
TD 1 - Mise en jambe

Exercice 1. Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles: les instants d'arrivées X et Y sont deux v.a. indépendantes uniformément réparties dans $[14, 15]$. Calculer la loi de la variable durée d'attente du premier arrivé.

Exercice 2. Soient X_i une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, telles que X_i a pour fonction de répartition F_i . On note $m_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Montrer que la fonction de répartition de M_n calculée en x vaut $\prod_{i=1}^n F_i(x)$ et que celle de m_n vaut $1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x))$

Exercice 3. Soient X_i des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. On définit

$$Z = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad \text{et} \quad N = \min\{1 \leq i \leq n : X_i = Z\}?$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists i \neq j : X_i = X_j) = 0$.
2. Déterminer la loi de Z .
3. Etablir que pour tout $1 \leq k \leq n$ et $t > 0$

$$\mathbb{P}(N = k, Z > t) = e^{-nt}/n.$$

4. En déduire que N et Z sont indépendantes et donner la loi de N .

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(X_1 = -1)$. Pour tout $n \geq 0$, soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (par convention, $S_0 = 0$).

— Inégalité de Hoeffding —

1. (chez vous) Vérifier que pour tout $\lambda > 0$, $\ln((e^{-\lambda} + e^{\lambda})/2) \leq -\lambda^2/2$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq x\sqrt{n}) \leq e^{-x^2/2}$.
[Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Markov pour majorer la probabilité $\mathbb{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda x\sqrt{n}})$ avec $\lambda > 0$.]
3. Comparer le résultat précédent avec celui donné par le théorème-limite central.

Exercice 5. Soient $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires i.i.d uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes entre elles. On se donne g une densité de probabilité sur $[0, 1]$ bornée par une constante $c > 0$. On définit pour tout $n \geq 1$ une variable aléatoire

$$Y_n = \mathbf{1}_{cU_n \leq g(V_n)}.$$

1. Quelle est la loi de Y_n ?
2. Soit $K = \inf\{n \geq 1, Y_n = 1\}$ un entier aléatoire. Justifier que la variable $Z = V_K$ admet pour densité g .

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$, une suite de variables aléatoires i.i.d et uniformes sur $[0, 1]$. On note

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

1. Démontrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers 1.
2. Démontrer que $(n(1 - M_n))_{n \geq 0}$ converge en loi et trouver la loi limite.

Exercice 7.[*] Deux joueurs A et B jouent une suite de parties indépendantes. Lors de chacune d'elles, ils ont respectivement les probabilités p pour A et $q = 1 - p$ pour B de gagner. Le vainqueur final est celui des deux joueurs qui obtient le premier deux victoires de plus que son adversaire. Quelle est la probabilité pour que A soit vainqueur ?