans le cours que la chaine X_n admet une unique probabilité invariante π. L'objectif ici est d'exprimer cette probabilité π en fonction des temps de retour en la chaîne définis par : pour tout $x \in E, T_x^+ = \inf\{n \geq 1 X_n = x\}$.

1. Montrer qu'il existe $r \geqslant 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathbb{P}_x(\exists n \in [\![0, r]\!] \ X_n = y) \geqslant \varepsilon$.
2. En déduire que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathbb{P}_y(T_x^+ > r) \leq 1 - \varepsilon$.
3. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}_x(T_x^+ > kr) \leqslant (1-\varepsilon)\mathbb{P}_x(T_x^+ > (k-1)r)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x[T_x^+] < \infty$.
5. Soit $x \in E$. Montrer que la mesure μ sur E donnée par
$$\mu(y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{T_x^+-1} \mathbb{1}_{X_k=y}\right]$$
   est une mesure Q-invariante.
6. En déduire que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x[T_x^+] = 1/\pi(x)$.