Manon Costa *manon.costa@math.univ-toulouse.fr*
Laure Coutin *laure.coutin@math.univ-toulouse.fr*

TD 10 & 11 - Martingales et convergences

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées et de carré intégrable. Pour tout $n \geqslant 1$, on note σ_n l'écart-type de X_n. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_1, \ldots, X_n)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad M_n = S_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n)_{n\geqslant 0}$ sont des $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingales.
2. Montrer que, si la série des σ_n^2 converge, alors $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. et dans L^2.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées et réduites. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_1, \ldots, X_n)$,

$$Y_n = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$-martingale.
2. Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. et dans L^2.
3. Généraliser au cas où l'on remplace $1/n$ par a_n.

Exercice 3. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \cdots, U_n)$. Soit, $a \in [0,1]$, on considère le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = a \\ X_{n+1} = U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que presque surement et pour tout $n \geq 0$, $0 \leq X_n \leq 1$.
3. En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque surement et dans L^p pour tout $p \geq 1$.
4. Montrer que la limite X_∞ est constante égale à 1.

Exercice 4. Cours d'une action
Un modèle simpliste pour le cours d'une action est donné par un processus (X_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ X_{n+1} = (1+\mu)X_n + \sigma X_n \epsilon_{n+1} \end{cases}$$

où $(x_0, \mu, \sigma) \in \mathbb{R}^3$, et $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$. Le paramètre μ s'appelle le taux d'actualisation, et σ, la volatilité. On supposera que

$$|\sigma| < 1 + \mu.$$

Enfin, on appelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

1. *Justifier que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaine de Markov à valeurs réelles.*
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $X_n > 0$ (on supposera $x_0 > 0$).

3. Calculer $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n]$. Dire en fonction des valeurs de (μ, σ) si $(X_n)_{n\geq 0}$ est un martingale, une sur-martingale ou une sous-martingale.
4. Dans le cas où $\mu < 0$, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.
On pourra calculer $\mathbb{E}[X_n]$.
5. Calculer $\mathbb{E}[X_n^2]$ et justifier que $X_n \in L^2$. A quelle condition la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle bornée dans L^2 ?

Exercice 5. Urnes de Pólya

A l'instant $n = 1$ une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans l'urne et on la remplace par deux boules de la même couleur que celle tirée. Ainsi, à l'instant n, l'urne contient $n + 1$ boules.

On note pour tout $n \geq 1$, Y_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'instant. et $X_n = Y_n/(n+1)$ la proportion de boules blanches à cet instant. Finalement, on appelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la tribu naturelle associée à la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$.

1. Déterminer la loi de Y_2.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.
3. Montrer que $W_n = \frac{Y_n(Y_n+1)}{(n+1)(n+2)}$ est une martingale.
4. Plus généralement, on note pour tout $k \geq 1$
$$W_n^{(k)} = \frac{Y_n(Y_n + 1) \cdots (Y_n + k - 1)}{(n + 1)(n + 2) \cdots (n + k}.$$
Montrer que $(W_n^{(k)})_{n\geq 1}$ est une martingale.
5. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement. On notera X_∞ sa limite.
6. (**) Montrer que $(W_n^{(k)})_{n\geq 0}$ converge presque surement et dans L^1 vers X_∞^k.
7. En déduire que $\mathbb{E}[X_\infty^k] = \frac{1}{k+1}$.
8. En déduire que X_∞ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pourra utiliser le fait que la fonction caractéristique d'une loi uniforme est $\phi_U(t) = \frac{e^{it}-1}{it} = \mathbb{E}[e^{itU}]$.

Exercice 6. Modèle de Wright Fisher

Le modèle de Wright Fisher a été introduit pour modéliser l'évolution des fréquences alléliques dans des populations naturelles. Dans ce modèle simplifié, on considère une population de taille N fixée, et on suppose que chaque individu porte l'un des deux allèles A ou B. On note X_n le nombre d'individus portant l'allèle A au temps n. On suppose enfin que conditionnellement à $\{X_n = k\}$, X_{n+1} est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $(N, k/N)$. Ceci traduit le fait que chaque individu vivant à la génération $n+1$ choisit son parent uniformément au hasard dans la génération n et a hérite de l'allèle de son parent. On supposera dans la suite que $X_0 = i$.

1. Justifier que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour une filtration que l'on précisera.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite X_∞ et préciser le type de convergence.
3. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ définie par $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_\infty(N - X_\infty))]$.
5. Montrer que l'un des allèles disparaît presque surement.
6. Calculer la probabilité que l'allèle A disparaisse. *Indication : on cherchera à calculer* $\mathbb{P}(X_\infty = 0)$.

Exercice 7. Processus de Galton Watson surcritique.

Un processus de Galton-Watson est un processus X_n modélisant l'évolution de la taille d'une population au temps n. Plus précisément, on s'intéresse ici à modèle en générations dans lequel les individus se reproduisent simultanément et une seule fois, puis ils sont remplacés par leurs descendants. On suppose de plus que tous les

individus vivant au temps n se reproduisent indépendamment et selon la même loi.
On considère une suite de variables aléatoires *i.i.d* $(Z_{n,k})_{n\geq 0,k\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $\mu = \mathbb{E}(Z) > 1$ et on suppose que $Z \in L^2$. Le processus de Galton-Watson est définit par $X_0 = 1$ et

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n,k}.$$

On admettra ici que lorsque $\mu = \mathbb{E}(Z) > 1$, alors la probabilité d'extinction de la population $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0) < 1$. On veut étudier ce qui se passe lorsque la population survit.

1. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ en fonction de n et μ.

2. On pose $M_n = X_n/\mu^n$. Montrer que (M_n) est une martingale.

3. Justifier que M_n converge presque surement vers une variable M_∞.

4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$. En déduire que la convergence de M_n vers M_∞ a lieu aussi dans L^2.

5. Justifier que $\mathbb{P}(M_\infty > 0) > 0$.