UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER — Université de Toulouse

Faculté des Sciences et d'Ingénierie

Travaux dirigés - Complexes

TD n°10

Pré-requis :
- calcul algébrique, valeur absolue dans $\mathbb{R}$
- écriture algébrique d'un nombre complexe
- trigonométrie
- application, bijection

Objectifs :
- savoir calculer le module d'un nombre complexe
- interpréter géométriquement un nombre complexe
- effectuer les calculs algébriques avec des nombres complexes

Exercice 1

Écrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

$$z_1 = \frac{3-\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}} \qquad z_3 = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{3+4\mathrm{i}}$$

$$z_2 = \frac{4\mathrm{i}}{\mathrm{i}-4} \qquad z_4 = \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6}$$

Exercice 2

Démontrez que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z_1 z_2) \leqslant \frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

Exercice 3

1. Calculez la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.
2. Calculez la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} kz = z + 2z + 3z + \cdots + nz$.

Exercice 4

Résolvez les équations suivantes. Les solutions seront écrites sous la forme algébrique.

$$3z + 5\mathrm{i} = \mathrm{i}z - 8 \qquad z + 8 + \mathrm{i} = 5\mathrm{i} + 1 - \overline{z}$$

$$\frac{1+\mathrm{i}z}{\mathrm{i}-z} = 5\mathrm{i} \qquad \mathrm{i}z + 5\overline{z} = 8 - \mathrm{i}$$

Exercice 5. Raisonnement par analyse-synthèse

Résolvez dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} |z+1| & \leqslant & 1 \\ |z-1| & \leqslant & 1 \end{cases}$$

TD n°11

Pré-requis :

- calcul algébrique, module dans $\mathbb{C}$
- trigonométrie
- application, bijection
- exponentielle réelle

Objectifs :

- savoir calculer le module et l'argument d'un nombre complexe
- savoir manipuler l'exponentielle complexe
- formules d'Euler et de Moivre
- effectuer des calculs avec la forme polaire

Exercice 6

Calculez le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (-1-i)^5 \qquad z_3 = \left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^4$$

$$z_2 = (\sqrt{3}-i)^7 \qquad z_4 = \frac{(1-i)^3}{1+\sqrt{3}i}$$

Exercice 7

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

1. Déterminez la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 8

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $\dfrac{z-2}{z-1} = i$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interprétez géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$ et retrouvez la solution de l'équation (1).

Exercice 9

Démontrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta) \Longrightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$$

Exercice 10

n est un entier naturel. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $(i-1)^n$ soit un nombre réel.

Exercice 11

1. Calculez le module de $e^{ix}+1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculez l'argument de $e^{ix}+1$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.

Exercice 12

1. Déterminez le module, un argument, les parties réelles et imaginaires de : $e^{(2+3i)}$, $e^{i(2+3i)}$, et $e^{\frac{1}{2+3i}}$.
2. Mêmes questions pour e^z, e^{iz}, $e^{\bar{z}}$, et $e^{\frac{1}{z}}$, en fonction $z = x+iy$.
3. Résolvez $e^z = 2$.

Exercice 13

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calculez le module et un argument de :

$$\frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 - e^{i\alpha} e^{i\beta}}$$

Exercice 14

1. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(z-1)\left(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$

   et en déduisez-en que, si $z \neq 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

2. Vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i \exp\left(\frac{ix}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :

$$Z_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{(n-1)ix}$$

   et en déduisez-en les valeurs de

$$\begin{aligned} X_n &= 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos((n-1)x) \\ Y_n &= \sin(x) + \sin(2x) + \ldots + \sin((n-1)x). \end{aligned}$$

Exercice 15

Dans chaque cas, déterminez l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$$

$$\frac{z-3}{z-5} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z-3}{z-5} \text{ soit imaginaire pur}$$

Exercice 16

1. Quelle est l'image du demi-plan $\mathbb{C}_+$ par l'application $z \mapsto \exp(z)$?
2. Quelle sont les images des ensembles

$$E_1 = \{z = x + iy \mid x \leqslant 0\},$$

   et

$$E_2 = \{z = x + iy \mid x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y < 2\pi\}$$

   par l'application $z \mapsto \exp(z)$? Est-ce que cette application est une bijection entre E_1 ou E_2 et leur image ?

TD n°12

Pré-requis :
- maîtriser la forme algébrique
- maîtriser la forme exponentielle
- connaître les propriétés de l'argument

Objectifs :
- savoir reconnaître ou définir une translation
- savoir reconnaître ou définir une rotation

Exercice 17

Démontrez que la composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 18

Il est dit dans le cours que toute transformation du plan s'écrivant $z \mapsto az+b$ avec $z \neq 1$ et $|z| = 1$ est une rotation.
A présent, interessons-nous au cas où $|a| \neq 1$. Prenons par exemple $a = 1+\mathrm{i}$, justifiez qu'avec une telle valeur $z \mapsto az+b$ ne décrit pas une rotation.

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{C} \to C$, la transformation du plan donnée par :

$$z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

1. Quel type de transformation est f ?
2. On note g la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2.
   (a) Quelle est l'écriture complexe de $f \circ u$?
   (b) Quelle est la nature de $f \circ u$?
   (c) Est-ce que $f \circ u = u \circ f$?

Exercice 20

1. Soit r_1 la rotation du plan de centre $A(\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
   Soit r_2 la rotation du plan de centre $B(-1+\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{-\pi}{4}$.

   Déterminez la nature des transformations $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.
2. Soit Soit r_3 la rotation du plan de centre $B(-1+\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{-\pi}{6}$.
   Déterminez la nature des transformations $r_1 \circ r_3$ et $r_3 \circ r_1$.

Exercice 21

On donne $A(1+\mathrm{i})$, $B(3+\mathrm{i})$, $C(5)$ et $D(7)$.
Existe-t'il une rotation r telle que $r(A) = C$ et telle que $r(B) = D$? Justifiez votre réponse.

Exercice 22

On donne $A(\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(7+5\mathrm{i})$ et $D(4+5\mathrm{i})$.
Existe-t'il une rotation r telle que $r(A) = C$ et telle que $r(B) = D$? Justifiez votre réponse.

TD n°13

Pré-requis :

- maîtriser la forme algébrique
- maîtriser la forme exponentielle
- savoir résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues

Objectifs :

- calculer les racines d'un nombre complexe
- résoudre une équation de degré 2 à coefficients complexes

Exercice 23

1. Calculez les racines carrées de i et de $-$i.
2. Calculez les racines carrées de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour t dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24

1. Calculez les racines carrées de chacun des trois nombres ci-dessous :

$$z_1 = i \qquad z_2 = 3-3i \qquad z_3 = 8-6i$$

2. Résolvez l'équation $z^2+(i-1)z-i=0$ avec $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 25

1. Calculez les racines carrées de $-2\mathrm{i}$.
2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2+(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}=0.$$
3. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2+z(1-5\mathrm{i})-6-2\mathrm{i}=0.$$

Exercice 26

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \qquad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \qquad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \qquad z^2+\mathrm{i}z-2-\mathrm{i}=0$$

$$z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \qquad 4z^2-2z+1=0 \qquad z^4+10z^2+169=0 \qquad z^4+2z^2+4=0$$

Exercice 27

Écrivez sous forme trigonométrique et algébrique les racines carrées de $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ puis calculez $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 28

On considère les trois solutions de $z^3-2z^2-\mathrm{i}z+3-\mathrm{i}=0$.

1. Résolvez cette équation sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. Dans le plan complexe, on considère les trois points ayant ces racines pour affixes. Prouvez que le triangle obtenu est rectangle isocèle.

Exercice 29

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^{2z}=1\sqrt{3}\mathrm{i}$.
2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^{2z}+\mathrm{e}^{z}+1=0$.

TD n°14

Pré-requis :

- savoir déterminer et utiliser l'écriture trigonométrique des complexes
- connaître la formule de Moivre
- savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe

Objectifs :

- savoir calculer les racines n-ièmes d'un nombre complexe
- savoir représenter les racines n-ièmes d'un nombre dans le plan complexe
- savoir utiliser le calcul des racines n-ièmes d'un nombre complexe pour la factorisation de certains polynômes ou pour des applications géométriques

Exercice 30

1. Quelles sont les racines quatrièmes de l'unité ? (Formes exponentielle et algébrique)
2. Donnez en coordonnées cartésiennes toutes les racines huitièmes de l'unité.
3. Dessinez les polygones réguliers correspondants à μ_3 et μ_5.
4. Calculer l'aire des polygones réguliers μ_3 et μ_5.

L'illustration suivante pourrait vous aider : http://tube.geogebra.org/material/show/id/51434.
L'exercice 33 est une excellente poursuite de cet exercice.

Exercice 31

Trouvez les racines quatrièmes de 81 et de -81.

Exercice 32

Les nombres complexes suivants sont-ils des racines n-ième de l'unité ? Si oui, précisez pour quelle valeur de n. Si non, expliquez pourquoi.

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \qquad z_2 = \frac{4-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} \qquad z_3 = e^{\frac{\mathrm{i}}{2}} \qquad z_4 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{15}} \qquad z_5 = -3\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\mathrm{i}}$$

Exercice 33

Soit $n \geqslant 3$. On note $z_k = \mathrm{e}^{2k\mathrm{i}\pi/n}$ et M_k le point du cercle unité d'affixe z_k. Les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier.

1. Calculez le périmètre de ce polygone.
2. Calculez l'aire de ce polygone.
3. Calculez les limites de ces nombres lorsque n tend vers $+\infty$. Qu'observez-vous ?

Exercice 34

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

TD n°15

Pré-requis :
- maîtriser la forme algébrique
- maîtriser la forme exponentielle
- connaître les formules de Moivre et d'Euler

Objectifs :
- savoir utiliser la formule du binôme
- exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à l'aide de polynômes trigonométriques
- linéariser un polynôme trigonométrique

Exercice 35

1. Linéarisez les expressions suivantes :

$$A = \sin^5 x \qquad B = \cos(2x)\sin(x) \qquad C = \sin^4 x \cos x \qquad D = \sin(4x)\cos(x)$$

2. Vérifiez vos résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Exercice 36

1. Linéarisez $\sin^5 x$ et $\sin^4 x \cos x$.
2. Exprimez $\cos(4x)$ à l'aide de $\cos x$ et de ses puissances.
3. Exprimez $\frac{\sin(5x)}{\sin(x)}$ à l'aide de $\cos x$ et de ses puissances.
4. Exprimez ces mêmes expressions à l'aide de $\sin x$ et de ses puissances.

Exercice 37

1. Linéarisez $(\sin(x)\cos(x))^3$
2. Déduisez de la question précédente une primitive de $(\sin(x)\cos(x))^3$.

Exercice 38

1. Calculez l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \cos^3(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 39

Calculez les intégrales suivantes en utilisant une méthode adaptée :

$$I = \int_0^{\pi} \cos^{50}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$J = \int_0^{\pi} \cos^4(2x)\sin^2(3x)\,\mathrm{d}x$$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} \cos^5(7x)\sin^7(-3x)\,\mathrm{d}x$$

$$L = \int_0^{\pi} x^3\cos(x)\,\mathrm{d}x$$