5. Polynômes symétriques, Séries formelles.

Exercice 5.1 Montrer que si a, b sont deux nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$, alors $a+b$ et ab sont aussi algébriques. En déduire que l'ensemble de tous les nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ forme un corps noté $\overline{\mathbb{Q}}$ et qu'on a des inclusions strictes $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.

Exercice 5.2 Montrer que le corps constitué de fractions rationnelles symétriques correspond au corps des fractions de l'anneau des polynômes symétriques.

Exercice 5.3 Calculer l'inverse de $1 - X^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dans $K[[X]]$. En déduire une inverse de $1 + X + X^2 \in \mathbb{C}[[X]]$.

Exercice 5.4 Quel est le développement en série formelle de $\frac{1}{(1-X^{n_1})\cdots(1-X^{n_k})}$, où les $n_i \in \mathbb{N}^*$ sont distincts ?

Exercice 5.5 On introduit les déterminants de Hankel d'une série formelle $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ par $H_n^{(k)} := det\, A_n^{(k)}$ où

$$A_n^{(k)} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \cdots & a_{n+2k-2} \end{pmatrix}$$

Montrer que si $H_{d+j}^{(q+1)} = 0$ et $H_{d+j}^{(q)} \neq 0$ pour tout entier naturel j, alors f est rationnelle.

Exercice 5.6 Développer en série de Laurent à l'infini la fraction rationnelle $R := \frac{X^3}{X^2+1}$.

Exercice 5.7 On travaille dans $K[[X]]$ pour K de caractéristique non nulle. Calculer la dérivée k-ième de $\frac{1}{1-X}$ et en déduire le développement en série formelle de $\frac{1}{(1-X)^{k+1}}$.

Exercice 5.8 Résoudre l'équation différentielle $(1+X)f' - \alpha f = 0$ (où $\alpha \in K$) avec la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 5.9 À l'aide d'une équation différentielle, calculer $\sqrt{1-4X}$.

Exercice 5.10 Nombres de Catalan. Soit $c_0 = 1$ et $c_n = \sum_{i+j=n-1} c_i c_j$. Considérons la série $C = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$.

1. Montrer que $C = \frac{1-\sqrt{1-4X}}{2X}$.
2. Utiliser l'exercice précédent pour donner une formule pour les nombres c_n.
3. Pour $n \geq 1$, montrer que le nombre de Catalan c_n correspond au cardinal suivant :
   a. Le nombre d'arbres binaires plans à $n+1$ feuilles
   b. Les suites $a_1, ..., a_{2n}$ de somme nulle où chaque $a_i = \pm 1$ et chaque somme partielle est ≥ 0.
   c. Le nombre de parenthésages possibles sur un produit $a_1 \cdots a_{n+1}$.
   d. Les chemins sur un carré $n \times n$ qui partent de $(0,0)$, arrivent à (n,n), et ne dépassent jamais la diagonale.
   e. Les façons de couper un polygône convexe à $n+2$ sommets en n en ajoutant $n-1$ cordes deux à deux non sécantes entre sommets.