УДК 512.7

М. Бернардара, Г. Табуада

Изучение групп Чжоу пересечений квадрик с помощью гомологической проективной двойственности и (якобианов) некоммутативных мотивов

Гипотезы типа гипотезы Бейлинсона–Блоха предсказывают, что группы Чжоу с рациональными коэффициентами малой размерности у пересечения квадрик являются одномерными. Эта гипотеза была доказана А. Отвиновской (A. Otwinowska) в [1]. Используя гомологическую проективную двойственность и недавнюю теорию (якобианов) некоммутативных мотивов, дается другое доказательство этой гипотезы в случае полного пересечения двух квадрик или трех нечетномерных квадрик. Кроме того, доказывается, что в этих случаях единственным нетривиальным алгебраическим якобианом является средний из них. В качестве приложения, опираясь на работы Ч. Виала (C. Vial) [2], [3], описываются рациональные мотивы Чжоу этих полных пересечений и показывается, что для гладких расслоений над базой S малой размерности, слои которых являются такими полными пересечениями, выполняются гипотеза Мюрре (Murre) ($\dim(S) \leqslant 1$), стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца ($\dim(S) \leqslant 2$) и гипотеза Ходжа ($\dim(S) \leqslant 3$).

Библиография: 29 наименований.

Ключевые слова: квадрики, гомологическая проективная двойственность, якобианы, некоммутативные мотивы, некоммутативная алгебраическая геометрия.

DOI: 10.4213/im8409

§ 1. Формулировка результатов

Пусть k – поле и X – гладкая проективная k-подсхема в $\mathbb{P}^n$. Если X является полным пересечением мультистепени $(d_1,\dots,d_r)$, $d_1 \geqslant \dots \geqslant d_r$, то можно рассмотреть следующий численный инвариант:

$$\kappa := \left[\frac{n-\sum_{j=2}^r d_j}{d_1}\right],$$

где $[\,\cdot\,]$ обозначает целую часть рационального числа. Тщательный анализ различных теорий когомологий Вейля подсхемы X привел к следующей гипотезе типа гипотезы Бейлинсона–Блоха, которую явно сформулировал К. Паранджапе (K. Paranjape) в [4, гипотеза 1.8].

Гипотеза 1.1. Для каждого $i<\kappa$ существует изоморфизм $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$.

Работа второго автора частично поддержана фондом NSF CAREER Award.

А. Отвиновска (A. Otwinowska) доказала гипотезу 1.1 для полного пересечения квадрик, т. е. когда $d_1 = \cdots = d_r = 2$ (см. [1, следствие 1]). Если еще предположить, что поле $k \subseteq \mathbb{C}$ алгебраически замкнуто и $\kappa = [\dim(X)/2]$ (в случае $r > 1$, это выполнено тогда и только тогда, когда $r = 2$ или $r = 3$ и n четно), гипотезу 1.1 можно доказать по-другому. Конкретнее, наш первый основной результат – это следующая теорема.

Теорема 1.2. *Гипотеза 1.1 верна в следующих случаях*:

(i) X *– гладкое полное пересечение двух квадрик*;

(ii) X *– гладкое полное пересечение трех нечетномерных квадрик.*

Доказательство Отвиновской основано на геометрическом индуктивном рассуждении. Сначала делается шаг индукции: если гипотеза 1.1 справедлива для полного пересечения мультистепени $(d_1, \dots, d_r)$, то она также выполнена для полного пересечения мультистепени $(d_1, \dots, d_r, d_r)$ (см. [1, теорема 1]). Затем используется известный факт, что гипотеза 1.1 справедлива для квадратичной гиперповерхности. Стоит еще упомянуть работу Х. Эно, М. Левина и Э. Фивега (H. Esnault, M. Levine, E. Viehweg) [5], в которой для очень малых значений параметра i с помощью обобщения техники Ройтмана (Roitman) было получено геометрическое доказательство гипотезы 1.1.

Наше доказательство теоремы 1.2 совершенно иное. "Категорное" по своей природе, оно основывается на новых методах, таких как гомологическая проективная двойственность Кузнецова, а также некоммутативные мотивы и их якобианы. В отличие от доказательств Отвиновской и Эно–Левина–Фивега, наше выдвигает на первый план геометрическую информацию, содержащуюся в производной категории схемы X и ее некоммутативном мотиве.

Предположим теперь, что поле $k \subseteq \mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Напомним конструкцию якобианов $J^i(X)$, $0 \leqslant i \leqslant \dim(X) - 1$, по работе Ф. Гриффитса [6]. В отличие от группы Пикара $J^0(X) = \mathrm{Pic}^0(X)$ и многообразия Альбанезе $J^{\dim(X)-1}(X) = \mathrm{Alb}(X)$, промежуточные якобианы не обязательно будут алгебраическими. Тем не менее они содержат алгебраический тор $J^i_a(X) \subseteq J^i(X)$, определяемый как образ отображения Абеля–Якоби

$$\mathrm{AJ}^i\colon A^{i+1}(X)_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow J^i(X), \qquad 0 \leqslant i \leqslant \dim(X) - 1, \tag{1.1}$$

где обозначение $A^{i+1}(X)_{\mathbb{Z}}$ закреплено за группой алгебраических тривиальных циклов коразмерности $i+1$ (подробности можно найти в [7, § 12]).

Рассмотрим пересечения квадрик, для которых $\kappa = [\dim(X)/2]$, а размерность $\dim(X)$ нечетна, т. е. когда $\dim(X) = 2\kappa + 1$. Известны следующие факты:

(i) X – гладкое полное пересечение двух четномерных квадрик; М. Рид (M. Reid) доказал в [8, теорема 4.14], что якобиан $J^\kappa_a(X)$ изоморфен, как абелево многообразие с главной поляризацией, якобиану $J(C)$ гиперэллиптической кривой C, естественно связанной с X;

(ii) X – гладкое полное пересечение трех нечетномерных квадрик; А. Бовиль доказал [9, теорема 6.3], что якобиан $J_a^\kappa(X)$ изоморфен, как абелево многообразие с главной поляризацией, многообразию Прима $\mathrm{Prym}(\widetilde{C}/C)$, естественно связанному с X.

Пусть X – полное пересечение либо двух квадрик, либо трех нечетномерных квадрик. Используя вложение Веронезе, мы можем применить теорему Лефшеца (см. [7, п. 13.2.3]), чтобы заключить [1], что $H^{p,q}(X)=0$ при $p\neq q$ и $p+q\neq\kappa$. Отсюда следует, что упомянутый выше якобиан $J_a^\kappa(X)$ является единственным нетривиальным. Второй наш основной результат – это альтернативное доказательство этого факта.

Теорема 1.3. (i) *Если X – гладкое полное пересечение двух нечетномерных квадрик, то $J_a^i(X)=0$ для всех i.*

(ii) *Если X – гладкое полное пересечение двух или трех таких квадрик, что $\kappa=[\dim(X)/2]$ и размерность $\dim(X)$ нечетна, то $J_a^i(X)=0$ для всех $i\neq\kappa$.*

§ 2. Приложения

Наше первое приложение, полученное комбинацией теорем 1.2 и 1.3 (напомним, что $k\subseteq\mathbb{C}$ – алгебраически замкнутое поле) с работой [2] о промежуточных алгебраических якобианах, представляет собой следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть X – полное гладкое пересечение двух нечетномерных квадрик. В этом случае мы имеем следующее мотивное разложение:*

$$M^i(X)_{\mathbb{Q}}\simeq\begin{cases}\mathbf{L}^{\otimes\frac{i}{2}}, & \text{если } 0\leqslant i\leqslant 2d,\ i\neq d,\ i \text{ четное},\\ (\mathbf{L}^{\otimes\frac{d}{2}})^{\oplus(d+4)}, & \text{если } i=d,\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}\tag{2.1}$$

где $M^i(X)_{\mathbb{Q}}$ – i-я компонента разложения Кюннета рационального мотива Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$, $d:=\dim(X)=2\kappa$ и $\mathbf{L}$ – рациональный мотив Лефшеца.

Пусть X – полное гладкое пересечение двух или трех таких квадрик, что $\kappa=[\dim(X)/2]$ и размерность $\dim(X)$ нечетна. В этом случае мы имеем следующее мотивное разложение:

$$M^i(X)_{\mathbb{Q}}\simeq\begin{cases}\mathbf{L}^{\otimes\frac{i}{2}}, & \text{если } 0\leqslant i\leqslant 2d,\ i \text{ четно},\\ M^1(J_a^\kappa(X))_{\mathbb{Q}}(\kappa-d), & \text{если } i=d,\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}\tag{2.2}$$

где $d:=\dim(X)=2\kappa+1$.

В обоих случаях рациональный мотив Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$ будет конечным по Кимуре.

---

[1] То же самое следует из теоремы 1.2, если воспользоваться инъективностью отображения циклов $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}\to H^{2\kappa+1-i}(X,\mathbb{Q})$ и результатом Паранджапе [4, предложение 6.4] (см. также [1, теорема 1]).

Теорема 2.1 служит “мотивным уточнением” теорем 1.2 и 1.3.

Наше второе приложение, получающееся комбинированием теоремы 1.2 с работой [3] о расслоениях, представляет собой следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть* $f\colon Y \to B$ *– гладкий доминантный плоский морфизм гладких проективных* k*-схем. Предположим, что слои морфизма* f *– либо полные пересечения двух квадрик, либо полные пересечения трех нечетномерных квадрик, тогда*

(i) *если* $\dim(B) \leqslant 1$, *то рациональный мотив Чжоу* $M(Y)_{\mathbb{Q}}$ *является конечным по Кимуре и* Y *удовлетворяет гипотезе Мюрре*;

(ii) *если* $\dim(B) \leqslant 2$, *то* Y *удовлетворяет стандартной гипотезе Гротендика типа Лефшеца*;

(iii) *если* $\dim(B) \leqslant 3$, *то* Y *удовлетворяет гипотезе Ходжа*.

Замечание 2.3. Случай полного пересечения двух квадрик был первоначально разобран в [3, предложение 7.5].

Напомним (см. [10, пп. 5.2.4]), что стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца утверждает, что инволюция Лефшеца (связанная с когомологиями Вейля) задается алгебраическим соответствием.

На протяжении всей работы мы будем работать с алгебраически замкнутым полем $k \subseteq \mathbb{C}$. Кроме того, мы предполагаем, что все рассматриваемые схемы будут гладкими и проективными.

Для данной k-схемы X через $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Z}}$ мы будем обозначать группу Чжоу i-мерных циклов по модулю рациональной эквивалентности, а через $A_i(X)_{\mathbb{Z}}$ – подгруппу алгебраически тривиальных циклов. Кроме того, мы будем использовать нумерацию групп Чжоу по коразмерности носителя $\mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Z}}$, $A^i(X)_{\mathbb{Z}}$, а также группы Чжоу с рациональными коэффициентами $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}$, $A_i(X)_{\mathbb{Q}}$, $\mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}$, $A^i(X)_{\mathbb{Q}}$. Наконец, производную категорию совершенных комплексов X мы будем обозначать как $\mathrm{perf}(X)$. Заметим, что вложение категорий $\mathrm{perf}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$ является эквивалентностью, поскольку X – гладкая схема.

§ 3. Предварительные сведения

3.1. Dg-категории. Пусть $(\mathcal{C}(k), \otimes, k)$ – симметричная моноидальная категория коцепных комплексов векторных k-пространств. *Dg-категория* $\mathcal{A}$ – это категория, обогащенная над категорией $\mathcal{C}(k)$, а *dg-функтор* $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – это функтор, обогащенный над $\mathcal{C}(k)$ (подробности можно найти в обзоре Б. Келлера [11]). Символом $\mathrm{dgcat}(k)$ обозначим категорию малых dg-категорий и dg-функторов.

Пусть $\mathcal{A}$ – dg-категория. Противоположная dg-категория $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ имеет то же самое множество объектов и $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}(x,y) := \mathcal{A}(y,x)$. *Правый* $\mathcal{A}$*-модуль* – это dg-функтор $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k)$ со значениями в dg-категории комплексов векторных k-пространств $\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k)$. Категорию правых $\mathcal{A}$-модулей будем обозначать символом $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Следуя работе [11, § 3], *производная категория* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *категории* $\mathcal{A}$

определяется как локализация категории $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ относительно класса пообъектных квазиизоморфизмов. Мы обозначаем через $\mathcal{D}_c(\mathcal{A})$ полную подкатегорию компактных объектов.

Тензорное произведение $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ dg-категорий определяется следующим образом: множество объектов совпадает с декартовым произведением множеств объектов и $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})((x,w),(y,z)) := \mathcal{A}(x,y)\otimes\mathcal{B}(w,z)$. Как объясняется в [11, п. 4.3], эта конструкция задает симметричную моноидальную структуру на категории $\mathrm{dgcat}(k)$.

$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-бимодуль – это dg-функктор $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k)$, т. е. правый $(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{B})$-модуль. Стандартным примером служит "диагональный" $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-бимодуль

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k),\qquad (x,y)\mapsto\mathcal{A}(y,x) \tag{3.1}$$

и, в более общем виде, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-бимодуль

$$_F\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k),\qquad (x,z)\mapsto\mathcal{B}(z,F(x)), \tag{3.2}$$

связанный с dg-функтором $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$.

Следуя М. Концевичу [12]–[14], dg-категорию $\mathcal{A}$ называют *гладкой*, если $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-бимодуль (3.1) принадлежит $\mathcal{D}_c(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{A})$, и *собственной*, если для каждой упорядоченной пары объектов (x,y) мы имеем $\sum_i\dim H^i\mathcal{A}(x,y)<\infty$. Стандартными примерами являются dg-категории $\mathrm{perf}^{\mathrm{dg}}(X)$ совершенных комплексов, связанных с гладкой проективной k-схемой. Мы обозначаем через $\mathrm{spdgcat}(k)\subset\mathrm{dgcat}(k)$ полную подкатегорию гладких собственных dg-категорий.

3.2. Мотивы Чжоу. Мы будем пользоваться изложенной в [10, § 4] конструкцией категории $\mathrm{Chow}(k)_{\mathbb{Q}}$ мотивов Чжоу (с рациональными коэффициентами) и контравариантного $\otimes$-функтора

$$M(\,\cdot\,)_{\mathbb{Q}}\colon \mathrm{SmProj}(k)^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathrm{Chow}(k)_{\mathbb{Q}},$$

где $\mathrm{SmProj}(k)$ обозначает категорию гладких проективных k-схем.

3.3. Некоммутативные мотивы Чжоу. Следуя [15, § 4], напомним конструкцию аддитивной жесткой симметричной моноидальной категории некоммутативных мотивов Чжоу $\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}$ (с рациональными коэффициентами) и $\otimes$-функтора

$$U(\,\cdot\,)_{\mathbb{Q}}\colon \mathrm{spdgcat}(k)\longrightarrow\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}. \tag{3.3}$$

По построению, объектами категории $\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}$ служат гладкие собственные dg-категории, а морфизмы определяются равенством

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}}(U(\mathcal{A})_{\mathbb{Q}},U(\mathcal{B})_{\mathbb{Q}}) := K_0(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{B})_{\mathbb{Q}},$$

где $K_0(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{B})$ обозначает группу Гротендика триангулированной категории $\mathcal{D}_c(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{B})$. Композиция индуцирована (производным) тензорным произведением бимодулей. Функтор (3.3) сопоставляет dg-категории $\mathcal{A}$ саму себя, а dg-функктору $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ – класс $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-бимодуля $[{}_F\mathcal{B}]_{\mathbb{Q}}$ (3.2) в группе Гротендика.

Для k-схемы X вместо обозначения $U(\mathrm{perf}^{\mathrm{dg}}(X))_{\mathbb{Q}}$ мы будем использовать $\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}}$.

Предложение 3.1. *Каждое полуортогональное разложение* $\mathrm{perf}(X)=\langle\mathcal{T}_1,\dots,\mathcal{T}_r\rangle$ *в смысле Бондала–Орлова* [16] *порождает разложение в прямую сумму*

$$\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq U(\mathcal{T}_1^{\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}} \oplus \dots \oplus U(\mathcal{T}_r^{\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}},$$

где $\mathcal{T}_i^{\mathrm{dg}}$ *означает dg-оснащение подкатегории* $\mathcal{T}_i$, *индуцированное с* $\mathrm{perf}^{\mathrm{dg}}(X)$.

Доказательство. По построению функтора $U(\,\cdot\,)_{\mathbb{Q}}$, каждое полуортогональное разложение категории $\mathrm{perf}(X) = \langle\mathcal{T},\mathcal{T}^{\perp}\rangle$ длины два задает разложение в прямую сумму $\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq U(\mathcal{T}^{\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}} \oplus U(\mathcal{T}^{\perp,\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}}$ (подробности можно найти в [17, теорема 6.3]). Теперь доказательство следует по индукции, примененной к полуортогональному разложению $\langle\langle\mathcal{T}_i\rangle,\langle\mathcal{T}_{i+1},\dots,\mathcal{T}_r\rangle\rangle$, $1\leqslant i\leqslant r-1$. Предложение доказано.

3.4. Некоммутативные численные мотивы. $\mathcal{N}$*-идеал* $\mathbb{Q}$-линейной аддитивной жесткой симметричной моноидальной категории $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1})$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{N}(a,b) := \bigl\{f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b) \mid \mathrm{tr}(g\circ f)=0 \quad \forall\, g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,a)\bigr\},$$

где $\mathrm{tr}(g\circ f)$ означает категорный след [2] эндоморфизма $g\circ f$. Категория *некоммутативных численных мотивов* $\mathrm{NNum}(k)_{\mathbb{Q}}$ определяется как идемпотентное пополнение факторкатегории $\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}$ по $\otimes$-идеалу $\mathcal{N}$. Как доказано в [18, теорема 1.10], в случае нулевой характеристики поля k категория $\mathrm{NNum}(k)_{\mathbb{Q}}$ будет полупростой абелевой категорией.

§ 4. Якобианы некоммутативных мотивов Чжоу

Как доказано в [10, предложение 4.2.5.1], функтор когомологий де Рама пропускается через категорию мотивов Чжоу. В частности, каждый морфизм мотивов Чжоу индуцирует морфизм в когомологиях де Рама. Для данной неприводимой k-схемы X размерности d мы можем рассмотреть векторные $\mathbb{Q}$-пространства $\mathrm{NH}^{2i+1}_{dR}(X)$, $0\leqslant i\leqslant d-1$, определяемые как

$$\sum_{C,\gamma} \text{Образ}\bigl(H^1_{dR}(C)\xrightarrow{H^1_{dR}(\gamma)} H^{2i+1}_{dR}(X)\bigr), \tag{4.1}$$

где C – гладкая проективная кривая и γ – морфизм в категории $\mathrm{Chow}(k)_{\mathbb{Q}}$ из $M(C)_{\mathbb{Q}}$ в $M(X)_{\mathbb{Q}}(i)$. Говоря интуитивно, векторные $\mathbb{Q}$-пространства $\mathrm{NH}^{2i+1}_{dR}(X)$

[2]Напомним, что категорный след эндоморфизма $g\circ f$ определяется как $\mathbf{1}\xrightarrow{\mathrm{co}} a^{\vee}\otimes a\simeq a\otimes a^{\vee}\xrightarrow{(g\circ f)\otimes \mathrm{id}} a\otimes a^{\vee}\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathbf{1}$, где $a^{\vee}$ – двойственный a объект, а ev-морфизм (соответственно co-морфизм) вычисления (соответственно ковычисления).

являются подпространствами нечетномерных когомологий де Рама, порожденными кривыми. Ограничивая классическое билинейное спаривание когомологий де Рама (см. [10, п. 3.3]) на эти подпространства, получаем

$$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\colon \mathrm{NH}^{2d-2i-1}_{dR}(X)\times \mathrm{NH}^{2i+1}_{dR}(X)\longrightarrow k,\qquad 0\leqslant i\leqslant d-1. \tag{4.2}$$

Напомним теперь конструкцию функтора якобиана [19, теорема 1.3]

$$\mathbf{J}(\,\cdot\,)\colon \mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}\longrightarrow \mathrm{NNum}(k)_{\mathbb{Q}}\longrightarrow \mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$$

со значениями в категории абелевых многообразий с точностью до изогении. По данному некоммутативному мотиву Чжоу N абелево многообразие $\mathbf{J}(N)$ строится следующим образом:

(i) категорию абелевых многообразий с точностью до изогении $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$ можно отождествить с абелевой полупростой полной подкатегорией категории $\mathrm{NNum}(k)_{\mathbb{Q}}$;

(ii) из полупростоты категории $\mathrm{NNum}(k)_{\mathbb{Q}}$ следует, что некоммутативный численный мотив N допускает единственное разложение в прямую сумму $S_1\oplus\cdots\oplus S_n$ простых объектов;

(iii) $\mathbf{J}(N)$ определяется как наименьшая часть некоммутативного численного мотива $N\simeq S_1\oplus\cdots\oplus S_n$, которая содержит все простые объекты, лежащие в абелевой полупростой полной подкатегории $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Как доказано в [19, теорема 1.7], если спаривание (4.2) невырождено при всех i, имеет место изоморфизм $\mathbf{J}(\mathrm{perf}^{\mathrm{dg}}(X))\simeq\prod_{i=0}^{d-1}J^i_a(X)$ в $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$. Как объясняется в [19], спаривание (4.2) всегда невырождено при $i=0$ и $i=d-1$. Более того, если стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца справедлива для X, то спаривание (4.2) невырождено при всех i (см. [2, лемма 2.1]).

Категорные данные. Пусть X и Y – две гладкие проективные неприводимые k-схемы размерностей d_X и d_Y соответственно. Допустим, они связаны следующими категорными данными:

существует полуортогональное разложение $\mathrm{perf}(X)=\langle\mathcal{T}_X,\mathcal{T}_X^{\perp}\rangle$, $\mathrm{perf}(Y)=\langle\mathcal{T}_Y,\mathcal{T}_Y^{\perp}\rangle$ и эквивалентность триангулированных категорий $\phi\colon\mathcal{T}_X\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}_Y$.

Символом Φ обозначим композицию $\mathrm{perf}(X)\to\mathcal{T}_X\overset{\phi}{\simeq}\mathcal{T}_Y\hookrightarrow\mathrm{perf}(Y)$.

Теорема 4.1 [20, теорема 2.2]. *Предположим, что билинейные спаривания* (4.2) *(связанные с X и Y) невырождены, и композиция Φ имеет тип Фурье–Мукаи.*

(i) *В этих предположениях получаем корректно определенный морфизм* $\tau\colon\prod_{i=0}^{d_X-1}J^i_a(X)\to\prod_{i=0}^{d_Y-1}J^i_a(Y)$ *в* $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$.

(ii) *Предположим, кроме того, что $\mathbf{J}(U(\mathcal{T}_X^{\perp,\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}})=0$, тогда морфизм τ – расщепляющее вложение*[3].

(iii) *Если же $\mathbf{J}(U(\mathcal{T}_Y^{\perp,\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}})=0$, то морфизм τ становится изоморфизмом.*

[3]Имеется в виду, что образ вложения отщепляется прямым сомножителем. *Прим. перев.*

Замечание 4.2. Теорема 4.1 была доказана в [20] для случая поля $k = \mathbb{C}$. То же самое доказательство с необходимыми изменениями работает в случае любого алгебраически замкнутого поля $k \subseteq \mathbb{C}$.

Как объясняется в [19, предложение 1.10], условие (ii) (или условие (iii)) выполнено, например, когда $\mathcal{T}_X^{\perp}$ обладает полным исключительным набором.

§ 5. Расслоения на квадрики и гомологическая проективная двойственность

5.1. Расслоения на квадрики. Пусть $q\colon Q \to S$ – плоское расслоение на квадрики относительной размерности $n-1$, $\mathcal{C}_0$ – пучок четных частей соответствующих алгебр Клиффорда, а $\operatorname{perf}(S, \mathcal{C}_0)$ – производная категория совершенных комплексов над $\mathcal{C}_0$. Как доказал А. Кузнецов [21, теорема 4.2], имеет место следующее полуортогональное разложение:

$$\operatorname{perf}(Q) = \big\langle \operatorname{perf}(S, \mathcal{C}_0), \operatorname{perf}(S)_1, \dots, \operatorname{perf}(S)_{n-1} \big\rangle, \tag{5.1}$$

где $\operatorname{perf}(S)_i := q^*\operatorname{perf}(S) \otimes \mathcal{O}_{Q/S}(i)$. Заметим, что $\operatorname{perf}(S)_i \simeq \operatorname{perf}(S)$ при всех i.

В том случае, когда дискриминантный дивизор Δ у Q гладкий, особые слои имеют простые вырождения, и категория $\operatorname{perf}(S, \mathcal{C}_0)$ допускает более геометрическое описание. Конкретнее, если n нечетно (соответственно, четно), имеет место двулистное накрытие $\widetilde{S} \to S$, разветвленное вдоль Δ (соответственно, корневой стек $\widehat{S}$ с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-действием вдоль Δ), $\mathcal{C}_0$ поднимается до алгебры Адзумая с классом α в $\operatorname{Br}(\widetilde{S})$ (соответственно, в $\operatorname{Br}(\widehat{S})$), и $\operatorname{perf}(S, \mathcal{C}_0) \simeq \operatorname{perf}(\widetilde{S}, \alpha)$ (соответственно, $\operatorname{perf}(S, \mathcal{C}_0) \simeq \operatorname{perf}(\widehat{S}, \alpha)$) (подробности можно найти в [21, § 3]).

5.2. Пересечение квадрик. Пусть X – гладкое полное пересечение r квадратичных гиперповерхностей $Q_1, \dots, Q_r$ (задаваемых уравнениями $q_1, \dots, q_r$ соответственно) в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Тотальное пространство семейства таких r квадрик – это многообразие

$$Q = \biggl\{ (\lambda, x) \Bigm| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i(x) = 0 \biggr\} \subset \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^n,$$

где $\lambda = (\lambda_1 : \ldots : \lambda_r)$ – точка в пространстве $\mathbb{P}^{r-1}$. Проекция на первый сомножитель представляет собой плоское расслоение на квадрики $q\colon Q \to \mathbb{P}^{r-1}$ относительной размерности $n-1$ (подробности можно найти в [21, § 5]). Как и раньше, мы можем рассмотреть пучок $\mathcal{C}_0$ четных частей соответствующих алгебр Клиффорда и производную категорию $\operatorname{perf}(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{C}_0)$ совершенных комплексов $\mathcal{C}_0$-модулей.

Гомологическая проективная двойственность связывает структуру категории $\operatorname{perf}(X)$ со структурой категории $\operatorname{perf}(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{C}_0)$. Конкретнее, когда $2r < n+1$, имеет место строго полный функтор $\operatorname{perf}(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{C}_0) \hookrightarrow \operatorname{perf}(X)$ и следующее полуортогональное разложение (см. [21, § 5]):

$$\operatorname{perf}(X) = \big\langle \operatorname{perf}(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{C}_0), \mathcal{O}_X(1), \dots, \mathcal{O}_X(n-2r+1) \big\rangle. \tag{5.2}$$

Полуортогональное разложение (5.2) индуцируется функтором Фурье–Мукаи $\mathrm{perf}(Q) \to \mathrm{perf}(X)$. Отсюда следует, что dg-категория $\mathrm{perf}^{\mathrm{dg}}(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{C}_0)$ принадлежит $\mathsf{spdgcat}(k)$. Приведем некоторые примеры (малой степени).

Пример 5.1 (две нечетномерные квадрики). Пусть $r = 2$ и n четно, так что $q\colon Q \to \mathbb{P}^1$ имеет нечетную относительную размерность $n-1$. В этом случае, так как X гладко по предположению, Q имеет лишь простые вырождения. Ввиду результатов [21, следствие 5.7], категория $\mathrm{perf}(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}_0)$ эквивалентна категории $\mathrm{perf}(\widehat{\mathbb{P}^1})$ корневого стека $\widehat{\mathbb{P}^1}$ с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-стековой структурой на критических точках $Q \to \mathbb{P}^1$. Действительно, в этом случае $\mathcal{C}_0$ поднимается до Морита-тривиальной алгебры Адзумая.

Пример 5.2 (две четномерные квадрики). Пусть $r = 2$ и n нечетно, так что $q\colon Q \to \mathbb{P}^1$ имеет четную относительную размерность $n - 1$. В этом случае, так как X гладко по предположению, Q имеет лишь простые вырождения. Обозначим через C гиперэллиптическую кривую, естественно связанную с X (см. [8, § 4]). Как и в примере 5.1, категория $\mathrm{perf}(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}_0)$ эквивалентна категории $\mathrm{perf}(C)$ (см. [16, теорема 2.9], [21, следствие 5.7]).

Пример 5.3 (три нечетномерные квадрики). Пусть $r = 3$ и n четно, так что $q\colon Q \to \mathbb{P}^2$ имеет нечетную относительную размерность $n - 1$. Рассмотрим дискриминантный дивизор расслоения q, который представляет собой кривую с не более чем нодальными особенностями (см. [9, предложение 1.2]). Нормализацию этого дивизора будем обозначать через C. Как объясняется в [9, предложение 1.5], C оснащена этальным двулистным накрытием $\widetilde{C} \to C$. Предположим гладкость дискриминантного дивизора. Благодаря результатам [21, предложение 3.15, теорема 5.5], можно заключить, что категория $\mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0)$ эквивалентна категории $\mathrm{perf}(\widehat{\mathbb{P}^2}, \mathcal{B})$, где $\widehat{\mathbb{P}^2}$ – корневой стек с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-стековой структурой, ассоциированной с двулистным накрытием и $\mathcal{B}$ – алгебра Адзумая на $\widehat{\mathbb{P}^2}$ (подробности см. в [21]).

§ 6. Доказательство теоремы 1.2, случай (i)

Пусть X – полное пересечение двух квадратичных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ с $n \geqslant 3$. Тотальное пространство семейства этих двух квадрик приводит к плоскому расслоению на квадрики $q\colon Q \to \mathbb{P}^1$ относительной размерности $n-1$. Как объясняется в § 5, мы получаем следующее полуортогональное разложение:

$$\mathrm{perf}(X) = \big\langle \mathrm{perf}(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}_0), \mathcal{O}_X(1), \dots, \mathcal{O}_X(n-3) \big\rangle. \tag{6.1}$$

6.1. Две нечетномерных квадрики. Пусть $n = 2m$ для некоторого целого числа $m \geqslant 2$. Так как мы рассматриваем пересечение двух нечетномерных квадрик, имеем $\dim(X) = 2m - 2$ и $\kappa = m - 1$. Значит, для доказательства теоремы 1.2, нам нужно показать, что

$$\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q} \quad \text{при} \quad i < m - 1. \tag{6.2}$$

Как упоминалось в примере 5.1, имеем эквивалентность $\mathrm{perf}(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}_0) \simeq \mathrm{perf}(\widehat{\mathbb{P}^1})$, где $\widehat{\mathbb{P}^1}$ – корневой стек, ассоциированный с расслоением на квадрики $q\colon Q \to \mathbb{P}^1$. Более того, как доказал А. Полищук [22, теорема 1.2], $\mathrm{perf}(\widehat{\mathbb{P}^1})$ допускает полный исключительный набор длины $p+2$, где p обозначает число дискриминантных точек. Благодаря [8, предложение 2.1], мы знаем, что $p = n+1 = 2m+1$. Следовательно, опираясь на предложение 3.1 и указанное выше полуортогональное разложение (6.1), получаем

$$\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq U(\mathrm{perf}(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}_0)^{\mathrm{dg}})_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{\oplus 2m-3} \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{\oplus 2m+3} \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{\oplus 2m-3} \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{\oplus 4m}, \tag{6.3}$$

где $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} := U(\underline{k})$ обозначает $\otimes$-единицу в категории $\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Предложение 6.1. *Мотив Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$ имеет $\mathbb{Q}$-лефшецевый тип и $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ – конечное $4m$-мерное векторное $\mathbb{Q}$-пространство*[4].

Доказательство. Говорят, что некоммутативный мотив Чжоу имеет $\mathbb{Q}$-*единичный тип*, если в категории $\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Q}}$ он изоморфен $\bigoplus_{i=1}^r \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ для некоторого $r > 0$. Благодаря изоморфизму (6.3), можно утверждать, что $\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}}$ имеет тип $\mathbb{Q}$-единицы с $r = 4m$. Значит, следуя [19, теоремы 1.3, 1.7], получаем, что мотив Чжоу с рациональными коэффициентами $M(X)_{\mathbb{Q}}$ – $\mathbb{Q}$-лефшецевого типа. Кроме того, существует набор целых чисел $l_1, \dots, l_{4m} \in \{0, \dots, 2m-2\}$, при которых возникает изоморфизм

$$M(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbf{L}^{\otimes l_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{L}^{\otimes l_{4m}}. \tag{6.4}$$

Учитывая (6.4), мы автоматически заключаем, что $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ является конечным $4m$-мерным векторным $\mathbb{Q}$-пространством. Предложение доказано.

Замечание 6.2 (альтернативное доказательство). Предложение 6.1 можно доказать по-другому следующим образом. Мы благодарны анонимному рецензенту, который любезно объяснил нам это. Прежде всего, если $k \subset K$ – расширение полей и Y – k-схема, простое вычисление показывает, что при замене базы исключительный объект в $\mathrm{perf}(Y)$ становится исключительным объектом и в $\mathrm{perf}(Y_K)$. Следовательно, если через Ω мы обозначим универсальную область, содержащую k, $K_0(X_\Omega)_{\mathbb{Q}}$ будет конечномерным векторным $\mathbb{Q}$-пространством размерности $4m$. Благодаря теореме Гротендика–Римана–Роха, отсюда следует, что $\mathrm{CH}^*(X_\Omega)_{\mathbb{Q}}$ конечномерно (размерности $4m$). Пользуясь работами [25] и [26], мы заключаем, что мотив Чжоу X лефшецевого типа.

По предложению 6.1 получаем, что $M(X)_{\mathbb{Q}}$ – $\mathbb{Q}$-лефшецевого типа. Следовательно, поскольку единица из $M(X)_{\mathbb{Q}}$ раскладывается в сумму попарно ортогональных идемпотентов, так что соответствующие прямые слагаемые – мотивы Лефшеца, отображение класса цикла с рациональными коэффициентами является изоморфизмом

$$\mathrm{cl}\colon \mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}). \tag{6.5}$$

[4] По построению функтора $U(\,\cdot\,)$ упомянутый выше изоморфизм (6.3) уже имеет место в категории $\mathrm{NChow}(k)_{\mathbb{Z}}$ некоммутативных мотивов Чжоу с целыми коэффициентами. Следовательно, используя [23, теорема 1.4] вместо [24, теоремы 1.3, 1.7], мы заключаем, что предложение 6.1 останется верным, если $\mathbb{Q}$ заменить на $\mathbb{Z}[(4m-4)!]$.

Теперь напомним по [8, § 0.7, следствие 3.15], что

$$H^{2i}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{если } i \neq m-1, \\ \mathbb{Q}^{\oplus(2m+2)}, & \text{если } i = m-1. \end{cases} \tag{6.6}$$

Комбинируя формулы (6.5), (6.6), мы получаем следующие изоморфизмы:

$$\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^{2m-2-i}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{если } i \neq m-1, \\ \mathbb{Q}^{\oplus(2m+2)}, & \text{если } i = m-1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Отсюда явно следует формула (6.2) и, значит, теорема 1.2 в случае двух нечетномерных квадрик доказана.

6.2. Две четномерные квадрики. Пусть $n = 2m-1$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Поскольку мы рассматриваем пересечение двух четномерных квадрик, имеем $\dim(X) = 2m-3$ и $\kappa = m-2$. Следовательно, для доказательства теоремы 1.2 нам нужно показать, что

$$\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q} \quad \text{при} \quad i < m-2. \tag{6.8}$$

Напомним (пример 5.2), что гиперэллиптическая кривая, естественно связанная с X, – это дискриминантное двулистное накрытие $C \to \mathbb{P}^1$, и имеет место эквивалентность $\mathrm{perf}(\mathbb{P}^1, \mathcal{C}_0) \simeq \mathrm{perf}(C)$. Полуортогональное разложение (6.1) сводится к

$$\mathrm{perf}(X) = \big\langle \mathrm{perf}(C), \mathcal{O}_X(1), \ldots, \mathcal{O}_X(2m-4) \big\rangle. \tag{6.9}$$

Из соотношения (6.9) мы автоматически заключаем, что $K_0(X)_{\mathbb{Q}} \simeq K_0(C)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{2m-4}$. Используя изоморфизмы $K_0(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ и $K_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^*(C)_{\mathbb{Q}}$, получаем

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^*(C)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus 2m-4}. \tag{6.10}$$

Теперь, опираясь на [7, пример 21.3.1], напомним, что кольцо Чжоу с рациональными коэффициентами каждой кривой C допускает разложение

$$\mathrm{CH}^*(C)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q} \oplus A_0(C)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}.$$

Комбинируя это разложение с разложением (6.10), получаем

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \simeq A_0(C)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus 2m-2}. \tag{6.11}$$

Предложение 6.3. *Вложение $A_0(C)_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ индуцирует изоморфизм $A_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}$.*

Доказательство. Ввиду полуортогонального разложения (6.9), неприводимые k-схемы X и C связаны категорными данными. Проверим теперь все условия теоремы 4.1 с $\mathcal{T}_X = \mathrm{perf}(C)$ и $\mathcal{T}_C = \mathrm{perf}(C)$. Билинейные спаривания (4.2), связанные с C и X, невырождены, так как каждая кривая и каждое полное пересечение гладких гиперповерхностей в проективном пространстве удовлетворяют стандартной гипотезе Гротендика типа Лефшеца (см. [10, п. 5.2.4.5] и [27, § 3]). Тот факт, что функтор вложения $\mathrm{perf}(C) \hookrightarrow \mathrm{perf}(X)$ имеет тип Фурье–Мукаи, был доказан в [16, теорема 2.7]. Оставшиеся условия теоремы 4.1 проверяются явным образом. В качестве следствия мы получаем изоморфизм в $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$

$$\tau\colon J(C) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{2m-4} J_a^i(X) = J_a^{m-2}(X) \prod_{i\neq m-2} J_a^i(X). \tag{6.12}$$

Отсюда следует, что $J_a^{\kappa}(X) = J_a^{m-2}(X) \subseteq \tau(J(C))$. Как доказано в [8, теорема 4.14], мы имеем $J_a^{m-2}(X) \simeq J(C)$ (как абелевы многообразия с главной поляризацией). Как следствие, получаем расщепление $\tau(J(C)) \simeq J_a^{m-2}(X) \oplus A$, где A изогенно нулю. Так как отсюда вытекает, что A – это нуль, заключаем, что $\tau(J(C)) \simeq J_a^{m-2}(X)$.

Вновь напомним из [8, теорема 4.14], что отображения Абеля–Якоби

$$\mathrm{AJ}^1\colon A^1(C)_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow J^0(C) = J(C), \qquad \mathrm{AJ}^{m-1}\colon A^{m-1}(X)_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow J^{m-2}(X)$$

индуцируют изоморфизмы

$$A_0(C)_{\mathbb{Q}} = A^1(C)_{\mathbb{Q}} \simeq J(C)_{\mathbb{Q}}, \qquad A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} = A^{m-1}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq J_a^{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}.$$

Пользуясь ими и τ, мы получаем искомый изоморфизм $A_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}$. Предложение доказано.

Из предложения 6.3 получается следующий изоморфизм:

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}/A_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{i\neq m-2} \mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \oplus \bigl(\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}\bigr). \tag{6.13}$$

С другой стороны, (6.11) порождает изоморфизм

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}/A_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^{\oplus(2m-2)}. \tag{6.14}$$

Как в стандартном доказательстве теоремы Лефшеца, мы можем воспользоваться стандартной техникой и рассмотреть пересечение общего $(i+2)$-мерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^{2m-1}$ с X, чтобы показать, что $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0$, и что $\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0$. Наконец, простым рассуждением с подсчетом размерностей (получающимся комбинированием изоморфизмов (6.13), (6.14) с тем фактом, что $\dim(X) + 1 = 2m - 2$) выводим, что $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$, когда $i \neq m-2$, и что $\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$. Отсюда получаются изоморфизмы (6.8) и, тем самым, теорема 1.2 в случае (i) доказана.

Замечание 6.4. Рассуждение, использованное в замечании 6.2, можно применить к более общей ситуации. Мы благодарим анонимного рецензента за эти объяснения. Предположим, что Y – гладкая проективная k-схема, для которой существует полуортогональное разложение

$$\mathrm{perf}(Y) = \bigl\langle \mathrm{perf}(C_1), \dots, \mathrm{perf}(C_n), E_1, \dots, E_m \bigr\rangle,$$

для некоторых целых $n, m \geqslant 0$, некоторых гладких проективных кривых C_i и некоторых исключительных объектов E_i. Все задействованные функторы имеют тип Фурье–Мукаи. Опять же, существуют функторы Фурье–Мукаи, дающие аналогичное разложение над любой универсальной областью Ω, содержащей k. Пользуясь разложением, индуцированным на $K_0(Y_\Omega)_\mathbb{Q}$, и теоремой Гротендика–Римана–Роха, заключаем, что группы Чжоу $\mathrm{CH}^*(Y_\Omega)_\mathbb{Q}$ порождаются (через действие соответствий) группами Чжоу кривых C_i и группами Чжоу точек. Иначе говоря, они представимы. Тогда из [26, теорема 3.4] следует, что мотив Чжоу X – прямая сумма (подкруток) мотивов лефшецевого типа и прямых слагаемых мотивов кривых.

Заметим, что если известно описание алгебраических якобианов схемы Y, то можно сравнить их с описанием групп Чжоу, полученным с помощью полуортогонального разложения.

§ 7. Доказательство теоремы 1.2, случай (ii)

Пусть $n = 2m$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Поскольку мы рассматриваем пересечение трех нечетномерных квадрик, имеем $\dim(X) = 2m-3$ и $\kappa = m-2$. Значит, для доказательства теоремы 1.2 нам нужно показать, что

$$\mathrm{CH}_i(X)_\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \quad \text{при} \quad i < m-2. \tag{7.1}$$

Тотальное пространство семейства квадрик порождает расслоение на квадрики $q\colon Q \to \mathbb{P}^2$ относительной размерности $n-1$. Как объяснено в § 5, имеет место полуортогональное разложение

$$\mathrm{perf}(X) = \bigl\langle \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0), \mathcal{O}_X(1), \dots, \mathcal{O}_X(2m-5) \bigr\rangle. \tag{7.2}$$

Из разложения (7.2) автоматически заключаем, что

$$K_0(X)_\mathbb{Q} \simeq K_0(\mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0))_\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus 2m-5}. \tag{7.3}$$

Напомним (см. пример 5.3), что $Q \to \mathbb{P}^2$ обладает дискриминантным дивизором, чья нормализация C имеет этальное двулистное накрытие $\widetilde{C} \to C$, через ι мы будем обозначать инволюцию на $\widetilde{C}$. Ввиду [28, следствие 4.3], имеет место следующий изоморфизм

$$\mathrm{CH}^*(Q)_\mathbb{Q} \simeq \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^2)_\mathbb{Q}^{\oplus 2m} \oplus \mathrm{CH}^1(\widetilde{C})_\mathbb{Q}^-, \tag{7.4}$$

где $\mathrm{CH}^1(\widetilde{C})_\mathbb{Q}^-$ обозначает ι-антиинвариантную часть группы $\mathrm{CH}^1(\widetilde{C})_\mathbb{Q}$. Как объяснено в [9, § 3], этальное двулистное накрытие $\widetilde{C} \to C$ задает каноническое расщепление $J(\widetilde{C}) = \mathrm{CH}^1(\widetilde{C})$ на ι-инвариантную и ι-антиинвариантную части, причем последняя отождествляется с многообразием Прима $\mathrm{Prym}(\widetilde{C}/C)$. В частности, имеет место изоморфизм $\mathrm{CH}^1(\widetilde{C})_\mathbb{Q}^- \simeq A_m(Q)_\mathbb{Q}$. Следовательно, так как $A_*(\mathbb{P}^2)_\mathbb{Q} = 0$, мы заключаем, что $A_*(Q)_\mathbb{Q} = A_m(Q)_\mathbb{Q} \simeq \mathrm{CH}^1(\widetilde{C})_\mathbb{Q}^-$.

Заметим теперь, что общее полуортогональное разложение (5.1) сводится к

$$\mathrm{perf}(Q) = \bigl\langle \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0), \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2)_1, \dots, \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2)_{2m-1} \bigr\rangle. \tag{7.5}$$

Более того, ввиду работы А. А. Бейлинсона [29], $\mathrm{perf}(\mathbb{P}^2)$ порождается тремя исключительными объектами.

Предложение 7.1. *Функтор Фурье–Мукаи*

$$\mathrm{perf}(Q) \to \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0) \hookrightarrow \mathrm{perf}(X)$$

индуцирует изоморфизм $A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}$.

Доказательство. Благодаря полуортогональным разложениям (7.2) и (7.5), замечаем, что неприводимые k-схемы X и Q связаны категорными данными. Проверим теперь все условия теоремы 4.1 с $\mathcal{T}_X = \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0)$ и $\mathcal{T}_Q = \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0)$. Билинейные спаривания (4.2), связанные с Q и X, невырождены, так как стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца выполнена для каждого полного пересечения гладких гиперповерхностей в проективном пространстве (см. [27, § 3]) и для расслоений на квадрики над проективными поверхностями (см. [3, теорема 7.4]). Функтор $\mathrm{perf}(Q) \to \mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0) \hookrightarrow \mathrm{perf}(X)$ имеет тип Фурье–Мукаи, поскольку получается через гомологическую проективную двойственность (см. [21, теоремы 5.3, 5.4]. Оставшиеся условия теоремы 4.1, (iii) очевидно выполнены. Как следствие, получаем корректно определенный изоморфизм в $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$

$$\tau\colon \prod_{i=0}^{2m} J_a^i(Q) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{2m-4} J_a^i(X). \tag{7.6}$$

Ввиду результатов [9, § 3], имеем $J_a^i(Q) = 0$, когда $i \neq m$. Следовательно, изоморфизм (7.6) сводится к

$$\tau\colon J_a^m(Q) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{2m-4} J_a^i(X). \tag{7.7}$$

А. Бовиль доказал (см. [9, теоремы 2.1, 6.3]), что $J_a^{\kappa}(X) = J_a^{m-2}(X)$ изоморфно, как абелево многообразие с главной поляризацией, многообразию Прима $\mathrm{Prym}(\widetilde{C}/C) \simeq J_a^m(Q)$. В связи с этим мы заключаем, что $\tau(J_a^m(Q)) = J_a^{m-2}(X)$ и $J_a^i(X)$ изогенно нулю, когда $i \neq m-2$. Теперь напомним еще раз [9, предложение 3.3, теорема 6.3], что отображения Абеля–Якоби

$$\mathrm{AJ}^m\colon A^{m+1}(Q)_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow J^m(Q), \qquad \mathrm{AJ}^{m-2}\colon A^{m-1}(X)_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow J^{m-2}(X)$$

индуцируют изоморфизмы $A_m(Q)_{\mathbb{Q}} = A^{m+1}(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq J^{m+1}(Q')_{\mathbb{Q}}$ и $A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} = A^{m-1}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq J^{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}$. Пользуясь ими и изоморфизмом τ, получаем искомый изоморфизм $A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}$. Предложение доказано.

Лемма 7.2. *Существует изоморфизм векторных* $\mathbb{Q}$*-пространств*

$$K_0(\mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0))_{\mathbb{Q}} \simeq A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus 3}. \tag{7.8}$$

Доказательство. Опираясь на полуортогональное разложение (7.5), мы получаем изоморфизм

$$K_0(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq K_0(\mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0))_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus 6m-3}. \tag{7.9}$$

Из предложения 7.1 следует, что $A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \subset K_0(\mathrm{perf}(\mathbb{P}^2, \mathcal{C}_0))_{\mathbb{Q}}$ ввиду канонического изоморфизма $K_0(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^*(Q)_{\mathbb{Q}}$. Значит, учитывая изоморфизм $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^2)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^3$, мы заключаем из (7.4), что

$$\mathrm{CH}^*(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{6m}. \tag{7.10}$$

Искомый изоморфизм (7.8) теперь получается из сравнения (7.9) с (7.10) при помощи канонического изоморфизма $K_0(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^*(Q)_{\mathbb{Q}}$. Лемма доказана.

Комбинируя канонический изоморфизм $K_0(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ с изоморфизмами (7.3) и (7.8), заключаем, что

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \simeq A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus 2m-2}. \tag{7.11}$$

Из предложения 7.1 получается следующий изоморфизм

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}/A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{i \neq m-2} \mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \oplus \bigl(\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}\bigr). \tag{7.12}$$

С другой стороны, изоморфизм (7.11) индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}/A_m(Q)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^{\oplus 2m-2}. \tag{7.13}$$

Как и в стандартном доказательстве теоремы Лефшеца, мы можем воспользоваться стандартной техникой и, чтобы показать, что $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0$ и $\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0$, рассмотреть пересечение общего $(i+3)$-мерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^{2m-1}$ с X. Наконец, простое рассуждение с подсчетом размерности (получающееся комбинированием (7.12), (7.13) с тем фактом, что $\dim(X) + 1 = 2m - 2$) дает $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ при $i \neq m-2$ и $\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$. Отсюда вытекает (7.1), что и завершает доказательство теоремы 1.2 в случае (ii).

§ 8. Доказательство теоремы 1.3

8.1. Две нечетномерные квадрики. Пусть $n = 2m$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Поскольку мы рассматриваем пересечение двух нечетномерных квадрик, имеем $\dim(X) = 2m - 2$. Напомним из доказательства предложения 7.1, что X удовлетворяет стандартной гипотезе Гротендика типа Лефшеца, и из (6.3), что у нас есть мотивное разложение $\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{\oplus 4m}$. Применяя к нему (аддитивный) функтор якобиана $\mathbf{J}(\cdot)$, мы получаем следующие изоморфизмы в категории $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$:

$$\prod_{i=0}^{2m-3} J_a^i(X) \simeq \mathbf{J}(\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{4m} \mathbf{J}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{4m} \mathbf{J}\bigl(\mathrm{NC}(\mathrm{Spec}(k))_{\mathbb{Q}}\bigr) \simeq 0.$$

Отсюда очевидно следует равенство $J_a^i(X) = 0$ для каждого i.

8.2. Две четномерные квадрики. Пусть $n = 2m-1$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Поскольку мы рассматриваем пересечение двух четномерных квадрик, мы имеем $\dim(X) = 2m-3$ и $\kappa = m-2$. Напомним из (6.9) конструкцию полуортогонального разложения

$$\operatorname{perf}(X) = \big\langle \operatorname{perf}(C), \mathcal{O}_X(1), \dots, \mathcal{O}_X(2m-4)\big\rangle, \tag{8.1}$$

а из доказательства предложения 7.1, что C и X удовлетворяют стандартной гипотезе Гротендика типа Лефшеца. Ввиду предложения 3.1 и разложения (8.1) возникает мотивное разложение $\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{NC}(C)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{\oplus 2m-4}$. Применяя к нему (аддитивный) функтор якобиана $\mathbf{J}(\cdot)$, мы получаем следующие изоморфизмы в категории $\mathrm{Ab}(k)_{\mathbb{Q}}$:

$$\prod_{i=0}^{2m-4} J_a^i(X) \simeq \mathbf{J}(\mathrm{NC}(X)_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathbf{J}(\mathrm{NC}(C)_{\mathbb{Q}}) \oplus \mathbf{J}(\mathrm{NC}(\operatorname{Spec}(k))_{\mathbb{Q}})^{\oplus 2m-4} \simeq J(C).$$

Напомним теперь из доказательства предложения 6.3, что

$$J_a^{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq A_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq J(C)_{\mathbb{Q}}.$$

Комбинируя два приведенных выше изоморфизма, мы заключаем, что $J_a^i(X)$ изогенен нулю (и, следовательно, равен нулю) при $i \neq \kappa$.

8.3. Три нечетномерные квадрики. Пусть $n = 2m$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Поскольку мы рассматриваем пересечение трех нечетномерных квадрик, то $\dim(X) = 2m-3$ и $\kappa = m-2$. Начнем с напоминания следствия гипотезы 1.1, основанного на методах Блоха–Шриниваса разложения диагонали.

Предложение 8.1 (Паранджапе [4, теорема 6.3]). *Пусть Y – d-мерное полное пересечение, удовлетворяющее гипотезе 1.1. В этом случае имеем*

(i) $\mathrm{CH}_i(Y)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ *для всех* $i < \kappa$,

(ii) $\mathrm{CH}_i(Y)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ *для всех* $i > d-\kappa$,

(iii) $\mathrm{CH}_{d-\kappa}(Y)_{\mathbb{Q}}$ *– конечномерное векторное $\mathbb{Q}$-пространство.*

Седствие 8.2. *Пусть X – полное пересечение трех нечетномерных квадрик. В этом случае $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}$ – конечномерное векторное $\mathbb{Q}$-пространство при каждом $i \neq m-2$.*

Доказательство. Напомним, что $\kappa = m-2$ и $d = 2m-3$. Значит, доказательство следует из комбинации теоремы 1.2 с предложением 8.1.

Теперь у нас есть все составляющие, необходимые для доказательства теоремы 1.3. В коразмерностных обозначениях следствие 8.2 показывает, что $\mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}$ – конечномерное векторное $\mathbb{Q}$-пространство при каждом $i \neq m-1$. Отсюда следует, что подпространства $A^i(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}$, $i \neq m-1$, – конечномерны, и их образы при отображении Абеля–Якоби

$$\mathrm{AJ}^{i-1}\colon A^i(X)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow J^{i-1}(X)_{\mathbb{Q}}, \qquad i \neq m-1,$$

изогенны нулю. Таким образом, $J_a^i(X) = 0$ при каждом $i \neq m-2$. Теорема 1.3 доказана.

Замечание 8.3. Приведенное доказательство легко адаптируется к случаю полного пересечения двух квадрик.

§ 9. Доказательство теоремы 2.1

9.1. Две нечетномерные квадрики. Пусть $n = 2m$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Поскольку мы рассматриваем пересечение двух нечетномерных квадрик, то $d := \dim(X) = 2m-2$. Как объяснялось при доказательстве предложения 6.1, можно подобрать целые числа $l_1, \dots, l_{4m} \in \{0, \dots, d\}$ таким образом, что возникнет изоморфизм

$$M(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbf{L}^{\otimes l_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{L}^{\otimes l_{4m}}.$$

Отметим, что отсюда автоматически следует конечность по Кимуре рационального мотива Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$. Применяя следующее вычисление (см. (6.7))

$$\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{если } i \neq m-1, \\ \mathbb{Q}^{\oplus(2m+2)}, & \text{если } i = m-1, \end{cases}$$

заключаем, что

$$M^i(X)_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} \mathbf{L}^{\otimes \frac{i}{2}}, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant 4m-4,\ i \neq 2m-2,\ i \text{ четно}, \\ (\mathbf{L}^{\otimes m-1})^{\oplus 2m+2}, & \text{если } i = 2m-2, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \tag{9.1}$$

Используя, наконец, тот факт, что $d = 2m-2$, замечаем, что (9.1) согласуется с (2.1).

9.2. Две четномерные или три нечетномерные квадрики. Пусть m – целое число не меньше двух. Поскольку мы рассматриваем пересечение двух или трех нечетномерных квадрик, то $d := \dim(X) = 2m-3$ и $\kappa = m-2$. Напомним, что группа $A_i(Y)_{\mathbb{Q}}$ k-схемы Y называется *рационально представимой*, если найдется кривая Γ и алгебраическое сюръективное отображение $A_0(\Gamma)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow A_i(Y)_{\mathbb{Q}}$.

Теорема 9.1 (Виал, [2, теорема 4]). *Пусть Y – k-схема размерности d. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *существует мотивное разложение*

$$M^j(Y)_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} (\mathbf{L}^{\otimes l})^{\oplus a_l}, & \text{если } j = 2l, \\ M^1(J_a^l(Y))_{\mathbb{Q}}(l-d), & \text{если } j = 2l+1 \end{cases} \tag{9.2}$$

для некоторого целого $a_l \geqslant 1$;

(ii) *группы $A_i(Y_{\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$, $0 \leqslant i \leqslant d$, рационально представимы.*

Теперь напомним, что согласно теореме 1.3, (ii) имеем $J_a^i(X) = 0$ при $i \neq m-1$. Отсюда следует, что группы $A_i(X)_{\mathbb{Q}}$ тривиальны при $i \neq m-2$ и, следовательно, рационально представимы. В случае полного пересечения двух четномерных квадрик имеет место алгебраический изоморфизм $A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq A_0(C)_{\mathbb{Q}} \simeq J(C)_{\mathbb{Q}}$ (подробности см. в [8, теорема 4.14]). В случае полного пересечения трех нечетномерных квадрик, имеет место алгебраический изоморфизм $A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq A_1(Q')_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{Prym}(\widetilde{C}/C)_{\mathbb{Q}}$, который индуцируется алгебраическим сюръективным отображением $A_0(\widetilde{C}) \twoheadrightarrow A_{m-2}(X)$ (подробности см. в [9, теоремы 3.1, 6.3]). Следовательно, в обоих случаях группа $A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}$ (а значит и $A_{m-2}(X_{\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$) также рационально представима. Отсюда вытекает условие (ii) теоремы 9.1. Как объяснялось при доказательстве теоремы 1.2, $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ при $i \neq m-2$ и $\mathrm{CH}_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}}/A_{m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$. Как следствие, все коэффициенты a_i равны единице и разложение (9.2) согласуется с (2.2). Теорема 2.1 доказана.

§ 10. Доказательство теоремы 2.2

Пусть X – k-схема. Напомним, что уровень группы Чжоу $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}$ не превосходит r, если найдется такая замкнутая подсхема $Z \subset X$ размерности $i+r$, что собственное отображение прямого образа $\mathrm{CH}_i(Z_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{CH}_i(X_{\mathbb{C}})$ будет сюръективным.

Теорема 10.1 (Виал, [3, теорема 7.1]). *Пусть X – неприводимая k-схема размерности d. Допустим, что уровень групп Чжоу $\mathrm{CH}_0(X_{\mathbb{C}}), \dots, \mathrm{CH}_l(X_{\mathbb{C}})$ не превосходит n. Тогда имеет место следующее*:

(i) *если $n = 3$ и $l = \lfloor (d-4)/2 \rfloor$, то X удовлетворяет гипотезе Ходжа*;

(ii) *если $n = 2$ и $l = \lfloor (d-3)/2 \rfloor$, то X удовлетворяет стандартной гипотезе Гротендика типа Лефшеца*;

(iii) *если $n = 1$ и $l = \lfloor (d-3)/2 \rfloor$, то X удовлетворяет гипотезе Мюрре*;

(iv) *если $n = 1$ и $l = \lfloor (d-2)/2 \rfloor$, то $M(X)_{\mathbb{Q}}$ – конечно по Кимуре,*

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть.

Теорема 10.2 (Виал, [3, теорема 6.10]). *Пусть $\pi\colon X \to B$ – гладкий доминантный плоский морфизм k-схем. Предположим, что $\mathrm{CH}_i(X_b) = \mathbb{Q}$ для всех $i < l$ и всех замкнутых точек $b \in B$. Тогда уровень $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \leqslant \dim(B)$ для всех $i < l$.*

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства теоремы 2.2. Доказательство состоит в проверке условий теорем 10.1, 10.2. Напомним, что $f\colon Y \to B$ – гладкий доминантный плоский морфизм, слои которого – полные пересечения либо двух квадрик, либо трех нечетномерных квадрик. В этих случаях из теоремы 1.2 следует, что $\mathrm{CH}_i(Y_b)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ при $i < \kappa = [\dim(Y_b)/2]$. Как следствие, уровень $\mathrm{CH}_l(Y)$ не превосходит $\dim(B)$ при $l \leqslant [(d-\dim(B)-1)/2]$. Применяя теорему 10.1, мы получаем утверждения (i)–(iii) теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

Авторы очень благодарны Елен Эно (Esnault) за ценные советы, Чарльзу Виал и Ашеру Ауелу (Auel) за полезные замечания и ответы на вопросы. Они также хотели бы поблагодарить анонимных рецензентов за их замечания и предложения, которые в значительной степени помогли улучшить статью.

Список литературы

1. A. Otwinowska, “Remarques sur les cycles de petite dimension de certaines intersections complètes”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **329**:2 (1999), 141–146.
2. C. Vial, “Projectors on the intermediate algebraic Jacobians”, *New York J. Math.*, **19** (2013), 793–822.
3. C. Vial, “Algebraic cycles and fibrations”, *Doc. Math.*, **18** (2013), 1521–1553.
4. K. P. Paranjape, “Cohomological and cycle-theoretic connectivity”, *Ann. of Math.* (2), **139**:3 (1994), 641–660.
5. H. Esnault, M. Levine, E. Viehweg, “Chow groups of projective varieties of very small degree”, *Duke Math. J.*, **87**:1 (1997), 29–58.
6. P. A. Griffiths, “On the periods of certain rational integrals. I, II”, *Ann. of Math.* (2), **90**:3 (1969), 460–495, 496–541.
7. C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, **10**, Soc. Math. France, Paris, 2002, viii+595 pp.
8. M. Reid, *The complete intersection of two or more quadrics*, Ph. D. Thesis, Cambridge, Univ. of Cambridge, 1972, 94 pp., http://homepages.warwick.ac.uk/~masda/3folds/qu.pdf.
9. A. Beauville, “Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **10**:3 (1977), 309–391.
10. Y. André, *Une introduction aux motifs* (*motifs purs*, *motifs mixtes*, *périodes*), Panor. Synthèses, **17**, Soc. Math. France, Paris, 2004, xii+261 pp.
11. B. Keller, “On differential graded categories”, *International Congress of Mathematicians*, v. II (Madrid), Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 151–190.
12. M. Kontsevich, *Non-commutative motives*, Talk at the Institute for Advanced Study on the occasion of the 61^{st} birthday of Pierre Deligne, October 2005, 2005, http://video.ias.edu/Geometry-and-Arithmetic.
13. M. Kontsevich, *Mixed noncommutative motives*, Talk at the Workshop on Homological Mirror Symmetry, Miami, 2010.
14. M. Kontsevich, “Notes on motives in finite characteristic”, *Algebra, arithmetic, and geometry*, v. II, In honor of Yu. I. Manin, Progr. Math., **270**, Birkhäuser, Boston, MA, 2009, 213–247.
15. G. Tabuada, *Noncommutative motives*, Univ. Lecture Ser., **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, x+114 pp.
16. A. Bondal, D. Orlov, *Semi-orthogonal decomposition for algebraic varieties*, arXiv: alg-geom/9506012.
17. G. Tabuada, “Invariants additifs de dg-catégories”, *Int. Math. Res. Not.*, **2005**:53 (2005), 3309–3339.
18. M. Marcolli, G. Tabuada, “Noncommutative motives, numerical equivalence, and semi-simplicity”, *Amer. J. Math.*, **136**:1 (2014), 59–75.
19. M. Marcolli, G. Tabuada, “Jacobians of noncommutative motives”, *Mosc. Math. J.*, **14**:3 (2014), 577–594.
20. M. Bernardara, G. Tabuada, “From semi-orthogonal decompositions to polarized intermediate Jacobians via Jacobians of noncommutative motives”, *Mosc. Math. J.* (to appear); arXiv: 1305.4687.

21. A. Kuznetsov, “Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics”, *Adv. Math.*, **218**:5 (2008), 1340–1369.
22. A. Polishchuk, “Holomorphic bundles on 2-dimensional noncommutative toric orbifolds”, *Noncommutative geometry and number theory*, Aspects Math., **E37**, Vieweg, Wiesbaden, 2006, 341–359.
23. M. Bernardara, G. Tabuada, “Relations between the Chow motive and the noncommutative motive of a smooth projective variety”, *J. Pure Appl. Algebra*, **219**:11 (2015), 5068–5077.
24. M. Marcolli, G. Tabuada, “From exceptional collection to motivic decompositions via noncommutative motives”, *J. Reine Angew. Math.*, **2015**:701 (2015), 153–167.
25. S.-I. Kimura, “Surjectivity of the cycle map for Chow motives”, *Motives and algebraic cycles*, Fields Inst. Commun., **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 157–165.
26. C. Vial, “Pure motives with representable Chow groups”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **348**:21-22 (2010), 1191–1195.
27. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, 1969 *Algebraic geometry* (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 193–199.
28. J. Bouali, “Motives of quadric bundles”, *Manuscripta Math.*, **149**:3-4 (2016), 347–368; arXiv: 1310.2782.
29. А. А. Бейлинсон, “Когерентные лучки на $\mathbf{P}^n$ и проблемы линейной алгебры”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 68–69; англ. пер.: A. Beilinson, “Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems of linear algebra”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 214–216.

Марчелло Бернардара
(Marcello Bernardara)
Université de Toulouse, France;
Université Paul Sabatier, Toulouse, France;
Institute de Mathématique de Toulouse, France
E-mail:
marcello.bernardara@math.univ-toulouse.fr

Поступило в редакцию
14.05.2015

Гонсалу Табуада
(Goncalo Tabuada)
Department of Mathematics,
Massachusetts Institute of Technology, USA
E-mail: tabuada@math.mit.edu