

**TD 2,3 - Chaîne de Markov et Modélisation**

**Exercice 1.** On dispose de deux pièces : l'une est normale et équilibrée, l'autre présente "face" des deux côtés. On choisit l'une des deux pièces au hasard, puis on la lance une infinité de fois. On modélise la suite des résultats des lancers par un processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans  $\{P, F\}$ .

1. On a obtenu pile au  $n$ -ieme lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir face au  $(n + 1)$ -ieme lancer ?
2. On a obtenu face au  $n$ -ieme lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir face au  $(n + 1)$ -ieme lancer ?
3. On a obtenu pile au  $(n - 1)$ -ieme lancer et face au  $n$ -ieme lancer. Quelle est la probabilité d'obtenir face au  $(n + 1)$ -ieme lancer ?
4. Le processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  est-il une chaîne de Markov ?

**Exercice 2. Chaîne de Markov à deux états.**

On considère l'espace  $\mathfrak{X} = \{1, 2\}$ , et une matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. À quelles conditions sur  $a, b, c, d$  la matrice  $P$  est-elle une matrice stochastique? On supposera dans tout ce qui suit que ces conditions sont réunies. Réécrire dans ce cas  $P$  en fonction seulement des paramètres  $a$  et  $d$ . Dessiner le graphe dirigé associé à cette matrice (qui peut dépendre des valeurs de  $a$  et  $d$ ).
2. On suppose pour les questions suivantes  $(a, d) \notin \{(0, 0), (1, 1)\}$ . Montrer que les deux vecteurs lignes

$$\pi = \left( \frac{1-d}{2-a-d}, \frac{1-a}{2-a-d} \right) \quad \text{et} \quad \eta = (1, -1)$$

sont des vecteurs propres pour l'action à droite de  $P$  :  $\pi P = \lambda_\pi \pi$  et  $\eta P = \lambda_\eta \eta$ , pour des valeurs propres réelles  $\lambda_\pi$  et  $\lambda_\eta$  que l'on calculera en fonction de  $a$  et  $d$ .

3. Soit  $\pi_0$  une mesure de probabilité sur  $\{1, 2\}$ , et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la chaîne de Markov sur l'espace d'états  $\{1, 2\}$  de matrice  $P$  et de mesure initiale  $\pi_0$ . Montrer qu'il existe un coefficient  $\beta \in \mathbb{R}$  qu'on calculera en fonction de  $\pi_0$  et de  $P$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\pi_0} [X_n = 1] &= \frac{1-d}{2-a-d} + \beta(a+d-1)^n; \\ \mathbb{P}_{\pi_0} [X_n = 2] &= \frac{1-a}{2-a-d} - \beta(a+d-1)^n. \end{aligned}$$

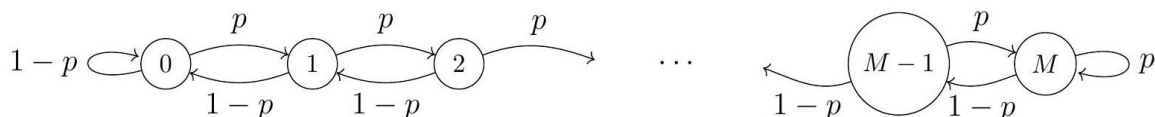
On pourra décomposer  $\pi_0$  sur la base  $(\pi, \eta)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

4. Que peut-on dire de  $\mathbb{P} [X_n = i] (i \in \{1, 2\})$  lorsque  $n$  tend vers l'infini?
5. On suppose que  $d = 1$  et  $a < 1$ . Montrer que  $\mathbb{P} [\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 2] = 1$ .

**Exercice 3. Temps de jeu dans le modèle de ruine du joueur**

On considère la chaîne  $(X_n)$  à valeurs dans  $\{0, \dots, M\}$  avec  $M > 0$  telle que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_1 = k + 1 | X_0 = k) = p, & \text{pour } 0 \leq k \leq M - 1 \\ \mathbb{P}(X_1 = k - 1 | X_0 = k) = 1 - p, & \text{pour } 1 \leq k \leq M \\ \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0) = 1 - p, & \mathbb{P}(X_1 = M | X_0 = M) = p. \end{cases}$$



On rappelle que cette chaîne modélise le montant gagné par un joueur qui à chaque pas de temps, peut gagner 1 avec probabilité  $p$  et perdre 1 avec probabilité  $1 - p$ . On suppose ici que  $M$  est le montant maximal qui peut être gagné.

Pour une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  à valeurs dans  $\{0, \dots, M\}$ , on définit deux temps d'atteinte

$$\tau_0((u_n)_{n \geq 0}) = \inf\{n \geq 0, u_n = 0\}$$

et

$$\tau_M((u_n)_{n \geq 0}) = \inf\{n \geq 0, u_n = M\}.$$

En particulier,  $\tau_0((X_n)_{n \geq 0})$  est le temps de ruine du joueur et  $\tau_M((X_n)_{n \geq 0})$  le temps pour récolter le montant maximal. Enfin, on pose  $\tau((X_n)_{n \geq 0}) = \min(\tau_0((X_n)_{n \geq 0}), \tau_M((X_n)_{n \geq 0}))$  qui correspond au temps de jeu. L'objectif de l'exercice est de calculer la fonction  $g$  définie par

$$g(k) = \mathbb{E}(\tau((X_n)_{n \geq 0}) | X_0 = k) = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \infty} t \mathbb{P}(\tau((X_n)_{n \geq 0}) = t | X_0 = k), \quad 0 \leq k \leq M.$$

1. Donner  $g(0)$  et  $g(M)$ .
2. Justifier que si  $X_0 \notin \{0, M\}$ , alors

$$\tau((X_n)_{n \geq 0}) = 1 + \tau((X_{n+1})_{n \geq 0}).$$

3. En conditionnant par rapport aux valeurs possibles de  $X_1$ , donner une relation de récurrence entre  $g(k)$ ,  $g(k-1)$  et  $g(k+1)$  pour tout  $1 \leq k \leq M-1$ .
4. Pour  $p = 1/2$ , cette relation s'écrit

$$g(k) = \frac{g(k+1) + g(k-1)}{2} + 1$$

. En déduire une expression de  $g$ .

*Indication : on pourra calculer d'abord l'écart  $\delta(k) = g(k+1) - g(k)$  en fonction de  $\delta(0)$  et utiliser des sommes télescopiques.*

#### Exercice 4. Modèle de file d'attente

On considère la matrice de transition sur l'espace  $\mathbb{N}$  donnée par

$$P(0, 1) = 1 \quad ; \quad \forall k \geq 1, \quad P(k, k+1) = p \quad ; \quad \forall k \geq 1, \quad P(k, k-1) = 1 - p$$

$p$  étant un paramètre réel dans  $(0, 1)$ .

1. Soit  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables i.i.d. de loi  $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p$ . On considère la suite aléatoire  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (\xi_k 1_{(X_{k-1} > 0)} + 1_{(X_{k-1} = 0)}),$$

$X_0$  étant indépendant de  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de loi notée  $\pi$ . Montrer que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  sur l'espace  $\mathbb{N}$  telle que  $X_0 \sim \pi$ .

2. On suppose  $p > \frac{1}{2}$ . Comparer  $X_n$  et  $\sum_{k=1}^n \xi_k$ , et montrer que  $\mathbb{P}_\pi[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty] = 1$  quelque soit la loi initiale  $\pi$ .
3. On suppose  $p < \frac{1}{2}$ . Montrer que

$$0 \leq X_n \leq X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k + 2 \sum_{k=1}^n 1_{(X_{k-1} = 0)}$$

En déduire à l'aide de la loi des grands nombres que  $\text{card}(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}) = +\infty$  a probabilité 1 sous  $\mathbb{P}_\pi$ . Que vaut alors  $\mathbb{P}_\pi[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty]$  ?

Pour aller plus loin .. On se donne deux suites de variables aléatoires indépendantes  $(A_k)_{k \geq 1}$  et  $(B_k)_{k \geq 1}$  suivant des lois exponentielles  $\mathcal{E}(\lambda)$  (pour les  $A_k$ ) et  $\mathcal{E}(\mu)$  (pour les  $B_k$ ), avec  $\lambda, \mu > 0$ ; on rappelle que la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  est la loi à densité  $\lambda e^{-\lambda x} 1_{(x>0)} dx$ . On considère une file d'attente où les clients arrivent aux temps  $A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, \dots$ , et où leurs demandes sont traitées comme suit : le  $k$ -ième client voit sa demande traitée en un temps  $B_k$ , après que toutes les demandes des clients  $1, 2, \dots, k-1$  aient été traitées. Notons  $X_0$  le nombre de clients dans la file au temps 0, et  $X_n$  le nombre de clients dans la file après  $n$  étapes, une étape étant :

- soit le départ d'un client  $k$  si sa demande a été traitée ( $X_n = X_{n-1} - 1$ );
- soit l'arrivée d'un nouveau client  $k'$  si cela se produit avant que la demande du client  $k$  en tête de file soit traitée ( $X_n = X_{n-1} + 1$ ).

Montrer que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ , pour un certain paramètre  $p \in (0, 1)$  qu'on exprimera en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Exercice 5. Marche aléatoire sur la droite et transformation  $M - X$ .** On considère la marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}$  : c'est la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrice de transition

$$P(x, y) = \frac{1}{2} 1_{|x-y|=1}.$$

1. On suppose que  $X_0 = 0$ . Donner une représentation de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en termes d'aléas i.i.d.  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  avec  $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$ .
2. On pose  $M_n = \max\{X_k, 0 \leq k \leq n\}$ . Montrer que  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une chaîne de Markov  
*Indication* : rendre tangible le fait que l'évolution de  $M_n$  dépend du moment où le précédent maximum a été atteint.
3. On s'intéresse au vecteur  $(X_n, M_n - X_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Montrer que
 
$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = \begin{cases} (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}) & \text{si } M_n - X_n > 0, \\ (1, 0) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = 1, \\ (-1, +1) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = -1. \end{cases}$$
4. Montrer que  $(X_n, M_n - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov sur l'espace  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .
5. Montrer que  $(M_n - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov sur l'espace  $\mathbb{N}$ , et préciser sa matrice de transition.

**Exercice 6. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques**

Soit  $P$  une matrice stochastique sur un espace d'états  $E$  discret, et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est harmonique sur  $E$  (par rapport à  $P$ ) si elle vérifie :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{y \in E} P(x, y) f(y)$$

On suppose donnée une fonction  $f$  harmonique et bornée sur  $E$ .

Montrer que si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov sur  $E$  de matrice de transition  $P$ , alors la suite  $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

**Exercice 7. [★]**

Marc dit à Sophie : *Nous allons lancer une pièce jusqu'à ce que les mots PPP ou PFP apparaissent. Si c'est PPP, c'est toi qui gagne, si c'est PFP, c'est moi. Ce jeu est honnête, puisque chaque mot a la probabilité 1/8 d'apparaître. Qu'en pensez-vous ?*

1. Modéliser le jeu par une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états, le graphe, la matrice de transition et l'état initial.
2. Calculer la probabilité que Marc gagne.
3. Quelle est la durée moyenne du jeu ?