Travaux dirigés - Fonctions

TD n°1

Pré-requis :
- connaître la notion de domaine de définition d'une fonction
- définition du nombre dérivé d'une fonction
- savoir calculer une dérivée

Objectifs :
- savoir reconnaître une composée de fonctions
- savoir exhiber le domaine de définition d'une composée
- savoir dériver une composée de fonctions

Exercice 1

Pour chacune des fonctions ci-après, écrire l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

$$f_1(x) = x^3\cos(5x+1)$$
$$f_2(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$$
$$f_3(x) = x\ln(x)$$
$$f_4(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)}}{\mathrm{e}^{\sin(x)}}$$
$$f_5(x) = \left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^5$$
$$f_6(x) = \ln(\cos(2x))$$
$$f_7(x) = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$f_8(x) = \ln(\mathrm{e}^x+1)$$

Exercice 2

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$ puis en déduire les équations cartésiennes des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 3

Soient u, v et w trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de uvw.

Exercice 4

On note f' la dérivée de f. On note f'' la dérivée de f' qui est la ***dérivée seconde*** de f. Plus généralement, on note $f^{(n)}$ la ***dérivée n-ième*** de f. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de :

- $f : x \mapsto \cos(x)$
- $g : x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée seconde de $f \circ g$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

1. Calculer les premières dérivées de f afin de conjecturer une expression de $f^{(n)}$.
2. Démontrer la conjecture précédente.

TD n°2

Pré-requis :

- connaître la notion de fonction, son ensemble de départ (ou de définition) et son ensemble d'arrivée
- connaître les quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\in$
- savoir interpréter une phrase simple formée à l'aide de quantificateurs

Objectifs :

- savoir donner l'ensemble des antécédents d'un ensemble par une fonction
- connaître les définitions d'ensemble image et d'image réciproque et savoir les calculer dans des exemples simples
- connaître les définitions de fonction injective, surjective et bijective et savoir les reconnaître

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Est-ce que la fonction f est surjective ?
3. Est-ce que la fonction f est injective ?

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.
Est-ce que f est bijective ?

Exercice 9

Soit
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}$$
Est-ce que f est bijective ?

Exercice 10

Soit
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$$

1. Est que f est injective ?
2. Est que f est surjective ?
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$.

Exercice 11

Soit
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x-2 \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R}^+)$ et $f(\mathbb{R}^-)$.
2. Déterminer $f(f^{-1}(\mathbb{R}^+))$ et $f^{-1}(f(\mathbb{R}^+))$
3. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-ce que $\forall E \subset \mathbb{R},\ g^{-1}(g(E)) = E$?
4. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-ce que $\forall E \subset \mathbb{R},\ g(g^{-1}(E)) = E$?

Exercice 12

On considère quatre sous-ensembles A, B, C, D de $\mathbb{R}$ et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Démontrer que :
$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$
$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$
Démontrer que :
$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

TD n°3

Pré-requis :
- connaître la notion de bijection
- connaître les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme
- connaître la notion de dérivabilité en un point

Objectifs :
- savoir définir la bijection réciproque
- comprendre la définition de la fonction logarithme, connaître son ensemble de définition et savoir calculer sa dérivée
- savoir calculer la dérivée d'une bijection réciproque

Exercice 13

1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   - $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$.
   - $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 7$.
   - $f_3 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $x \mapsto |x|$.
   - $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
   - $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$.
2. Soient $E = F = \mathbb{R}^{+*}$, vérifier que $f(x) = \frac{1}{x}$ définit une bijection de E sur E. Déterminez f^{-1}.
3. Montrez que la fonction $g :]1, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $g(x) = \frac{1}{x-1}$ est bijective. Calculez g^{-1}.
4. Déterminez E et F pour que $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ soit une bijection de E sur F. Déterminez h^{-1}.
5. Déterminez E et F pour que $k(x) = x^2 + 2$ soit une bijection de E sur F. Déterminez k^{-1}.

Exercice 14

On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\setminus\left(-\dfrac{1}{4}\right) \\ & & x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{4x+1} \end{array}$$

1. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}^+$ par cette fonction.
2. Déterminer l'image réciproque de $\left[\frac{4}{5}; 1\right]$.
3. Proposer deux intervalles I et J, les plus grands possibles, tels que $0 \in I$ et tels que la fonction

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{g} & : & I & \to & J \\ & & x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{4x+1} \end{array}$$

   soit bijective.
4. Déterminer une expression de $(\tilde{g})^{-1}$.

Exercice 15

On rappelle que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$ et que $\ln :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de exp.

1. Démontrer que $\forall x, y \in]0; +\infty[,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Démontrer ensuite que $\forall x \in]0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n \ln(x)$.

Exercice 16

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction f définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$. On notera a^x la l'expression $f_a(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f_a ?
2. Justifier la notation a^x utilisée pour désigner $f_a(x)$.
3. Démontrer que, dans certains cas, $x \mapsto a^x$ réalise une bijection. Préciser les ensembles de départ et d'arrivée.
4. Lorsque $x \mapsto a^x$ est bijective, déterminer sa bijection réciproque, sa dérivée et la dérivée de sa réciproque.

TD n°4

Pré-requis :
- connaitre les valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus
- savoir dériver les fonctions cos et sin
- savoir étudier le signe des fonctions cos et sin

Objectifs :
- comprendre le procédé de construction des fonctions arccos, arcsin et arctan
- connaître les ensembles de définition et dérivées de arccos, arcsin et arctan
- mener des calculs simples avec les fonctions arccos, arcsin et arctan

Exercice 17

1. Calculez $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, $\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\arccos\left(\cos(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\sin(\arcsin(1))$, $\arcsin(\sin(1))$, $\tan(\arctan(3))$, $\arctan(\tan(3))$.
2. Calculez $\arccos\left(\sin(\frac{3\pi}{2})\right)$, $\arcsin\left(\sin(\frac{11\pi}{7})\right)$, $\arcsin\left(\cos(\frac{\pi}{17})\right)$, et $\arctan\left(\tan(-\frac{17\pi}{5})\right)$.

Exercice 18

En utilisant les formules de trigonométrie habituelles, simplifiez les expressions suivantes :
1. $\sin(2\arcsin(x))$, $\cos(2\arccos(x))$, $\sin^2\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right)$;
2. $\sin(\arccos(x))$, $\cos(\arcsin(x))$, $\cos(2\arcsin(x))$;
3. $\sin(\arctan(x))$, $\cos(\arctan(x))$.

Exercice 19

Donner le domaine de définition et calculer les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$,
2. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$,
3. $x \mapsto \cos(\arccos(x))$,
4. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$,
5. $x \mapsto \tan(\arctan(x))$,
6. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$,

Exercice 20

Calculez les dérivées des fonctions $x \mapsto \exp(\tan^2(x^2))$, $x \mapsto \ln(\cos^2(x))$ et $x \mapsto \sin(\exp(\arctan(x)))$.

Exercice 21

1. Démontrez que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{sign}(x)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 22

On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.
1. Démontrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. (On simplifiera au maximum l'expression de f'.)
2. Déduisez-en une autre expression de f par une fonction usuelle du cours.

Exercice 23

1. Calculer les valeurs de arccos et arcsin en 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Idem pour arctan en 0, 1, $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Calculer $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)$. Idem avec $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right)$ et $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{3}\right)$ (attention aux intervalles !)
3. Calculer $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$.

4. Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. En déduire que $f(x) = \arcsin x$, pour tout $x \in]-1,1[$.
5. Montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [-1,1]$.

Exercice 24

1. Calculez $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos \frac{-1}{2}$, $\arctan \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\arcsin \sin \frac{5\pi}{6}$, $\arccos \cos \frac{5\pi}{6}$, $\sin \arcsin 1$, $\arcsin \sin 1$, $\tan \arctan 3$, $\arctan \tan 3$.
2. Calculez $\arccos(\sin \frac{3\pi}{2})$, $\arcsin(\sin \frac{11\pi}{7})$, $\arcsin(\cos \frac{\pi}{17})$, et $\arctan(\tan -\frac{17\pi}{5})$.

Exercice 25

1. En comparant les dérivées, montrez que pour tout $x \in]0,1[$, on a $\arcsin(x) \geqslant 1 - \sqrt{1-x^2}$.
2. Montrez de même que $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \geqslant \sqrt{1-x^2}$.
3. En appliquant avec $x = 1/\sqrt{2}$, donnez ainsi deux minorations de π, et comparez les inégalités obtenues.
4. Même question avec $x = 1/2$, $x = \sqrt{3}/2$.

Exercice 26

1. Démontrez que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \mathrm{sign}(x)\frac{\pi}{2}$.

TD n°5

Pré-requis :

- Savoir déterminer le signe d'une expression
- Savoir calculer une dérivée
- Savoir construire un tableau de variations
- Fonctions exponentielle et logarithme népérien

Objectifs :

- Exploiter un tableau de variations et la présence de tangentes horizontales pour construire une courbe
- Exploiter la parité et/ou la périodicité d'une fonction pour construire une courbe
- Exploiter la convexité d'une fonction pour construire une courbe

Exercice 27

1. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont toutes les deux paires. Que peut-on dire de la parité de, leur somme $f+g$? leur produit $f\times g$?leur composée $g\circ f$?
2. Même question en supposant f et g impaires, puis en supposant f paire et g impaire.

Exercice 28

On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto \{x\}$ et montrez qu'elle est périodique.

Exercice 29

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Montrez que $|f|$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ et tracez son graphe.
2. On considère la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(\pi f(x)\right)$, où f est définie à la question précédente. Déduisez de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.

Exercice 30

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$.
Après avoir fait une étude de la fonction f, dressez l'allure de sa courbe représentative,

Exercice 31

Etudier la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ afin d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 32

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.

1. Démontrer que si f est majorée alors f est constante.
2. Est-ce que ce résultat reste vrai pour $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$?

Exercice 33

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2\ln(x) - x^2$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique.
3. Dressez le tableau de variation de f.
4. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f.
5. Tracer le graphe de f et déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

TD n°6

Pré-requis :
- bien connaître la fonction exponentielle
- connaître le théorème de la bijection
- savoir dériver une fonction réciproque

Objectifs :
- connaître les fonctions ch, sh et th
- comprendre le procédé de construction des fonctions Argch, Argsh et Argth

Exercice 34

Démontrez que :

1. Argth $:]-1,1[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.
2. Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 35

Établir pour cosh, sinh et th

1. les formules d'addition : $\cosh(a+b)$, $\cosh(a-b)$, $\sinh(a+b)$, $\sinh(a-b)$, $\mathrm{th}(a+b)$, $\mathrm{th}(a-b)$;
2. les formules de duplication : $\cosh(2x)$, $\sinh(2x)$, $\mathrm{th}(2x)$;
3. et les formules de linéarisation : $\cosh^2(x)$, $\sinh^2(x)$.

Exercice 36

Simplifiez l'expression suivante : $\frac{\cosh(\ln(x))+\sinh(\ln(x))}{x}$.

Exercice 37

Simplifiez l'expression $\frac{2\cosh^2(x)-\sinh(2x)}{x-\ln(\cosh(x))-\ln(2)}$ afin de pouvoir calculer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 38

Calculez la dérivée de la fonction suivante après avoir indiqué sur quels intervalles elle est dérivable :

$$h(x) = \frac{1-\cosh(x)}{2+\sinh(x)}.$$

Exercice 39

Établir que

1. pour tout $x \geqslant 0$, $\sinh(x) \geqslant x$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 40

Établir les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
2. Pour tout $x \geqslant 1$, $\mathrm{Argch}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 41

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\cosh(\operatorname{Argsh}(x))$, $\operatorname{th}(\operatorname{Argsh}(x))$, $\sinh(2\operatorname{Argsh}(x))$;
2. $\sinh(\operatorname{Argch}(x))$, $\operatorname{th}(\operatorname{Argch}(x))$.

Exercice 42

Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

TD n°7

Pré-requis :

- savoir reconnaître un quotient, un produit...
- savoir factoriser
- maîtriser la notion de limite
- connaître les limites des fonctions racines, polynômes, exponentielle et logarithme
- connaître les théorèmes de comparaison

Objectifs :

- savoir calculer une limite en utilisant les règles de calcul
- savoir calculer une limite en utilisant les théorèmes de croissances comparées
- savoir déterminer les asymptotes à une courbe
- savoir construire l'allure d'une courbe en utilisant pertinemment les asymptotes éventuelles

Exercice 43

Calculez

1. $\lim_{x\to+\infty} (10x+3)e^x$
2. $\lim_{x\to+\infty} e^{6x}-e^{5x}$
3. $\lim_{x\to-\infty} e^x - xe^x+1$
4. $\lim_{x\to+\infty} e^x - xe^x+1$
5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{e^x+4}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

Exercice 44

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Après une étude pertinente de f, donnez l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 45

Étudier la fonction définie par $f(x)=\ln(\cosh(x)-x)$. On s'intéressera aux droites asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Démontrez que $\mathscr{C}_f$ n'admet aucune asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 47. Comparaison exponentielle/polynôme en $+\infty$

Pour $n\geqslant 0$, on considère la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=\mathrm{e}^x+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1. Calculer $f_n'(x)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n\geqslant 0$, f_n est croissante sur $[0,+\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x\geqslant 0$, on a :
$$\mathrm{e}^x\geqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
4. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$.
5. Soit $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ un polynôme. En utilisant l'égalité $\dfrac{\mathrm{e}^x}{P(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}\times\dfrac{x^n}{P(x)}$, déterminer suivant le signe de a_n la limite $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{P(x)}$.

TD n°8

Pré-requis :
- savoir ce qu'est une primitive, une intégrale
- savoir calculer les primitives les plus simples (polynômes, celles données dans le formulaire)
- connaître les propriétés de linéarité de l'intégrale

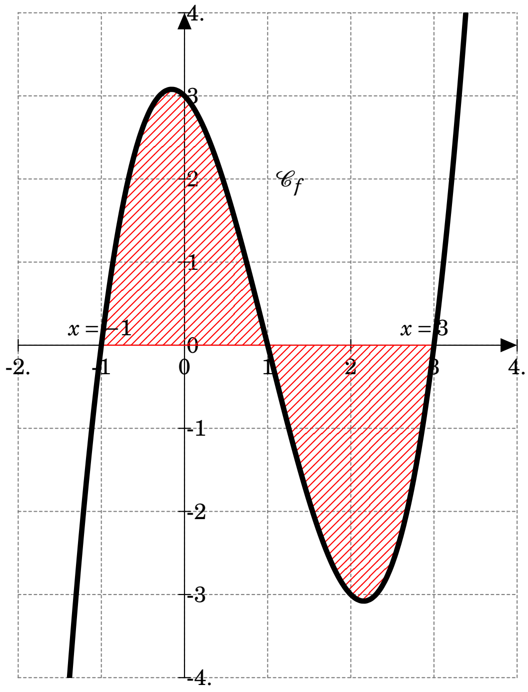
Objectifs :
- améliorer sa technique de calcul de primitive
- valeur moyenne d'une fonction
- savoir encadrer une intégrale
- maîtriser le lien intégrale/calcul d'aire

On a vu en cours comment calculer l'aire comprise en l'axe des abscisses, deux droites verticales et une fonction de signe constant. Ce qui suit nous permet de généraliser à une fonction de signe non constant.

Exercice 48. Lorsque f change de signe

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = -1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe représentant la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$.

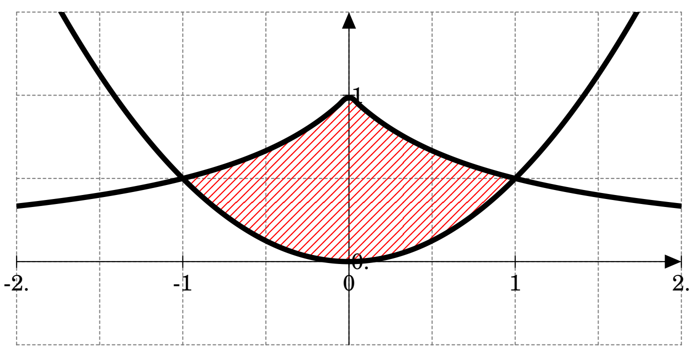
1. Dressez le tableau de signe de $f(x)$.
2. Proposez une méthode permettant de calculer l'aire hachurée en rouge.
3. Calculez cette aire. Exprimez le résultat en unités d'aire et en cm^2.



Exercice 49. Calculer l'aire du plan comprise entre deux courbes

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et les courbes représentant les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

1. Déterminez les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Après avoir identifié $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci-contre, vérifiez le résultat de la question précédente.
3. Proposez une méthode permettant de calculer l'aire hachurée en rouge. Quelle propriété de cours permet de justifier cette méthode ?
4. Calculez cette aire. Exprimez le résultat en unités d'aire et en cm^2.



Exercice 50

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a;b]$? Quelle est la valeur d'une fonction affine sur $[a;b]$?
2. Démontrer que la valeur moyenne sur $[a;b]$ de f appartient à $[m,M]$ où m (resp M) est le minimum (resp maximum) de f sur $[a;b]$.

Exercice 51

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ les intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t^2+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive.
2. Etudier la monotonie de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. Etudier les extremums de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\mathrm{e}^t}$ sur $[0;1]$.
   En déduire un encadrement de J_n puis sa limite.

Exercice 52

Soit f une fonction continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[x, x+T]$ est indépendante du réel x. On l'appelle valeur moyenne de f.
2. Déterminer la valeur moyenne de cos, de $\cos^2$ de $|cos|$.

Exercice 53

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

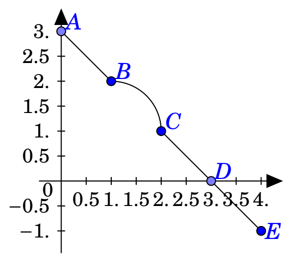
1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminez f'. Donner le tableau de variations de f et son signe.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = f(x) - \ln(x)$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   En déduire son signe.
3. Étudier les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 54

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2}t^2 \leqslant \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 55

La courbe représentative de la fonction f qui figure sur le graphe ci-contre est constituée de deux segments $[AB]$ et $[CE]$ et d'un quart de cercle entre B et C. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,3]$, puis sur $[0,4]$.



TD n°9

Pré-requis :
- savoir dériver le produit de deux fonctions
- savoir calculer une primitive à l'aide du formulaire
- notion de bijection

Objectifs :
- calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables

Exercice 56

En utilisant la formule d'intégration par parties ci-dessus, calculez :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^1 e^x x^2\,\mathrm{d}x$$

Exercice 57

Calculez les primitives suivantes en intégrant par parties entre une borne bien choisie et x.
- une primitive de $x\sin x$
- une primitive de $x^n \ln x$

Exercice 58

Calculez une primitive des fonctions suivantes. On précisera également un ensemble de définition où les calculs ont un sens.

$$f : x \mapsto e^{\sqrt{x}} \qquad g : t \mapsto t^2\exp(t^3)$$

Exercice 59

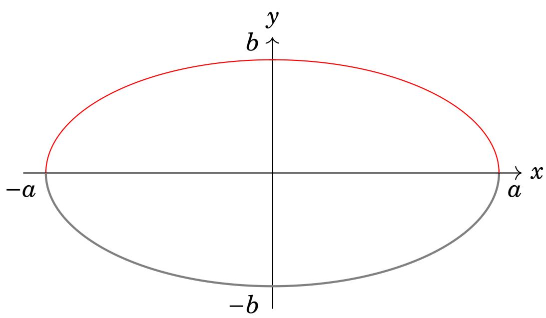
À l'aide d'une intégration par parties, trouver une primitive de :

1. $f_1(x) = \ln(x)$
2. $f_2(x) = \arctan(x)$

Exercice 60. Aire de l'ellipse

Une ellipse de demi-grand axe a et demi-petit axe b, représentée sur le graphique ci-contre, est l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation :

$$(E)\ :\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1. Montrer que la partie supérieure de l'ellipse correspond au graphe de la fonction $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ sur $[-a, a]$. *(Cela revient à vérifier que le point de coordonnées $(x, f(x))$ vérifie l'équation (E).)*
2. Calculer $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $x(u) = a\cos(u)$.
3. En déduire l'aire de l'ellipse. *(On pourra vérifier le résultat en remarquant qu'une ellipse de demi-axes $a = b = r$ n'est rien d'autre qu'un cercle de rayon r.)*

Exercice 61

On appelle intégrales de Wallis, les intégrales $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$. Démontrez, par récurrence que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ W_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\dots 4\cdot 2} \times \frac{\pi}{2} \qquad W_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\dots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3}$$