

quatrième série - tome 41 *fascicule 6* *novembre-décembre 2008*

ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE

David MARÍN & Jean-François MATTEI

Incompressibilité des feuilles de feuilletages holomorphes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INCOMPRESSIBILITÉ DES FEUILLES DE GERMES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES SINGULIERS

PAR DAVID MARÍN* ET JEAN-FRANÇOIS MATTEI

RÉSUMÉ. — Nous considérons un germe de feuilletage holomorphe singulier non-dicritique \mathcal{F} défini sur une boule fermée $\overline{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$, satisfaisant des hypothèses génériques, de courbe de séparatrice S . Nous démontrons l'existence d'un voisinage ouvert U de S dans $\overline{\mathbb{B}}$ tel que, pour toute feuille L de $\mathcal{F}_{|(U \setminus S)}$, l'inclusion naturelle $\iota : L \hookrightarrow U \setminus S$ induit un monomorphisme $\iota_* : \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(U \setminus S)$ au niveau du groupe fondamental. Pour cela, nous introduisons la notion géométrique de « connexité feuilletée » avec laquelle nous réinterprétons la notion d'incompressibilité. Nous montrons aussi l'existence de sections holomorphes transverses satisfaisant la propriété de connexité feuilletée ; elles nous permettent d'introduire une notion de « représentation de monodromie globale » du feuilletage.

ABSTRACT. — We consider a non-dicritic germ of singular holomorphic foliation \mathcal{F} defined in some closed ball $\overline{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$ with separatrix set S , satisfying some additional but generic hypotheses. We prove that there exists an open subset $U \supset S$ of \mathbb{B} , such that for every leaf L of $\mathcal{F}_{|(U \setminus S)}$ the natural inclusion $\iota : L \hookrightarrow U \setminus S$ induces a monomorphism $\iota_* : \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(U \setminus S)$ at the fundamental group level. To do this, we introduce the geometrical notion of “foliated connexity” and we re-interpret the incompressibility using it. We also show the existence of some special transverse holomorphic sections, which allow us to introduce a “global monodromy representation” for the foliation.

Introduction et résultat principal

Soit \mathcal{F}_ω un feuilletage holomorphe singulier défini par une 1-forme différentielle ω à coefficients holomorphes sur la boule ouverte $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$ de centre l'origine $0 = (0, 0)$ et de rayon $\varepsilon > 0$. Nous supposons ω à singularité isolée en 0 et *non-dicritique* [11], i.e. les germes à l'origine de courbes analytiques irréductibles S_j telles que $\omega|_{S_j} \equiv 0$, appelées *séparatrices* de \mathcal{F}_ω , sont en nombre fini, $j = 1, \dots, \varrho$, et non-nul d'après [4]. Nous choisissons ε_0 assez petit pour que, dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0}$, la séparatrice totale $S := \bigcup_{j=1}^{\varrho} S_j$ soit analytique fermée, à singularité isolée 0 et transverse à chaque sphère $\partial\overline{\mathbb{B}}_r$, $0 < r \leq \varepsilon_0$. Nous fixons

*Le premier auteur a été partiellement financé par la FEDER / Ministerio de Educación y Ciencia d'Espagne, project MTM2004-00566.

aussi une fonction holomorphe réduite f à valeurs dans le disque $\mathbb{D}_{\eta'} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < \eta'\}$, qui définit S sur $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0}$. La restriction de f à l'ouvert

$$T_\eta := f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0}, \quad 0 < \eta \ll \varepsilon_0,$$

que nous appellerons ici *tube de Milnor*, est une fibration différentiable [13] localement triviale au-dessus du disque épointé $\mathbb{D}_\eta^* := \mathbb{D}_\eta \setminus \{0\}$. Notons

$$(1) \quad T_\eta^* := T_\eta \setminus S = f^{-1}(\mathbb{D}_\eta^*) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0}.$$

Lorsque f est une intégrale première de \mathcal{F}_ω , pour chaque feuille L de la restriction $\mathcal{F}_\omega|_{T_\eta^*}$ de \mathcal{F}_ω à T_η^* , la suite exacte d'homotopie donne :

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(T_\eta^*) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{D}_\eta^*) \rightarrow 1,$$

où $\iota : L \hookrightarrow T_\eta^*$ désigne l'inclusion naturelle. En particulier, les feuilles de $\mathcal{F}_\omega|_{T_\eta^*}$ sont incompressibles dans T_η^* . L'objet de ce travail est de démontrer un résultat analogue dans un cadre général, c'est-à-dire lorsque \mathcal{F}_ω n'admet plus nécessairement une intégrale première holomorphe.

Considérons $E : T_\eta \rightarrow T_\eta$ le morphisme de réduction de \mathcal{F}_ω , cf. [17] ou [11]. Le *transformé total* $\mathcal{D} := E^{-1}(S)$ de S , que nous appelons ici *diviseur total*, est à croisements normaux. Ses composantes irréductibles sont : les composantes irréductibles \mathcal{E}_j , $j = 1, \dots, \kappa$ du *diviseur exceptionnel* $\mathcal{E} := E^{-1}(0)$ et les *transformées strictes* $\mathcal{S}_j := \overline{E^{-1}(S_j) \setminus \mathcal{E}}$ des séparatrices, $j = 1, \dots, \varrho$. L'image réciproque $E^* \omega$ permet de définir sur T_η un feuilletage \mathcal{F} à singularités isolées, dont le *lieu singulier* $Sing(\mathcal{F})$ est contenu dans \mathcal{E} . En chaque point $c \in Sing(\mathcal{F})$, le germe \mathcal{F}_c de \mathcal{F} peut être décrit par un germe de 1-forme $\tilde{\omega}_c$ qui s'écrit, dans des coordonnées z_1, z_2 appropriées :

$$(2) \quad \tilde{\omega}_c = (\lambda_c z_1 + \dots) dz_2 + (\mu_c z_2 + \dots) dz_1, \quad \text{avec } \mu_c \neq 0, \lambda_c/\mu_c \notin \mathbb{Q}_{<0},$$

les points de suspension désignant des germes de fonctions holomorphes dont le 1-jet au point c est nul. Nous dirons ici que \mathcal{F} est de *type général* si, pour chaque $c \in Sing(\mathcal{F})$, les assertions suivantes sont satisfaites :

(H1) $\lambda_c \mu_c \neq 0$,

(H2) si λ_c/μ_c est un réel irrationnel, alors le germe \mathcal{F}_c est linéarisable.

La condition (H1) exprime le fait que \mathcal{F}_c n'est pas une selle-nœud ; la réalisation de (H1) en tout point $c \in Sing(\mathcal{F})$ signifie que \mathcal{F}_ω est une courbe généralisée au sens de [3]. Comme nous avons supposé aussi que \mathcal{F}_ω est non-dicritique, toujours d'après [3], le morphisme de réduction E est le même que le morphisme de réduction de la séparatrice totale S . Concernant la condition (H2), rappelons que si λ_c/μ_c est un irrationnel < 0 , ou bien s'il appartient à un ensemble $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}_+$ de mesure pleine, appelé ensemble de Brjuno [20], alors le germe \mathcal{F}_c est toujours linéarisable.

THÉORÈME PRINCIPAL. – Soit \mathcal{F}_ω un germe à l'origine de \mathbb{C}^2 de feuilletage holomorphe singulier non-dicritique, de type général et soit T_{η_0} un tube de Milnor pour la séparatrice totale S . Alors il existe un voisinage ouvert U de S dans \overline{T}_{η_0} tel que :

(TP1) l'inclusion $(U \setminus S) \hookrightarrow (T_{\eta_0} \setminus S)$ induit un isomorphisme

$$\pi_1(U \setminus S, \cdot) \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_{\eta_0} \setminus S, \cdot),$$

(TP2) toute feuille L de la restriction $\mathcal{F}_{\omega|U \setminus S}$ est incompressible dans $(U \setminus S)$, i.e. l'inclusion naturelle $\iota : L \hookrightarrow (U \setminus S)$ induit un monomorphisme des groupes fondamentaux

$$\iota_* : \pi_1(L, \cdot) \hookrightarrow \pi_1(U \setminus S, \cdot),$$

(TP3) U contient T_η , pour $\eta > 0$ assez petit.

Il est bien connu [13] que l'application d'inclusion de $(T_{\eta_0} \setminus S)$ dans $(\mathbb{B}_{\varepsilon_0} \setminus S)$ induit un isomorphisme au niveau du groupe fondamental. Ainsi le théorème précédent permet de construire un système fondamental $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages ouverts de S dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}_{\varepsilon_0}}$ tel que, pour tout n , chaque feuille de $\mathcal{F}_{\omega|U_n \setminus S}$ est incompressible dans $(\mathbb{B}_{\varepsilon_0} \setminus S)$. D'autre part, nous verrons dans la section 5 comment, en appliquant le théorème classique de Seifert-Van Kampen de façon récurrente, on peut obtenir (5.1.4) une présentation explicite de $\pi_1(U \setminus S)$ ayant comme système de générateurs un ensemble de lacets $\{a_D\}$, indexé par les composantes irréductibles $\{D\}$ du diviseur total \mathcal{D} , vérifiant $\frac{1}{2i\pi} \int_{a_D} \frac{dF}{F} = \text{ord}_D F$, où $F = f \circ E$, et ayant pour relations

$$(3) \quad \prod_{D \subset \mathcal{D}} a_D^{(D, E)} = 1, \quad [a_D, a_E]^{(D, E)} = 1, \quad E \subset \mathcal{E}, \quad D \subset \mathcal{D}.$$

Remarquons que génériquement les feuilles de \mathcal{F} dont le groupe fondamental est non-nul forment un ensemble dense. C'est en effet le cas lorsque le groupe d'holonomie d'une composante du diviseur exceptionnel est non-résoluble. Il existe alors [1] un ensemble dense de points fixes attractifs d'éléments du pseudo-groupe d'holonomie. Ces points correspondent nécessairement à des lacets tracés dans une feuille qui sont homotopiquement non-triviaux. La densité pour la topologie de Krull de ce type de feuilletages est montrée dans [6].

Les hypothèses que nous donnons ici peuvent être affaiblies ; en particulier il est possible d'adapter l'énoncé et la preuve de ce résultat pour inclure les feuilletages dicritiques. Dans un travail en cours de rédaction, nous donnons des énoncés plus généraux qui portent sur les feuilletages holomorphes au voisinage d'un diviseur compact et pouvant éventuellement posséder des composantes dicritiques.

La structure détaillée de l'article est la suivante. Au chapitre 1, nous introduisons la notion très générale de « 1-connexité feuilletée » (1.2.2) d'un sous-ensemble T dans variété feuilletée M . Cette propriété du couple (T, M) , que nous notons $T \xrightarrow{1} M$, est assez simple ; elle signifie que, s'il est possible d'homotoper un chemin b tracé dans une feuille L à un chemin a tracé dans T , alors il existe aussi une homotopie dans L qui relie b à un chemin c tracé dans T et de plus, c et a sont homotopes dans T . Dans le cas particulier où T est un point, cette propriété est équivalente à l'incompressibilité de la feuille contenant ce point. Ainsi la propriété (TP2) du théorème principal s'exprime par la 1-connexité feuilletée de tout point dans U . Cette notion satisfait d'intéressantes propriétés. Tout d'abord la propriété de transitivité suivante, qui autorise des constructions de proche en proche : dans la situation $U' \subset U'' \subset U'''$, la 1-connexité feuilletée de U' dans U'' et de U'' dans U''' implique la 1-connexité feuilletée de U' dans U''' . Ensuite (1.3.1) un théorème de type Van Kampen, qui sera l'outil utilisé pour effectuer chaque pas d'une telle construction : dans la situation $U' \subset U''$, si U'' est obtenu par collage de U' avec un ouvert U'_1 le long d'une hypersurface réelle T , alors la 1-connexité feuilletée de T dans U' et dans U'_1 , implique la 1-connexité feuilletée de U' dans U'' . Pour prouver la propriété (TP2), nous adoptons alors la stratégie qui consiste à construire U en

collant des morceaux simples U_j satisfaisant la propriété (TP2) et effectuer des collages le long d'hypersurfaces réelles $T_j := U_{j-1} \cap U_j$ satisfaisant des hypothèses du théorème de type Van Kampen :

$$U = \bigcup_{j=1}^k U_j, \quad T_j \xrightarrow[\mathcal{F}]{}^1 U_{j-1}, \quad T_j \xrightarrow[\mathcal{F}]{}^1 U_j.$$

En posant $U^r := \bigcup_{j=0}^r U_j$, on obtient $\{c\} \xrightarrow[\mathcal{F}]{}^1 U^0 \xrightarrow[\mathcal{F}]{}^1 \dots \xrightarrow[\mathcal{F}]{}^1 U^k = U$, quel que soit le point c de U_0 . Ceci donne la propriété (TP2) puisque, quitte à renommer, l'ouvert U_0 peut être choisi arbitrairement.

Cette technique, que nous appelons « assemblage bord à bord feuilletté », est précisée en (2.1.1). Elle peut être considérée comme un procédé de plombage [5], mais dans un cadre feuilletté. Elle permet de localiser le problème. En effet nous sommes ramenés à construire des ouverts U_j nettement plus petits que U , satisfaisant la propriété (TP2). Cependant cette construction ne sera pas arbitraire. La décomposition $U = \bigcup_{j=1}^k U_j$ aura un sens topologique intrinsèque. Elle correspond, à raffinement près, à la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson du complémentaire, dans la sphère $\partial\mathbb{B}_{\varepsilon_0}$, de l'entrelacs défini par la séparatrice totale S . Il est bien connu [18] que cette décomposition s'explique à partir de l'arbre dual du diviseur \mathcal{D} de désingularisation de S . Ce seront les pièces d'une décomposition similaire de \mathcal{D} effectuée en (2.2) qui nous serviront de support à la construction des ouverts U_j .

Notons que la seule propriété (TP2) ne donne pas un théorème intéressant, puisqu'on se rait tenté de compliquer artificiellement la topologie de U , afin que son groupe fondamental contienne celui de chaque feuille. Ce ne sera pas le cas de notre construction car, pour satisfaire aussi les propriétés (TP1) et (TP3), nous chercherons à préserver une présentation du groupe fondamental de $U \setminus S$, celle qui correspond à celle du complémentaire de S dans un tube de Milnor. Pour cela, la topologie des blocs U_j et de leurs bords T_j devra être la plus simple possible.

Tout d'abord les T_j seront des ensembles « de type suspension » (3.1.1) : ils sont construits à partir d'un disque Σ transverse au feuillettage, par transport holonome le long d'un lacet δ tracé dans \mathcal{D} , faisant un tour autour d'une singularité de \mathcal{D} . Ainsi T_j est obtenu à partir du cylindre $\Sigma \times [0, 1]$ en recollant les deux faces $\Sigma \times 0$ et $\Sigma \times 1$ par le difféomorphisme h d'holonomie de \mathcal{F} le long de δ . La topologie d'un tel ensemble peut être compliquée, car $\partial(\Sigma \cup h(\Sigma))$ peut avoir plusieurs composantes connexes. Ce n'est pas le cas lorsque $\partial h(\Sigma)$ est C^1 -proche de $\partial\Sigma$. Par exemple, si $\partial\Sigma$ est un cercle suffisamment petit dans une coordonnée z appropriée, le collage h est presque \mathbb{C} -linéaire et $\Sigma \cup h(\Sigma)$ est étoilé (dans la coordonnée z). Dans ce cas T_j aura la topologie d'un tore. Pour mesurer la « distorsion » entre $\partial h(\Sigma)$ et $\partial\Sigma$, nous introduisons en (3.1.2) la notion de « rugosité ». En (3.1.5) nous estimons la rugosité de $h(\Sigma)$ en fonction de la taille et de la rugosité de Σ . De cette manière nous enrichissons la construction de proche en proche décrite ci-dessus, en introduisant un contrôle de la rugosité des bords des pièces U_j . La preuve du théorème principal se réduit ainsi à celle du théorème (3.2.1). Celui-ci assure, pour chaque pièce du diviseur, l'existence d'un bloc U_j avec : une composante connexe de ∂U_j imposée (celle qui servira au collage avec U_{j-1}), une petite rugosité de toutes autres composantes de ∂U_j et la 1-connexité feuillettée de chaque composante de ∂U_j dans U_j ; il suffit pour cela que la rugosité de la composante imposée soit suffisamment petite.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à la preuve de ce théorème. Ils contiennent l'essentiel des difficultés techniques de ce travail. Cependant les constructions sont suffisamment générales pour pouvoir être appliquées à d'autres situations (singularités dicritiques, feilletages définis sur des surfaces singulières, etc.).

Le chapitre 4 est dédié à la construction des blocs feilletés attachés aux singularités. D'après les hypothèses faites sur \mathcal{F}_ω , il n'y a que deux possibilités : soit la singularité est linéarisable, auquel cas la construction du bloc se fait par des techniques élémentaires (section 4.1), ou bien la singularité est un col résonant. Ce second cas est beaucoup plus difficile à traiter. Au voisinage de la singularité, si l'on ôte les variétés invariantes, le feuilletage ressemble à un feuilletage-collier, i.e. le produit par un intervalle, d'un feuilletage en lignes d'un tore plein évidé de son âme. En fait, dans la construction « de passage des cols » que nous effectuons en (4.2.2), l'un des bords du collier (le bord imposé) est un ensemble de type suspension, mais l'autre bord possède une géométrie plus compliquée. Il nous faut le modifier tout en conservant la propriété de 1-connexité feuilletée ; il nous faut aussi contrôler sa rugosité en fonction de celle du bord imposé. Pour cela nous introduisons en (4.3.5) une opération d'homotopie le long des feuilles, que nous appelons « rabotage », et nous effectuons (section 4.4) les estimations nécessaires de gain de rugosité.

Le chapitre 5 est consacré à la preuve du théorème (3.2.1) dans le cas d'un bloc attaché à une composante irréductible D du diviseur. La pièce du diviseur correspondant est constituée de la composante irréductible D et de toutes les branches mortes (2.2) qui s'y attachent. Au paragraphe 5.1, nous effectuons la construction du bloc feilleté. Elle se fait en trois étapes. D'abord nous construisons un voisinage du diviseur trouvé D^* (cf. (7)) par saturation d'un disque transverse Σ . Cela se fait à partir de choix de chemins convenables dans D^* qui évitent certaines coupures. Il nous faut ensuite compléter la construction en recollant le voisinage obtenu, avec un voisinage de chaque branche morte \mathfrak{M}_j . Malheureusement nous ne pouvons plus maintenant évoquer le théorème de type Van Kampen, car l'hypersurface de collage ne satisfait pas à l'hypothèse d'incompressibilité du bord. En fait, l'adjonction d'un voisinage de branche morte crée des relations dans le groupe fondamental du bloc ainsi constitué. C'est ce phénomène qui nous empêche de considérer cette construction comme deux étapes de la construction de proche en proche que nous effectuons. Pour la même raison, nous ne pouvons pas simplifier l'ensemble de la preuve du théorème principal en raisonnant par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires à la désingularisation de S . Il suffit pour s'en convaincre d'analyser le cas où la séparatrice S est la courbe d'équation $y^2 - x^3 = 0$. Ainsi la deuxième étape consistera à construire des voisinages convenables de chaque \mathfrak{M}_j . Nous y démontrerons aussi les propriétés de ces voisinages (5.1.3) qui nous seront utiles par la suite. La plus remarquable de celles-ci est l'existence d'une fibration de Seifert naturelle, d'où le nom donné à ce type de blocs. Enfin dans la troisième étape, nous réduisons la preuve de (3.2.1) à celle de la 1-connexité feuilletée du bord du bloc que nous venons de construire (5.1.5). Cette dernière propriété est démontrée au paragraphe 5.3. Pour ce faire, nous introduisons préalablement dans la section 5.2 quelques constructions et descriptions auxiliaires, qui seront utilisées dans la preuve de (5.1.5). Ce sont :

- A. un revêtement ramifié ρ qui trivialise la fibration de Seifert introduite au paragraphe précédent ;

- B. un graphe adapté au revêtement ramifié ρ ;
- C. une description explicite des feuilles de l'image réciproque par ρ du feuilletage initial.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous donnons une extension du résultat principal et quelques applications. Dans la section 6.1, nous montrons l'existence (6.1.1) de courbes transverses au feuilletage qui sont 1-connexes feuilletées. Cette propriété nous permet, après passage au revêtement universel de $U \setminus S$, de munir l'espace des feuilles d'une structure de variété holomorphe de dimension 1, peut-être non-séparée (section 6.2). Le groupe fondamental $\pi_1(U \setminus S)$ agit par automorphismes holomorphes sur cette variété. Le quotient de cette action s'identifie à l'espace des feuilles de \mathcal{F}_ω sur $U \setminus S$. Nous obtenons de cette manière un nouvel invariant analytique, que nous appelons « représentation de monodromie du feuilletage » (6.2.1). Dans la section 6.3, nous mettons aussi en évidence des relations entre les notions introduites ici et les définitions et résultats d'un travail récent [16] concernant une extension du concept de représentation d'holonomie d'un feuilletage singulier.

Nous remercions P. Sad pour les nombreuses conversations que nous avons eues avec lui sur la classification topologique des feuilletages. Nous remercions aussi le rapporteur, dont les suggestions nous ont permis de remanier sensiblement la structure du texte initial, le rendant ainsi nettement plus lisible.

1. Notions de connexité feuilletée

1.1. Notations et vocabulaire

Dans ce qui suit, nous désignerons indifféremment par \mathbb{D}_r ou $\mathbb{D}(r)$ le disque ouvert de rayon $r > 0$, centré à l'origine de \mathbb{C} . Nous noterons aussi $\mathbb{D}_r^* = \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$. Dans tout le texte, *homotopie de chemins* signifiera homotopie de chemins à extrémités fixes. Si A est un sous-ensemble d'une variété M , nous désignerons par $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble de ses points intérieurs et nous appellerons *bord de A* l'ensemble $\partial A := A \setminus \overset{\circ}{A}$.

1.2. Notions de 0- et 1-connexité feuilletée

De manière générale, nous considérons une variété différentiable M munie d'un feuilletage régulier \mathcal{F} de classe C^1 . Nous désignerons aussi par \mathcal{F} l'ensemble des feuilles de ce feuilletage. Pour tout sous-ensemble A de M , $\mathcal{F}|_A$ désignera la collection des composantes connexes des intersections $L \cap A$, $L \in \mathcal{F}$, des feuilles de \mathcal{F} avec A . Pour $A \subset B$, nous désignons par $Sat_{\mathcal{F}}(A, B)$ et appelons *saturé de A dans B par \mathcal{F}* , le sous-ensemble :

$$(4) \quad Sat_{\mathcal{F}}(A, B) := \bigcup_{L \in \mathfrak{A}} L \subset B, \quad \mathfrak{A} := \{L \in \mathcal{F}|_B / L \cap A \neq \emptyset\}.$$

Nous dirons que A est \mathcal{F} -saturé dans B , si $Sat_{\mathcal{F}}(A, B) = A$.

Soient A, B deux sous-ensembles de M , avec $A \subset B$.

DÉFINITION 1.2.1. – *Nous dirons que A est 0- \mathcal{F} -connexe dans B et nous noterons $A \overset{\mathcal{F}}{\oplus} B$, si, pour tout $L \in \mathcal{F}|_B$, l'application $\pi_0(L \cap A) \rightarrow \pi_0(A)$ induite par l'inclusion de $L \cap A$ dans A est injective, i.e. pour tout chemin $a : [0, 1] \rightarrow A$ d'extrémités dans $L \cap A$, il existe un chemin $b : [0, 1] \rightarrow L \cap A$ de mêmes extrémités que a. Nous dirons aussi que A est strictement*

0- \mathcal{F} -connexe dans B , si A est à la fois 0- \mathcal{F} -connexe dans B et incompressible dans B , i.e. l'inclusion naturelle de A dans B induit un morphisme injectif des groupes fondamentaux $\pi_1(A, p) \hookrightarrow \pi_1(B, p)$, pour chaque $p \in A$.

Pour $K \subset B$, notons $\mathcal{H}(K)$ l'ensemble des classes d'homotopie des chemins tracés dans K , i.e. $\mathcal{H}(K)$ est le quotient de $C^0([0, 1], K)$ par la relation d'équivalence $a \sim_K b : \Leftrightarrow$ il existe $H : [0, 1]^2 \rightarrow K$ continue telle que : $H(0, t) = a(t)$, $H(1, t) = b(t)$, $H(s, 0) = a(0) = b(0)$ et $H(s, 1) = a(1) = b(1)$ pour tout $s, t \in [0, 1]$.

DÉFINITION 1.2.2. – Nous dirons que A est 1- \mathcal{F} -connexe dans B et nous noterons $A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B$, si, pour toute feuille $L \in \mathcal{F}$, $L \cap A \neq \emptyset$, la suite suivante est exacte :

$$\mathcal{H}(L \cap A) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}(A) \times \mathcal{H}(L \cap B) \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} \mathcal{H}(B),$$

avec $\alpha([c]_{L \cap A}) := ([c]_A, [c]_{L \cap B})$, $\beta_1([a]_A, [b]_{L \cap B}) := [a]_B$ et $\beta_2([a]_A, [b]_{L \cap B}) := [b]_B$. Nous dirons aussi que A est strictement 1- \mathcal{F} -connexe dans B , si $A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B$ et A est incompressible dans B .

Explicitement $A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B$ signifie que pour toute paire de chemins $a : [0, 1] \rightarrow A$ et $b : [0, 1] \rightarrow L \cap B$ tels que $a \sim_B b$, il existe un chemin $c : [0, 1] \rightarrow L \cap A$ tel que $c \sim_A a$ et $c \sim_{L \cap B} b$.

REMARQUE 1.2.3. – Soient (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée et $A \subset B$ des sous-ensembles de M . Les assertions suivantes sont immédiates :

(i) La relation $A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B$ entre parties de M est transitive :

$$A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B \quad \text{et} \quad B \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 C \quad \implies \quad A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 C,$$

et il en est de même des relations de 1- \mathcal{F} -connexité stricte, de 0- \mathcal{F} -connexité et de 0- \mathcal{F} -connexité stricte.

- (ii) Si A est réduit à un point, $A = \{p\}$, alors $A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B$ si et seulement si la feuille L_p de $\mathcal{F}|_B$ qui passe par p est incompressible dans B , i.e. le morphisme $\iota_* : \pi_1(L_p, p) \hookrightarrow \pi_1(B, p)$, induit par l'application d'inclusion $\iota : L_p \hookrightarrow B$, est injectif.
- (iii) A est 1- \mathcal{F} -connexe dans B si et seulement si chacune de ses composantes connexes est 1- \mathcal{F} -connexe dans B ,
- (iv) Si A est \mathcal{F} -saturé et incompressible dans B , alors $A \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 B$.

PROPOSITION 1.2.4. – Soit \mathcal{F} un feuilletage sur M de dimension réelle 1, défini par un champ de vecteurs ne possédant pas d'orbite périodique; alors tout ouvert A strictement 0- \mathcal{F} -connexe dans M est 1- \mathcal{F} -connexe dans M .

Preuve. – Soient $a : [0, 1] \rightarrow A$ et $b : [0, 1] \rightarrow L \cap B$ tels que $a \sim_B b$. Grâce à la 0- \mathcal{F} -connexité de A dans B , il existe $c : [0, 1] \rightarrow L \cap A$ de mêmes extrémités que a (et que b). Comme \mathcal{F} ne possède pas d'orbites périodiques, chaque composante connexe de $L \cap B$ est simplement connexe et l'on a : $c \sim_{L \cap B} b$. D'où $c \sim_B a$. Les images de a et de b sont contenues dans A et A est incompressible dans B . Ainsi $c \sim_A a$. \square

1.3. Un théorème de type Van Kampen

Soit T une sous-variété fermée de codimension réelle 1, non-nécessairement connexe, transversalement orientable, d'une variété réelle différentiable M et soit \mathcal{F} un feuilletage (réel) régulier de classe C^1 sur M . Considérons deux sous-ensembles connexes V_1, V_2 de M dont l'intersection est T et dont l'union V est un voisinage de T :

$$T = V_1 \cap V_2 \subset W \subset V := V_1 \cup V_2, \quad W \subset M \text{ ouvert.}$$

THÉORÈME 1.3.1. – *Supposons que T est transverse à \mathcal{F} et est strictement 1- \mathcal{F} -connexe dans V_1 ainsi que dans V_2 , i.e.*

$$T \pitchfork \mathcal{F}, \quad T \stackrel{1}{\pitchfork}_{\mathcal{F}} V_i, \quad \pi_1(T, *) \hookrightarrow \pi_1(V_i, *), \quad i = 1, 2.$$

Alors V_1 et V_2 sont tous deux strictement 1- \mathcal{F} -connexes dans V :

$$V_i \stackrel{1}{\pitchfork}_{\mathcal{F}} V, \quad \pi_1(V_i, *) \hookrightarrow \pi_1(V, *), \quad i = 1, 2.$$

Preuve. – L'idée consiste en une « chirurgie » d'homotopies que nous allons préciser. Pour montrer les relations $V_i \stackrel{1}{\pitchfork}_{\mathcal{F}} V$, $i = 1, 2$, considérons dans V une homotopie H entre un chemin a tracé dans V_i dont les extrémités sont dans une même feuille L de $\mathcal{F}|_V$ et un chemin b tracé dans L . Au voisinage de tout compact de T , le feuilletage est un produit de la restriction $\mathcal{F}|_T$ avec un intervalle réel ; ainsi nous ne restreignons pas la généralité de la démonstration en supposant que le chemin a est tracé dans $V_i \setminus T$. La feuille L est transverse à T et quitte à effectuer une petite homotopie dans L nous supposons b différentiable et transverse à T . Ainsi, nous pouvons aussi approcher H par une homotopie différentiable qui est génériquement transverse à T . En conséquence $H^{-1}(T)$ est une union finie disjointe de courbes de classe C^1 fermées et proprement plongées dans $[0, 1] \times [0, 1]$. Désignons par $\mathcal{I}(H; T)$ l'ensemble des composantes connexes de $H^{-1}(T)$ homéomorphes à un segment (dont les extrémités appartiennent nécessairement au bord de $[0, 1] \times [0, 1]$) et par $\mathcal{J}(H; T)$ l'ensemble des composantes connexes de $H^{-1}(T)$ qui sont des courbes de Jordan. Munissons ces courbes de leur paramétrisation par abscisse curviligne. Comme $\delta \in \mathcal{J}(H; T)$ ne coupe pas le *bord horizontal* $[0, 1] \times \{0, 1\}$ de $[0, 1] \times [0, 1]$, nous noterons $\Delta_{\delta}^{\text{ext}}$, resp. $\Delta_{\delta}^{\text{int}}$, la *composante connexe extérieure*, resp. *intérieure* de $([0, 1] \times [0, 1]) \setminus |\delta|$, c'est-à-dire celle qui contient, resp. qui ne contient pas, $[0, 1] \times \{0, 1\}$. D'autre part nous dirons que $\theta \in \mathcal{I}(H; T)$ est un *élément extrémal* de $\mathcal{I}(H, T)$, si ses extrémités sont situées sur $\{1\} \times [0, 1]$ et s'il est homotope dans le complémentaire de $H^{-1}(T) \setminus |\theta|$ à un chemin situé sur $\{1\} \times [0, 1]$. Dans ce cas, nous noterons ses extrémités $(0, s_0(\theta)), (0, s_1(\theta))$, et nous orienterons θ pour avoir $s_0(\theta) \geq s_1(\theta)$. Désignons par α_{θ} la paramétrisation naturelle de l'intervalle $[s_1(\theta), s_0(\theta)]$. Visiblement le lacet simple $\delta_{\theta} := \theta \vee \alpha_{\theta}$ borde un disque conforme ; notons $\Delta_{\theta}^{\text{int}}$ l'intérieur de ce disque et $\Delta_{\theta}^{\text{ext}} := ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \overline{\Delta_{\theta}^{\text{int}}}$ son extérieur.

Nous dirons qu'une homotopie H' entre les chemins a et b est obtenue à partir de H par *chirurgie le long d'un lacet simple* δ' qui ne coupe pas le bord horizontal de $[0, 1] \times [0, 1]$, si l'on a l'égalité des restrictions :

$$H|_{\Delta_{\delta'}^{\text{ext}}} = H'|_{\Delta_{\delta'}^{\text{ext}}}.$$

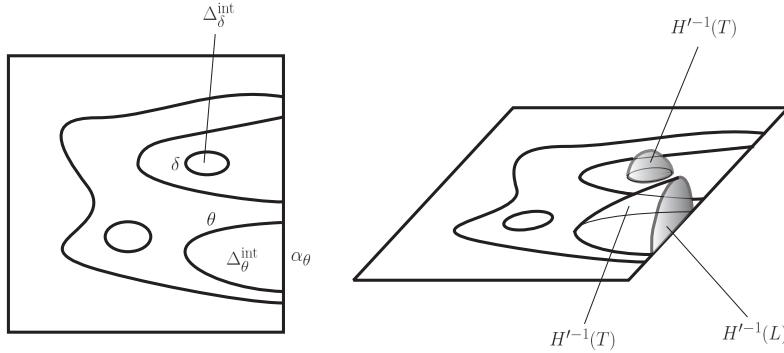


FIGURE 1. Chirurgie d'homotopies.

Soit Ω une sous-variété (non-nécessairement fermée) contenue dans l'adhérence d'une composante connexe de $V \setminus T$. On montre très facilement les assertions suivantes :

- (CH1) Si $\delta \in \mathcal{J}(H; T)$ vérifie $H(|\delta|) \subset \Omega$ et est homotope dans Ω à un point, alors il existe une homotopie H' obtenue par chirurgie le long de δ telle que $H'(\Delta_\delta^{\text{int}}) \subset \Omega$.
- (CH2) Soit $\theta \in \mathcal{I}(H; T)$ un chemin extrémal vérifiant $H(|\theta|) \subset \Omega$ et homotope dans Ω à un chemin η . Considérons le chemin a' égal à η en restriction à α_θ et égal à a en restriction à $[0, 1] \setminus \alpha_\theta$. Alors il existe une homotopie H' entre a et a' , obtenue par chirurgie le long de θ , telle que $H'(\Delta_\theta^{\text{ext}}) \subset \Omega$.

Raisonnons par récurrence sur l'entier $N(H, T) := \#\mathcal{J}(H, T) + \#\mathcal{I}(H, T)$. Lorsque $N(H, T) = 0$, le chemin b est contenu dans V_i et le résultat est trivial. Supposons $N(H, T) = N + 1$ et le théorème vérifié pour $N(H, T) \leq N$. Distinguons deux cas suivant que $\mathcal{J}(H, T)$ est vide ou non.

Premier cas : $\mathcal{J}(H, T) \neq \emptyset$. – Il existe visiblement une courbe de Jordan $\delta \in \mathcal{J}(H, T)$, telle que $\Delta_\delta^{\text{int}}$ n'intersecte aucun élément de $\mathcal{I}(H, T) \cup \mathcal{J}(H, T)$. Visiblement on a :

$$H(\delta) \subset T, \quad H(\Delta_\delta^{\text{int}}) \subset V_j \quad \text{et} \quad H(\Delta_\delta^{\text{ext}}) \subset V_k, \quad \text{avec} \quad \{j, k\} = \{1, 2\}.$$

Comme T est incompressible dans V_j , le lacet δ est homotope à un point dans T . La propriété (CH1) donne une homotopie H' telle que $H'(\overline{\Delta}_\delta^{\text{int}}) \subset T$. De plus $\{\overline{\Delta}_\delta^{\text{int}}\} \cup \mathcal{I}(H, T) \cup \mathcal{J}(H, T) \setminus \{\delta\}$ est la collection des composantes connexes de $H'^{-1}(T)$. Comme T est transverse à \mathcal{F} et transversalement orientable, on peut se donner au voisinage de $H'(\Delta_\delta^{\text{int}})$ un champ de vecteurs différentiable Z à support compact tel que :

- (i) $H'(\overline{\Delta}_\delta^{\text{int}}) \subset \text{supp}(Z) \subset W$, ouvert de $V_1 \cup V_2$ contenant T ,
- (ii) $Z(z)$ est transverse à T et pointe vers V_k , pour $z \in H'(\overline{\Delta}_\delta^{\text{int}})$,
- (iii) $\text{supp}(Z) \cap H(\lambda) = \emptyset$ pour tout $\lambda \in \mathcal{I}(H, T) \cup \mathcal{J}(H, T) \setminus \{\delta\}$.

Le composé H_ϵ de H' avec le flot de Z au temps ϵ définit une homotopie entre a et b qui vérifie : $\mathcal{I}(H_\epsilon, T) = \mathcal{I}(H, T)$ et $\mathcal{J}(H_\epsilon, T) = \mathcal{J}(H, T) \setminus \{\delta\}$ pour un temps $\epsilon > 0$ assez petit. Ceci achève la récurrence, dans ce cas.

Deuxième cas : $\mathcal{J}(H, T) = \emptyset$ et $\mathcal{I}(H, T) \neq \emptyset$. – Il existe alors un élément extrémal θ de $\mathcal{I}(H, T)$ tel que $\Delta_\theta^{\text{int}}$ n'intersecte aucun élément de $\mathcal{I}(H, T)$. Notons encore V_j celui des deux ensembles V_1 ou V_2 qui contient $H(\Delta_\theta^{\text{int}})$ et notons V_k l'autre. Comme $T \xrightarrow[\mathcal{F}]{} V_j$ le chemin α_θ est homotope dans $L \cap V_j$ à un lacet η contenu dans T . L'injection de $\pi_1(T)$ dans $\pi_1(V_j)$ donne une homotopie dans T entre η et α_θ . On conclut grâce à la propriété (CH2) et à l'intégration d'un champ de vecteurs, comme dans le premier cas.

Il reste à montrer les injections des groupes fondamentaux de $\pi_1(V_i)$ dans $\pi_1(V)$, $i = 1, 2$. Elles résultent, d'après le théorème classique de Seifert-Van Kampen, d'un théorème (tout aussi classique) de combinatoire des groupes, qui affirme que la solution universelle du produit fibré contient les facteurs lorsque la base s'injecte dans chacun d'eux, cf. [8], théorème 4.3. page 199. \square

2. Assemblage bord à bord feuilleté

2.1. Définition d'assemblage feuilleté et théorème de localisation

Soit V une variété réelle à bord, non-nécessairement compacte ni connexe, munie d'un feuilletage régulier \mathcal{F}_V de classe C^1 et $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, une famille de sous-variétés de V de même dimension que V , dont les bords $\partial\mathcal{B}_\alpha := \mathcal{B}_\alpha \setminus \overset{\circ}{\mathcal{B}}_\alpha$ sont transversalement orientables.

DÉFINITION 2.1.1. – Nous dirons qu'un élément \mathcal{B}_α est un bloc feuilleté \mathcal{F}_V -adapté s'il satisfait les propriétés suivantes :

- (BF1) chaque composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ est incompressible dans \mathcal{B}_α ,
- (BF2) \mathcal{F}_V est transverse à $\partial\mathcal{B}_\alpha$,
- (BF3) chaque feuille de $\mathcal{F}_{|\mathcal{B}_\alpha}$ est incompressible dans \mathcal{B}_α ,
- (BF4) chaque composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ est 1- \mathcal{F} -connexe dans \mathcal{B}_α .

Nous dirons que $V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ est un assemblage bord à bord des \mathcal{B}_α si, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ la condition (BF1) et la condition supplémentaire suivante sont satisfaites :

(ABB) pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ distincts, l'une des deux éventualités suivante est réalisée : ou bien $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta = \emptyset$, ou bien $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta$ est une composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ et est une composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\beta$.

Si chaque \mathcal{B}_α est \mathcal{F}_V -adapté et si V est un assemblage bord à bord des \mathcal{B}_α , nous dirons que V est un assemblage bord à bord feuilleté.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème (1.3.1).

THÉORÈME 2.1.2 (de localisation). – Si V est un assemblage bord à bord feuilleté des blocs \mathcal{F}_V -adaptés \mathcal{B}_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, alors :

- (L1) chaque feuille de \mathcal{F}_V est incompressible dans V ,
- (L2) chaque union de blocs $V' := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} \mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, est strictement 1- \mathcal{F}_V -connexe dans V et chaque bloc \mathcal{B}_α avec $\alpha \in \mathcal{A}'$ est strictement 1- \mathcal{F}_V -connexe dans V' .

REMARQUE 2.1.3. – Une conséquence immédiate du théorème classique de Seifert-Van Kampen est la suivante. Soient $A \subset A'$, $B \subset B'$ et $A \cap B \subset A' \cap B'$ deux sous-ensembles connexes d'un espace topologique tels que chacune des inclusions précédentes induise un isomorphisme au niveau du groupe fondamental. Alors il est de même pour l'inclusion $A \cup B \subset A' \cup B'$.

Par récurrence sur le nombre de blocs, on déduit de cette remarque la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.4. – *Soient $V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ et $V' = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}'_\alpha$, $\#\mathcal{A} < \infty$, deux assemblages bord à bord. Supposons que, pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, \mathcal{B}'_α est contenu dans \mathcal{B}_α et que l'application d'inclusion induise un isomorphisme $\pi_1(\mathcal{B}'_\alpha, \cdot) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{B}_\alpha, \cdot)$. Alors l'application d'inclusion $V' \hookrightarrow V$ induit aussi un isomorphisme $\pi_1(V', \cdot) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V, \cdot)$.*

REMARQUE 2.1.5. – Supposons que des blocs feuilletés \mathcal{F}_V -adaptés \mathcal{B}_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, vérifient la propriété supplémentaire suivante :

(ABB') *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ distincts $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta$ est ou bien vide, ou bien égal à $\partial \mathcal{B}_\alpha \cap \partial \mathcal{B}_\beta$ et dans ce cas il existe une sous-variété ouverte $\mathcal{B}'_{\alpha\beta}$ de $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta$ qui est strictement 1- \mathcal{F} -connexe dans $(\mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta) \cup \mathcal{B}'_{\alpha\beta}$ et dans $(\mathcal{B}_\beta \setminus \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta) \cup \mathcal{B}'_{\alpha\beta}$.*

Considérons les variétés à bord

$$(5) \quad \mathcal{B}'_\alpha := \left(\mathcal{B}_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta \right) \cup \left(\bigcup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \hat{\times} \mathcal{A}} \mathcal{B}'_{\alpha\beta} \right) \subset \mathcal{B}_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

où $\mathcal{A} \hat{\times} \mathcal{A}$ est l'ensemble des couples (α, β) tels que $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta \neq \emptyset$. Alors $V' := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}'_\alpha$ est un assemblage bord à bord feuilleté des blocs \mathcal{B}'_α , $\alpha \in \mathcal{A}$.

Pour prouver le Théorème Principal énoncé dans l'introduction, nous construirons un voisinage ouvert \mathcal{U} du diviseur total \mathcal{D} tel que $\mathcal{U}^* := \mathcal{U} \setminus \mathcal{D}$ se décompose comme un assemblage bord à bord feuilleté, $\mathcal{U}^* = \bigcup_{\alpha} \mathcal{B}_\alpha$. Le théorème de localisation permet immédiatement d'obtenir la propriété (TP2). Cette construction sera effectuée à partir d'une décomposition appropriée du diviseur \mathcal{D} en blocs fondamentaux $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ qui serviront de « support » aux blocs feuilletés $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Ces blocs \mathcal{B}_α vérifieront des propriétés additionnelles qui seront précisées dans le théorème (3.2.1) et qui nous permettront aussi de prouver les assertions (TP1) et (TP3) du théorème principal.

2.2. Décomposition du diviseur et construction de bonnes fibrations

Comme nous l'avions déjà remarqué dans l'introduction, les hypothèses (H1) portant sur \mathcal{F}_ω impliquent, d'après [3], que le morphisme E de réduction des singularités de \mathcal{F}_ω coïncide avec le morphisme de désingularisation de la *séparatrice totale*, i.e. la courbe S de composantes irréductibles les séparatrices S_1, \dots, S_ℓ de \mathcal{F}_ω . En particulier, les singularités de $\mathcal{F} := E^* \mathcal{F}_\omega$ situées sur le *diviseur exceptionnel* $\mathcal{E} = E^{-1}(0)$ sont exactement les points de croisement du *diviseur total* $\mathcal{D} = E^{-1}(S) = \mathcal{E} \cup \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_\ell$ est la transformée stricte de S par E . Nous reprenons le vocabulaire habituellement utilisé : les composantes irréductibles du diviseur \mathcal{D} seront simplement appelées *composantes* de \mathcal{D} ; la *valence* $v(D)$ d'une composante D de \mathcal{E} est le nombre de singularités de \mathcal{F} situées sur D ; une *chaîne* est une

union connexe maximale de composantes de \mathcal{E} de valence ≤ 2 ; une *branche morte* est une chaîne de composantes possédant une composante de valence 1, appelée *composante d'extrémité*. Deux unions connexes de composantes de \mathcal{D} sont dites *adjacentes*, si leur intersection est non-vide et réduite à un point, appelé *point d'attache*. Nous appellerons *composante simple de \mathcal{E}* , toute composante D de \mathcal{E} qui n'intersecte aucune branche morte, et *bloc agrégé de \mathcal{E}* la réunion (non-triviale)

$$(6) \quad K = D \cup \mathfrak{M}_D$$

d'une composante non-simple D de \mathcal{E} de valence ≥ 3 , appelée *composante centrale* de K , avec l'union \mathfrak{M}_D de toutes les branches mortes adjacentes à D . Visiblement les transformées strictes \mathcal{S}_j , les composantes simples et les blocs agrégés forment un recouvrement de \mathcal{D} en sous-ensembles qui, deux à deux, sont ou bien adjacents, ou bien d'intersection vide.

La combinatoire de la décomposition de \mathcal{D} en blocs agrégés et composantes simples ne dépend en fait que de la séparatrice totale S , puisque \mathcal{D} ne dépend que de S . La proposition suivante énonce en fait une propriété de l'arbre de désingularisation d'une courbe plane. Elle est vraisemblablement bien connue des spécialistes, cf. [5, 18].

PROPOSITION 2.2.1. – *Si le transformé strict d'un germe de feuilletage non-dicritique par une succession d'éclatements qui domine le morphisme de réduction ne possède aucun point singulier de type selle-nœud, alors il existe au plus une composante du diviseur exceptionnel, adjacente à au moins deux branches mortes.*

Lorsqu'elle existe, nous appellerons cette composante la *composante initiale* du diviseur exceptionnel. Remarquons que toute autre composante, ou bien contient (au moins) deux points singuliers de \mathcal{F} qui ne sont pas des points d'attache de branches mortes, ou bien est contenue dans une branche morte. Remarquons aussi que la composante initiale de \mathcal{E} est le centre d'un bloc agrégé.

EXEMPLE 2.2.2. – *La courbe irréductible $y^4 + x^5 + x^4y = 0$ possède deux paires de Puiseux; le diviseur exceptionnel \mathcal{E} de sa désingularisation minimale n'a aucune composante simple mais possède deux blocs agrégés : l'un avec deux branches mortes adjacentes dont la composante centrale est la composante initiale, l'autre avec une seule branche morte adjacente.*

En chaque point singulier $s \in \mathcal{D}$ de \mathcal{F} , nous nous fixons maintenant des coordonnées $(x_s, y_s) : \Omega(s) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(2) \times \mathbb{D}(2)$ telles que $x_s y_s = 0$ soit une équation de $\mathcal{D} \cap \Omega(s)$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- si le germe \mathcal{F}_s de \mathcal{F} en s est linéarisable, alors il est défini par un champ de vecteurs linéaires dans ces coordonnées $X_s = x_s \frac{\partial}{\partial x_s} - \lambda y_s \frac{\partial}{\partial y_s}$,
- si \mathcal{F}_s est résonant non-linéarisable, alors il est défini par une 1-forme différentielle du type forme normale de Dulac : $x_s dy_s + y_s (\lambda + x_s y_s (\dots)) dx_s$, $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$, cf. [11].

Si D est une composante de \mathcal{D} qui contient s , alors nous notons :

$$D_s := D \cap \{|x_s| < 1, |y_s| < 1\}.$$

Visiblement D_s est un disque conforme ouvert. Quitte à composer les coordonnées construites par des homothéties appropriées, nous supposons que deux disques fermés \overline{D}_s et $\overline{D}_{s'}$ contenus dans une même composante D ne s'intersectent jamais.

Considérons une composante D de \mathcal{D} et désignons par $s_j, j = 1, \dots, v(D)$ les points singuliers de \mathcal{F} situés sur D . Supposons, pour simplifier l'écriture, qu'en chaque point, $y_{s_j} = 0$ est l'équation locale de D en s_j . Nous noterons

$$(7) \quad D^* := D \setminus \bigcup_{j=1}^{v(D)} D_{s_j}.$$

On sait qu'il existe une fibration holomorphe en disques $\underline{\pi}_D$ localement triviale, définie sur un voisinage ouvert $\underline{\Omega}_D$ de D et à valeurs dans D , qui est l'identité en restriction à D . Pour chaque $j = 1, \dots, v(D)$, nous construisons sans difficulté une submersion surjective π_{D,s_j} de classe C^∞ , définie sur $\Omega(s_j)$ et à valeurs sur $D \cap \{|x_{s_j}| < 2\}$, qui est égale à $\underline{\pi}_D$ en restriction à $\underline{\Omega}_D \cap \Omega(s_j) \cap \{|x_{s_j}| > \frac{3}{2}\}$ et est égale à la projection x_{s_j} en restriction à $\Omega(s_j) \cap \{|x_{s_j}| < 1\}$. Par des recollements appropriés, nous obtenons une fibration en disques

$$(8) \quad \pi_D : \Omega(D) \longrightarrow D,$$

de classe C^∞ définie sur un voisinage ouvert $\Omega(D)$ de D , égale à l'identité en restriction à D et telle que, pour chaque $j = 1, \dots, v(D)$, on ait :

- (i) $\pi_D^{-1}(D_{s_j}) \subset \Omega(s_j)$ et en restriction à cet ouvert π_D est égal à la projection x_{s_j} ,
- (ii) $\pi_D^{-1}(D^{**}) = \underline{\pi}_D^{-1}(D^{**})$ avec $D^{**} := D \setminus \bigcup_{j=1}^{v(D)} \{|x_{s_j}| < 2\}$; de plus, en restriction à cet ouvert π_D est égal à $\underline{\pi}_D$.

Nous allons maintenant définir une « bonne décomposition » du diviseur \mathcal{D} en compacts connexes que nous appellerons blocs fondamentaux. Ceux-ci seront constitués de blocs plus petits, appelés blocs élémentaires. Nous reprenons les notations de l'introduction : f est une équation réduite de la séparatrice totale S , $T_\eta = f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0}$, $\mathcal{T}_\eta = E^{-1}(T_\eta)$ et $F = f \circ E$, E désignant l'application de réduction.

Désignons par $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ la collection de toutes les courbes de la forme ∂D_s , où s est une singularité de \mathcal{F} , D est une composante de \mathcal{D} et $s \in D$. Un *bloc élémentaire de \mathcal{D}* est l'adhérence d'une composante connexe de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{J}$. Nous désignons par \mathfrak{A} la collection de ces blocs. L'hypersurface analytique réelle

$$(9) \quad \mathcal{H} := \bigcup_{D \subset \mathcal{D}} \pi_D^{-1}(\mathcal{J} \cap D)$$

est visiblement lisse et transverse à \mathcal{D} . Il existe un nombre $\eta_1 > 0$ appelé *hauteur d'uniformité*, tel que pour tout $\eta \in]0, \eta_1]$, l'ensemble des adhérances des composantes connexes de $T_\eta \setminus \mathcal{H}$, que nous appellerons *blocs de Milnor*, est en correspondance biunivoque avec \mathfrak{A} . Plus précisément, si η est assez petit, \mathcal{H} est transverse aux fibres $F^{-1}(z)$, $|z| \leq \eta$. Ainsi, pour chaque $A \in \mathfrak{A}$, il existe un unique bloc de Milnor $\mathcal{T}_\eta(A) \subset T_\eta$ contenant $A \subset \mathcal{D}$; de plus la restriction de F à $\mathcal{T}_\eta^*(A) := \mathcal{T}_\eta(A) \setminus A$ est une fibration sur le disque épointé $\mathbb{D}(\eta)^*$. Si $B = \bigcup_i A_i \subset \mathcal{D}$ est une réunion de blocs élémentaires de \mathcal{D} nous noterons aussi $\mathcal{T}_\eta(B) = \bigcup_i \mathcal{T}_\eta(A_i)$ et $\mathcal{T}_\eta^*(B) = \mathcal{T}_\eta(B) \setminus \mathcal{D}$.

REMARQUE 2.2.3. — Pour toute réunion B de blocs élémentaires de \mathcal{D} et pour $0 < \eta' \leq \eta \leq \eta_1$, les inclusions $\mathcal{T}_{\eta'}^*(B) \subset \mathcal{T}_\eta^*(B)$ et $\partial \mathcal{T}_{\eta'}^*(B) \subset \partial \mathcal{T}_\eta^*(B)$ induisent des isomorphismes au niveau du groupe fondamental. En fait, en utilisant les techniques décrites dans le théorème (5.1.5) et la proposition (9.3.2) de [18], on peut construire pour chaque bloc élémentaire

un champ de vecteurs dont le flot induit des rétractions par déformation entre les blocs de Milnor de hauteurs η' et η . On conclut en appliquant la remarque (2.1.3).

Notons que la collection $\{\mathcal{T}_\eta(A)\}_{A \in \mathfrak{A}}$ ne définit pas un assemblage bord à bord, parce que la condition (BF1) de la définition (2.1.1) n'est pas toujours vérifiée. Plus précisément, si D est une composante de valence 1, alors le bord de $\mathcal{T}_\eta^*(D^*)$ n'est pas incompressible. Cette situation nous conduit à décomposer \mathcal{D} en des blocs plus grands, qui seront des unions de blocs élémentaires.

DÉFINITION 2.2.4. – *Soit \mathcal{J}' le sous-ensemble de \mathcal{J} formé des courbes ∂D_s , où s est une singularité qui n'est pas située dans une branche morte, D est une composante de \mathcal{D} et $s \in D$. Nous appelons bloc fondamental de \mathcal{D} , toute adhérence d'une composante connexe de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{J}'$.*

La collection $\mathcal{K} := \{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ des blocs fondamentaux peut être indexée par l'ensemble \mathcal{A} dont les éléments sont : les singularités de \mathcal{F} sur \mathcal{D} qui n'appartiennent à aucune branche morte, les composantes simples de \mathcal{E} , les transformées strictes des séparatrices et les composantes centrales des blocs agrégés de \mathcal{E} . En effet un élément de \mathcal{K} peut être :

- (i) le bloc élémentaire $K_s = \overline{D_s} \cup \overline{D'_s}$, si $s \in D \cap D'$ est une singularité de \mathcal{F} qui n'est pas située sur une branche morte ;
- (ii) le bloc élémentaire $K_D = D^*$, si D est une composante simple de \mathcal{E} ou une composante de la transformée stricte des séparatrices ;
- (iii) la réunion connexe de blocs élémentaires $K_D = D^\sharp \cup \mathfrak{M}_D$ si D est la composante centrale d'un bloc agrégé $\mathfrak{D} = D \cup \mathfrak{M}_D$ de \mathcal{E} , où

$$(10) \quad D^\sharp := D^* \cup \bigcup_{s \in \mathfrak{M}_D \cap D} \overline{D_s}$$

et où \mathfrak{M}_D désigne encore la réunion des branches mortes adjacentes à D . Nous pourrions aussi définir K_D de façon équivalente comme la différence : $\mathfrak{D} \setminus \bigcup_{s \notin \mathfrak{M}_D \cap D} D_s$.

Remarquons que l'intersection de deux blocs fondamentaux K_α et $K_{\alpha'}$ est ou bien vide, ou bien difféomorphe à un cercle, celui-ci étant une composante connexe commune de $\partial K_{\alpha'}$ et de ∂K_α . Notons aussi que \mathcal{T}_η^* est bien un assemblage bord à bord des blocs de Milnor $\{\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

3. Réduction de la preuve du théorème principal

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la propriété (TP2) du théorème principal résulte immédiatement de l'assertion (L1) du théorème de localisation, une fois construit un assemblage bord à bord feuilletté

$$U^* := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha, \quad \overline{\mathcal{B}_\alpha} \supset K_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

où $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ désigne la collection des blocs fondamentaux de \mathcal{D} que nous venons de définir. Si de plus cette collection satisfait la propriété (ABB') de la remarque (2.1.5), la propriété (TP1) du théorème principal sera elle aussi satisfaite. Mais pour cela il nous faut un contrôle assez fin de la topologie de chaque \mathcal{B}_α et en particulier de chaque bord $\partial \mathcal{B}_\alpha$. Pour quantifier

ce contrôle, nous introduisons au paragraphe qui suit la notion d'ensemble de type suspension, ainsi que les notions de taille et de rugosité d'un tel ensemble.

3.1. Notions de taille et rugosité d'ensembles de type suspension

Pour chaque composante connexe \mathcal{C} du bord d'un bloc fondamental K_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, donnons-nous un champ de vecteurs réel régulier $Z_{\mathcal{C}}$ qui définit le feuilletage $\mathcal{F}_{|\pi_D^{-1}(\mathcal{C})}$, D désignant la composante de \mathcal{D} qui contient \mathcal{C} . En chaque point $P \in \mathcal{C}$ est défini un germe de fonction « temps de premier retour » $\tau_P : \pi_D^{-1}(P) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ qui, pour tout $m \in \pi_D^{-1}(P)$ suffisamment proche de P , vérifie les propriétés suivantes :

$$\Phi_t^{Z_{\mathcal{C}}}(m) \in \pi_D^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{P\}) \quad \text{pour } 0 < t < \tau_P(m) \quad \text{et} \quad \Phi_{\tau_P(m)}^{Z_{\mathcal{C}}}(m) \in \pi_D^{-1}(P),$$

$\Phi_t^{Z_{\mathcal{C}}}$ désignant le flot de $Z_{\mathcal{C}}$.

DÉFINITION 3.1.1. – *Nous dirons qu'un ensemble $V \subset \pi_D^{-1}(\mathcal{C})$ est de type suspension au-dessus de \mathcal{C} , s'il existe un point $P \in \mathcal{C}$ et un disque conforme ouvert $\Sigma \subset \pi_D^{-1}(P)$ contenant P , tel qu'en notant $\Sigma := \Sigma \setminus \{P\}$ on ait :*

$$V = V_\Sigma := \left\{ \Phi_t^{Z_{\mathcal{C}}}(m) / m \in \Sigma, 0 \leq t \leq \tau_P(m) \right\}.$$

Remarquons que le germe de l'application $h : (\Sigma, P) \rightarrow (\Sigma, P)$ définie par $m \mapsto h(m) := \Phi_{\tau_P(m)}^{Z_{\mathcal{C}}}(m)$ est exactement l'holonomie de \mathcal{F} le long du lacet \mathcal{C} , réalisée sur la transversale (Σ, P) . Il est clair qu'une fois fixée la projection π_D , la définition de la suspension V_Σ , comme celle de l'holonomie h , peut être donnée sans faire appel au champ $Z_{\mathcal{C}}$. Celui-ci n'a été utilisé ici qu'afin de simplifier l'exposition.

Pour que chaque V_Σ soit le bord d'un bloc feuilleté adapté et pour ne pas introduire de « topologie artificielle » dans l'assemblage $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, il est naturel d'exiger que la topologie de V_Σ soit la plus simple possible : celle d'un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Pour cela il faut que $h(\Sigma) \cap \Sigma$ soit connexe ; sinon, V_Σ aurait le type d'homotopie d'un tore auquel serait attaché un bouquet de cercles et la propriété (TP1) du théorème principal ne serait pas satisfaite. La notion de rugosité que nous introduisons ici permet de contrôler le caractère étoilé des domaines Σ et $h(\Sigma)$, ce qui garantit la connexité de leur intersection.

Notons, pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$(11) \quad [[z]] := \begin{cases} |\theta|, & \text{si } z = |z| e^{i\theta}, \text{ avec } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[, \\ +\infty, & \text{si } z = |z| e^{i\theta}, \text{ avec } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

Tout d'abord considérons un chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ analytique et *lisse*, i.e. $\gamma'(s) \neq 0$. Pour tout $s \in [0, 1]$ nous notons :

$$\mathbf{e}(\gamma; s) := \left[\left[\frac{\gamma'(s)}{i \gamma(s)} \right] \right].$$

Cette quantité « mesure » l'angle de la courbe orientée $\text{Im}(\gamma) := \gamma([0, 1])$ avec la tangente au cercle de centre 0 passant par $\gamma(s)$.

Appelons ici *chemin analytique lisse par morceaux* (a.l.p.m. en abrégé) tout chemin $\mu = \mu_1 \vee \dots \vee \mu_p$ qui est une concaténation de chemins analytiques lisses μ_j tels que chaque intersection $\text{Im}(\mu_i) \cap \text{Im}(\mu_j)$, $1 \leq i < j \leq p$, est : ou bien un ensemble discret, ou bien une courbe simple sur laquelle les orientations de μ_i et de μ_j coïncident.

DÉFINITION 3.1.2. – Nous appelons rugosité de μ au point $\mu(s)$ et notons encore $\mathbf{e}(\mu; s)$, le maximum des limites à gauche et à droite en s de $\mathbf{e}(\mu; t)$. Nous appelons rugosité de μ , l’élément $\mathbf{e}(\mu) := \max\{\mathbf{e}(\mu; s) / s \in [0, 1]\}$ de $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

REMARQUE 3.1.3. – Remarquons que $\mathbf{e}(\mu)$ ne dépend que de la courbe orientée $\text{Im}(\mu)$. Notons aussi que, si $\mathbf{e}(\gamma; s) < +\infty$, alors $\mathbf{e}(\gamma^{-1}; s) = +\infty$. Si $\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ est une courbe a.l.p.m. non-orientée, nous définissons :

$$\mathbf{e}(\Gamma) := \inf\{\mathbf{e}(\Gamma^+), \mathbf{e}(\Gamma^-)\},$$

où Γ^+ et Γ^- sont les deux orientations de Γ .

Il est clair qu’un domaine de \mathbb{C} simplement connexe $\Delta \ni 0$, de bord une courbe a.l.p.m., est étoilé par rapport à l’origine, dès que $\mathbf{e}(\partial\Delta)$ est fini. D’autre part, pour deux domaines Δ, Δ' contenant l’origine, nous avons :

$$(12) \quad \mathbf{e}(\partial(\Delta \cap \Delta')) \leq \max\{\mathbf{e}(\partial\Delta), \mathbf{e}(\partial\Delta')\}.$$

Plus généralement, supposons μ tracée dans une variété analytique réelle M , non-nécessairement connexe. Soit ξ une fonction \mathbb{R} -analytique, définie sur un voisinage ouvert de $\text{Im}(\mu)$ et à valeurs dans \mathbb{C}^* , telle que $\xi \circ \mu$ ne soit pas constant. Visiblement, la courbe $\xi \circ \mu$ est aussi a.l.p.m. Nous appelons ξ -rugosité de μ , l’élément

$$\mathbf{e}_\xi(\mu) := \mathbf{e}(\xi \circ \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Nous adoptons dans tout le texte les notations suivantes :

$$(13) \quad \|\mu\|_\xi := \max_{s \in [0, 1]} |\xi \circ \mu(s)|, \quad \{\theta\} := \begin{cases} |\theta| & \text{si } \theta \in]-\pi/2, +\pi/2[\\ +\infty & \text{si } \theta \notin]-\pi/2, +\pi/2[. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.1.4. – Si $V = V_\Sigma$ est un ouvert de type suspension, nous appelons rugosité de V et nous notons $\mathbf{e}_F(V)$, la F -rugosité du bord de $\overline{\Sigma}$, où $F = f \circ E$. De même nous appelons taille de V , le réel $\|V\|_F := \|\Sigma\|_F$. Nous appellerons aussi fonction de contrôle, la donnée suivante :

$$\mathbf{c}(V) := \max\{\mathbf{e}_F(V), \|V\|_F\}.$$

Maintenant supposons que μ est tracé sur un secteur fermé

$$\overline{S}_{R, \alpha, \beta} := \{r e^{i\theta} / 0 < r \leq R, \alpha \leq \theta \leq \beta\} \subset \widetilde{\mathbb{C}}, \quad 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi,$$

du revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}}$ de \mathbb{C}^* . Considérons une application holomorphe g définie sur un secteur ouvert $S_{R', \alpha', \beta'}$ contenant $\overline{S}_{R, \alpha, \beta}$ et qui possède sur ce secteur un développement asymptotique s’écrivant $g(z) := \sum_{j=\nu}^{\infty} c_j z^{j/p}$, avec $\nu \geq 1, p \in \mathbb{N}^*$, cf. [19].

PROPOSITION 3.1.5. – Il existe une constante $C_g > 0$, dépendant continuement de g , telle que :

$$\mathbf{e}_g(\mu) \leq \{\mathbf{e}_z(\mu) + C_g \|\mu\|_z\}, \quad \|\mu\|_g \leq C_g \|\mu\|_z.$$

Preuve. — La seconde inégalité est facile. Pour prouver la première inégalité, on peut supposer μ lisse et $c_\nu \neq 0$. On a :

$$(14) \quad \frac{(g \circ \mu)'}{i \cdot g \circ \mu} = \psi \circ \mu \cdot \frac{\mu'}{i\mu}, \quad \text{avec } \psi(z) := \frac{z g'(z)}{g(z)}.$$

Classiquement [19] lorsque z tend vers 0 sur $S_{R,\alpha,\beta}$, la fonction $\psi(z)$ possède un développement asymptotique du type $\nu/p + o(1)$. Ainsi $\psi(z)$ tend vers $\nu/p \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $|\arg(\psi(z))| \leq C'|z|$, pour une constante $C' > 0$ appropriée et pour $|z|$ assez petit, disons $|z| \leq C_1$. Toute constante $C_g > 0$ telle que $C_g \geq C'$ et $C_g C_1 > \pi/2$ convient. On en déduit sans peine la majoration désirée. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si g dépend continuement d'un paramètre, on peut choisir la constante C_g dépendant continuement de ce paramètre. \square

Quitte à restreindre R l'application g possède une « réciproque » g^{-1} définie sur un secteur $S_{R'',\alpha'',\beta''} \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ et à valeurs sur un ouvert de $S_{R',\alpha',\beta'}$ contenant $\overline{S}_{R,\alpha,\beta}$. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.1.6. — *Il existe une constante $C'_g > 0$ dépendant continuement de g , telle que :*

$$e_z(\mu) \leq \{ e_g(\mu) + C'_g \|\mu\|_g \}, \quad \|\mu\|_z \leq C'_g \|\mu\|_g.$$

3.2. Blocs feuilletés adaptés de taille et de rugosité contrôlées

Dans cette section, nous préciserons les propriétés des blocs feuilletés $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{T}_{\eta_0}^*(K_\alpha)$ associés aux blocs fondamentaux K_α de \mathcal{D} , qui permettront à l'assemblage bord à bord feuilleté $U \setminus S := E(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha)$ de vérifier les assertions (TP1)-(TP3) du théorème principal. Nous ramènerons ainsi la preuve de ce théorème, à celle d'un théorème d'existence de blocs feuilletés contrôlés.

Désignons toujours par η_1 la hauteur d'uniformité des blocs de Milnor introduite dans la section 2.2 et par \mathfrak{c} la fonction de contrôle donnée par la définition (3.1.4).

THÉORÈME 3.2.1 (d'existence de blocs feuilletés adaptés contrôlés)

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$, $\eta_0 \leq \eta_1$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{T}_{\eta_0}^(K_\alpha)$, tel que :*

(BC1) *pour $\eta > 0$ assez petit, \mathcal{B}_α contienne $\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha)$ et les applications d'inclusion induisent des isomorphismes*

$$\pi_1(\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha), p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{B}_\alpha, p) \quad \text{et} \quad \pi_1(\partial \mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha), p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\partial \mathcal{B}_\alpha, p),$$

pour tout $p \in \partial \mathcal{T}_\eta^(K_\alpha)$,*

(BC2) *\mathcal{B}_α soit un bloc feuilleté \mathcal{F} -adapté,*

(BC3) *les composantes connexes V_1, \dots, V_{r_α} de $\partial \mathcal{B}_\alpha$ soient des ensembles de type suspension au-dessus des composantes connexes de ∂K_α ,*

(BC4) *$\mathfrak{c}(V_j) \leq \varepsilon$, $j = 1, \dots, r_\alpha$.*

Si nous supposons de plus que α n'est pas la composante initiale de \mathcal{D} , alors il existe une constante $C_\alpha > 0$ et une fonction croissante $\mathfrak{d}_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\lim_{c \rightarrow 0} \mathfrak{d}_\alpha(c) = 0$ telles que, pour tout sous-ensemble V de type suspension au-dessus d'une composante \mathcal{C}_{j_0} de ∂K_α vérifiant $\mathfrak{c}(V) \leq C_\alpha$, il existe $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{T}_{\eta_0}^*(K_\alpha)$ satisfaisant les propriétés (BC1), (BC2) et (BC3) précédentes, ainsi que les propriétés :

$$(BC3') \quad V_{j_0} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} V,$$

$$(BC4') \quad \mathfrak{c}(V_j) \leq \mathfrak{d}_\alpha(\mathfrak{c}(V)), \text{ pour chaque } j = 1, \dots, r_\alpha.$$

Preuve du théorème principal à partir du théorème (3.2.1). – Fixons maintenant un élément α_0 de \mathcal{A} , que nous choisirons égal à la composante initiale de \mathcal{D} si celle-ci existe. Considérons la filtration croissante du diviseur

$$K_{\alpha_0} =: \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \dots \subset \mathcal{K}_\kappa = \mathcal{D}, \quad \mathcal{K}_{j+1} := \mathcal{K}_j \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_j} K_\alpha,$$

où \mathcal{A}_j , $j \geq 1$, est l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{A}$ tels que $K_\alpha \not\subset \mathcal{K}_j$ et $K_\alpha \cap \partial \mathcal{K}_j \neq \emptyset$. Pour $c > 0$, définissons par induction les fonctions :

$$\tilde{\varepsilon}_0(c) := c, \quad \tilde{\varepsilon}_{j+1}(c) := \max\{\mathfrak{d}_\alpha(\tilde{\varepsilon}_j(c)) \mid \alpha \in \mathcal{A}_j \neq \emptyset\}.$$

Celles-ci tendent toutes vers 0, pour c tendant vers 0. Choisissons alors $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit pour avoir les inégalités :

$$\tilde{\varepsilon}_j(\varepsilon_0) \leq \inf\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_j\}, \quad j = 1, \dots, \kappa.$$

Nous commençons par appliquer la première partie du théorème (3.2.1), avec $\alpha = \alpha_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. Nous obtenons un bloc feuilleté \mathcal{F} -adapté \mathcal{B}_{α_0} , tel que toute composante connexe W de $\partial \mathcal{B}_{\alpha_0}$ satisfasse les inégalités

$$\mathfrak{c}(W) \leq \varepsilon_0 \leq C_\beta, \quad \beta \in \mathcal{A}_0.$$

Ainsi, pour chaque bloc K_β adjacent à \mathcal{K}_0 , nous pouvons appliquer la seconde partie du théorème (3.2.1), avec $\alpha = \beta$ et en prenant pour V la composante de $\partial \mathcal{B}_{\alpha_0}$ située au-dessus de $\mathcal{K}_0 \cap K_\beta$. Nous obtenons de nouveaux blocs feuilletés \mathcal{F} -adaptés \mathcal{B}_β , $\beta \in \mathcal{A}_0$, qui, grâce à la propriété (BC3'), satisfont avec \mathcal{B}_{α_0} la propriété (ABB') de la remarque (2.1.5). Chaque composante connexe W' du bord de l'un quelconque de ces blocs satisfait l'inégalité (BC3) et donc aussi les inégalités :

$$\mathfrak{c}(W') \leq \tilde{\varepsilon}_1(\varepsilon_0) \leq C_\sigma, \quad \sigma \in \mathcal{A}_1.$$

Nous pouvons donc itérer cette construction. De cette manière nous obtenons une collection de blocs feuilletés \mathcal{F} -adaptés $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ vérifiant la condition (ABB') de la remarque (2.1.5). En effet, si $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta \neq \emptyset$ il suffit de prendre pour $\mathcal{B}'_{\alpha\beta}$ l'un des deux bords $\partial \mathcal{B}_\alpha$ ou bien $\partial \mathcal{B}_\beta$ (le dernier construit). Les blocs feuilletés $\{\mathcal{B}'_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ donnés par (5) définissent ainsi un assemblage bord à bord feuilleté \mathcal{U}^* .

Montrons que l'image $U := E(\mathcal{U}^* \cup \mathcal{D})$ satisfait les conclusions du théorème principal. En effet, la condition (BC1) du théorème (3.2.1) prouve l'assertion (TP3). L'assertion (TP2) est une conséquence immédiate de la propriété (L1) du théorème de localisation (2.1.2). Finalement, les assertions (BC1) et (BC2) du théorème d'existence montrent que les composantes connexes du bord de chaque $\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha)$ sont incompressibles dans $\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha)$. Ainsi \mathcal{T}_η^*

est un assemblage bord à bord des $\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha)$. La proposition (2.1.4) donne l'isomorphisme $\pi_1(\mathcal{T}_\eta^*) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{U}^*)$ induit par l'inclusion. L'isomorphisme $\pi_1(T_\eta \setminus S) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U \setminus S)$, ainsi que l'assertion (TP1) du théorème principal, résultent alors de « la propriété d'uniformité » (2.2.3). \square

Le reste de l'article est consacré à la preuve du théorème (3.2.1). Le cas où α est un point singulier de \mathcal{F} est traité au chapitre 4. La preuve de (3.2.1) est élémentaire lorsque la singularité est linéarisable ; elle sera faite en (4.1). Malheureusement ces constructions ne fonctionnent plus lorsque la singularité est une selle résonante non-linéarisable. Nous construisons alors un voisinage-collier en introduisant une nouvelle technique, appelée « rabotage », qui permet de lever cette difficulté. Finalement, il restera le cas où α est une composante D de \mathcal{D} . Celui-ci sera traité au chapitre 5. Le bloc \mathcal{B}_D obtenu sera appelé « bloc de type Seifert », car il est muni (par construction) d'une (pseudo)-fibration de Seifert $\mathcal{B}_D \rightarrow D^\sharp$. L'existence de cette fibration jouera un rôle clé dans la preuve de la 1- \mathcal{F} -connexité du bord de \mathcal{B}_D .

4. Blocs feuilletés \mathcal{F} -adaptés attachés à une singularité

4.1. Singularités linéarisables : preuve de (3.2.1)

Soit s une singularité linéarisable de \mathcal{F} sur \mathcal{D} . Pour simplifier l'écriture, désignons par (x, y) les coordonnées (x_s, y_s) que nous avons fixées au paragraphe (2.2), dans lesquelles le feuilletage \mathcal{F} est donné par le champ de vecteurs linéaires $x_s \partial_{x_s} - \lambda y_s \partial_{y_s}$. Pour chaque $0 < \zeta < 1$ considérons l'ensemble

$$W_\zeta := \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |xy| < \zeta\}.$$

Pour tout sous-ensemble A de W_ζ , nous notons

$$A^* := A \setminus \{xy = 0\}, \quad \partial_1 A := A \cap \{|x| = 1\}, \quad \partial_2 A := A \cap \{|y| = 1\}.$$

Pour chaque point $(x_0, 0)$ ou $(0, y_0)$ situé sur un axe, avec $|x_0| = |y_0| = 1$, les transformations d'holonomie h_1 et h_2 de l'axe épointé de l'origine, pour le feuilletage \mathcal{F} , réalisées sur les transversales $\{x = x_0\}$ et $\{y = y_0\}$, s'écrivent respectivement :

$$h_1(x_0, y) = (x_0, ye^{-2i\pi\lambda}), \quad h_2(x, y_0) = (xe^{-2i\pi/\lambda}, y_0).$$

Pour définir le bloc \mathcal{F} -adapté \mathcal{B}_s , nous prenons $\zeta > 0$ assez petit et nous distinguons deux éventualités :

- Si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, nous posons $\mathcal{B}_s := \overset{\circ}{W}_\zeta^* \cup V_1 \cup V_2$, où $V_i = \partial_i \mathcal{B}_s$ est la suspension du disque épointé

$$\Sigma_i = \begin{cases} \{x_0\} \times \mathbb{D}^*(\zeta) & \text{si } i = 1, \\ \mathbb{D}^*(\zeta) \times \{y_0\} & \text{si } i = 2. \end{cases}$$

- Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, alors $\lambda = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et nous posons $\mathcal{B}_s := \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |x^p y^q| < \zeta\}$; ainsi $\partial_i \mathcal{B}_s$ est la suspension du disque épointé

$$\Sigma_i = \begin{cases} \{x_0\} \times \mathbb{D}^*(\zeta^{\frac{1}{q}}) & \text{si } i = 1, \\ \mathbb{D}^*(\zeta^{\frac{1}{p}}) \times \{y_0\} & \text{si } i = 2. \end{cases}$$

Vérifions que \mathcal{B}_s satisfait les assertions (BC1)-(BC4') du théorème (3.2.1), lorsqu'on choisit $\zeta > 0$ suffisamment petit. En effet \mathcal{B}_s est alors contenu dans $\mathcal{T}_{\eta_0}(K_s)$ et il existe $\eta > 0$ tel que $\mathcal{T}_\eta(K_s) \subset \mathcal{B}_s$. Il est clair que l'on a :

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{T}_\eta^*(K_s), \cdot) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathcal{B}_s, \cdot), \\ \pi_1(\partial_i \mathcal{T}_\eta^*(K_s), \cdot) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(\partial_i \mathcal{B}_s, \cdot), \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

et que les inclusions naturelles induisent l'identité sur $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Cela prouve l'assertion (BC1).

L'assertion (BC3) est évidente. Pour démontrer (BC4) et (BC4'), il suffit de voir que la F -rugosité et la taille des Σ_i tendent vers 0 lorsque ζ tend vers 0. Cela découle de la proposition (3.1.5) avec $g = F$, car $\mathbf{e}_y(\Sigma_1) = \mathbf{e}_x(\Sigma_2) = 0$.

Pour prouver la propriété (BC3'), donnons-nous un ensemble V de type suspension et de F -rugosité finie. Si $\zeta > 0$ et $\mathfrak{c}(V)$ sont assez petits, alors $h_i(\Sigma_i) \subset \Sigma_i$, ou bien $h_i(\Sigma_i) \supset \Sigma_i$; il en résulte les relations $V_i \xrightarrow[\mathcal{F}]^0 V$ et $V \xrightarrow[\mathcal{F}]^0 \partial_i W_\zeta^*$. Si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, alors les holonomies h_i n'ont pas d'orbites périodiques et la proposition (1.2.4) donne les relations

$$(15) \quad V_i \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 V \quad \text{et} \quad V \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \partial_i W_\zeta^*.$$

En fait, des points périodiques pour les h_i ne peuvent apparaître que dans deux circonstances : le cas où λ est un irrationnel positif et \mathcal{F}_s n'est pas linéarisable, qui est exclu par l'hypothèse (H2), et le cas où λ est un rationnel positif et \mathcal{F}_s possède une intégrale première holomorphe. Dans ce dernier cas, $h_i(\Sigma_i) = \Sigma_i$ et $\partial_i \mathcal{B}_s$ est \mathcal{F} -saturé et incompressible dans V ; d'où $\partial_i \mathcal{B}_s \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 V$, par la remarque (1.2.3-(iv)).

Il reste à prouver l'assertion (BC2), c'est-à-dire que \mathcal{B}_s est un bloc feuilleté \mathcal{F} -adapté. Les conditions (BF1) et (BF2) sont évidentes. La propriété (BF3) est triviale si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, car dans ce cas toutes les feuilles de $\mathcal{F}_{|\mathcal{B}_s}$ sont simplement connexes. Si $\lambda = \frac{p}{q}$, à l'aide de l'intégrale première $x^p y^q$ on peut construire des rétractions par déformation de \mathcal{B}_s sur $\partial_j \mathcal{B}_s$ qui laissent invariantes chaque feuille de $\mathcal{F}_{|\mathcal{B}_s}$. D'autre part, toute feuille L de $\mathcal{F}_{|\partial_j \mathcal{B}_s}$ est un cercle paramétré par $t \in [0, 1] \mapsto (x_0 e^{2i\pi qt}, y_0 e^{-2i\pi pt})$. L'inclusion de \mathcal{B}_s dans $\overline{\mathbb{D}}^* \times \overline{\mathbb{D}}^*$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Ainsi le morphisme $\mathbb{Z} \cong \pi_1(L, \cdot) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}_s, \cdot) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ induit par l'inclusion, est le morphisme linéaire défini par $1 \mapsto (q, -p)$; il est injectif. Finalement, il reste à prouver la condition (BF4), i.e. $\partial_i \mathcal{B}_s \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \mathcal{B}_s$, $i = 1, 2$. Considérons d'abord le cas $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Il suffit de montrer les relations $\partial_i W_\zeta^* \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 W_\zeta^*$, car $V_i \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \partial_i W_\zeta^*$ d'après (15). Pour cela, considérons le sous-ensemble \widetilde{W}_ζ des points (z, w) de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ qui vérifient les inégalités

$$(16) \quad \operatorname{Re}(z) \leq 0, \quad \operatorname{Re}(w) \leq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z + w) < \log(\zeta),$$

et désignons par $\rho : \widetilde{W}_\zeta \rightarrow W_\zeta^*$, $\rho(z, w) = (e^z, e^w)$ le revêtement universel de W_ζ^* . Le feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}} := \rho^* \mathcal{F}$ admet l'intégrale première linéaire $w + \lambda z$. Soient $a : [0, 1] \rightarrow \partial_i W_\zeta^*$ et $b : [0, 1] \rightarrow L$, deux chemins homotopes dans W_ζ^* à extrémités fixées, L désignant une feuille de $\mathcal{F}_{|W_\zeta^*}$. Choisissons $\tilde{a} : [0, 1] \rightarrow \partial_i \widetilde{W}_\zeta := \rho^{-1}(\partial_i W_\zeta^*)$ et $\tilde{b} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{L}$ deux ρ -relèvements de a et b de mêmes extrémités, \widetilde{L} désignant une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ telle que $\rho(\widetilde{L}) = L$. Comme \widetilde{L} est l'intersection d'un 2-plan avec ces trois demi-espaces de \mathbb{R}^4 , l'intersection $\widetilde{L} \cap \partial_i \widetilde{W}_\zeta \neq \emptyset$ est soit une droite, soit une demi-droite. Il est donc clair qu'il existe un chemin linéaire

$\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{L} \cap \partial_i \widetilde{W}_\zeta$ joignant les deux extrémités communes de \tilde{a} et \tilde{b} . Comme $\partial_i \widetilde{W}_\zeta$ et \tilde{L} sont simplement connexes, \tilde{c} est homotope à \tilde{a} dans $\partial_i \widetilde{W}_\zeta$ et à \tilde{b} dans \tilde{L} . Si nous définissons $c := \rho(\tilde{c})$, nous pouvons redescendre ces homotopies dans W_ζ^* et conclure que $c \sim_{\partial_i W_\zeta^*} a$ et $c \sim_L b$. Enfin le cas $\lambda = \frac{p}{q}$ s'obtient de façon complètement analogue, en remplaçant W_ζ par \mathcal{B}_s et $\text{Re}(z + w)$ par $\text{Re}(pz + qw)$ dans les inégalités (16).

4.2. Singularités résonantes : réduction de la preuve de (3.2.1)

Dans la section précédente, nous avons construit des blocs feuilletés \mathcal{F} -adaptés contrôlés attachés aux singularités s de \mathcal{F} linéarisables. Considérons maintenant le cas où \mathcal{F} n'est pas linéarisable en s . D'après les hypothèses du théorème principal, \mathcal{F} est un col résonant. Comme précédemment, nous notons $x := x_s$ et $y := y_s$ les coordonnées définies en (2.2) et nous identifions le sous-ensemble $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ au polydisque $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ de \mathbb{C}^2 , où \mathbb{D} désigne le disque unité $\mathbb{D}(1) := \{|z| < 1\}$ de \mathbb{C} . Sur ce polydisque \mathcal{F} est défini par un champ de vecteurs X qui s'écrit :

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y (\lambda + xyA(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda = \frac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Q}_{>0}, \quad (p_0, q_0) = 1.$$

La dynamique en pétales de l'holonomie (cf. [7]) permet de voir que la suspension épointée V_Σ de tout disque conforme assez petit $\Sigma \subset \{x = x_0\}$ n'est jamais 0-connexe dans $\partial_1 W_\zeta^*$; on en déduit facilement que V_Σ n'est jamais 1-connexe dans $\partial_1 W_\zeta^*$! Ainsi, dans ce cas, pour obtenir un bloc \mathcal{F} -adapté, nous ne pouvons pas adjoindre à W_ζ^* des bords trop petits, comme nous l'avions fait lorsque la singularité était linéarisable. Cette difficulté sera levée en construisant des voisinages des axes $\{xy = 0\}$ de type « collier feuilleté ». Dans ce paragraphe, après avoir effectué cette construction, nous démontrons le théorème (3.2.1) d'existence de blocs adaptés, mais en admettant la proposition (4.2.3). Les paragraphes (4.3)–(4.4) suivants sont consacrés à la preuve de cette dernière proposition.

Pour $t \in \mathbb{R}i$, le flot ϕ_t^X de X laisse invariant les tores pleins $\{|x| = c\}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$. De plus le difféomorphisme $\phi_{2\pi i}^X$ laisse invariant chaque germe de droite $(\{x\} \times \mathbb{C}, (x, 0))$ et, en restriction à chacune de ces droites, il est égal au germe d'holonomie de \mathcal{F} le long du lacet $\theta \mapsto e^{i\theta}x$, $\theta \in [0, 2\pi]$ réalisée sur cette transversale. Fixons $0 < \varepsilon_3 < 1$ tel que $\phi_{ti}^X(x, y)$ appartienne à $\overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$ pour tous $(x, y) \in \overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_3)$ et $|t| \leq 2\pi$. Dans toute cette section nous notons :

$$(17) \quad \begin{aligned} C &:= \partial\mathbb{D} \times \{0\}, \quad \mathcal{I}_{\theta', \theta''} := \{(e^{i\theta}, 0) \mid \theta' \leq \theta \leq \theta''\} \subset C, \\ C' &:= \{0\} \times \partial\mathbb{D}, \quad \mathcal{I}'_{\theta', \theta''} := \{(0, e^{i\theta}) \mid \theta' \leq \theta \leq \theta''\} \subset C'. \end{aligned}$$

Soient $\Delta \subset \{e^{i\theta_0}\} \times \mathbb{D}(\varepsilon_3)$ et $\theta_0 < \theta_1 \leq \theta_0 + 2\pi$. L'ensemble :

$$U_\Delta := \{\phi_{it}^X(m) \mid m \in \Delta, 0 \leq t \leq \theta_1 - \theta_0\} \subset \mathcal{I}_{\theta_0, \theta_1} \times \mathbb{D},$$

est appelé \mathcal{F} -suspension de Δ au-dessus de $\mathcal{I}_{\theta_0, \theta_1}$, suivant la projection $(x, y) \mapsto x$.

DÉFINITION 4.2.1. – Nous dirons qu'un ensemble $U \subset \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ est une \mathcal{F} -multi-suspension de longueur r au-dessus de $\mathcal{I}_{\theta_0, \theta_r}$, $\theta_r \leq \theta_0 + 2\pi$, s'il est égal à une union $\bigcup_{j=0}^{r-1} U_j$ de \mathcal{F} -suspensions U_j au-dessus de $\mathcal{I}_{\theta_j, \theta_{j+1}}$, avec $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_r$.

Il est clair qu'une multi-suspension au-dessus de $\mathcal{I}_{\theta_0, \theta_r}$ est un voisinage de $\mathcal{I}_{\theta_0, \theta_r}$ dans $\mathcal{I}_{\theta_0, \theta_1} \times \mathbb{D}$, lorsque Δ est un disque conforme ouvert contenant $(e^{i\theta_0}, 0)$. D'autre part, pour $\varepsilon'_3 > 0$ assez petit, nous définissons de la même manière la notion de *\mathcal{F} -suspension ou de \mathcal{F} -multi-suspension au-dessus de $\mathcal{I}'_{\theta_0, \theta_1}$, suivant la projection $(x, y) \mapsto y$* , d'un sous-ensemble Δ' de $\mathbb{D}(\varepsilon'_3)$.

Considérons maintenant le champ

$$Y = x \left(\frac{p_0}{q_0} + xyA(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour le temps t réel, son flot ϕ_t^Y laisse invariants les hyperplans réels $\{\arg y = c\}$, $c \in [0, 2\pi[$. On sait, cf. [7] chapitre 7.1.4, ou bien lemme 2.2 de [10], que si $\varepsilon_4 > 0$ est assez petit, il existe une (unique) fonction analytique $\tau : \overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)^* \times \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour $0 < |x| \leq \varepsilon_4$ et pour $0 \leq \theta < 2\pi$ on ait :

- (i) $\phi_t^Y(x, e^{i\theta}) \in \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$, pour tout $t \in]0, \tau(x, e^{i\theta})[$,
- (ii) $\phi_{\tau(x, e^{i\theta})}^Y(x, e^{i\theta}) \in \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$,
- (iii) la distance entre $\phi_{\tau(x, e^{i\theta})}^Y(x, e^{i\theta})$ et C tend uniformément vers 0, lorsque x tend vers 0.

Fixons désormais $\varepsilon_4 > 0$ tel que ces propriétés soient vérifiées. Donnons-nous aussi un disque conforme fermé $\Delta \subset \{e^{i\theta_0}\} \times \mathbb{D}(\varepsilon_3)$ de bord un lacet simple a.l.p.m. d'indice 1 autour de l'origine. Supposons que la taille $\|\Delta\|_y$ définie en (13) est suffisamment petite pour que la suspension U_Δ de Δ au-dessus du cercle C soit contenue dans l'image de l'application suivante :

$$\Psi : \overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)^* \times \partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}^*, \quad \Psi(x, e^{i\theta}) := \phi_{\tau(x, e^{i\theta})}^Y(x, e^{i\theta}).$$

DÉFINITION 4.2.2. – *Le plongement Ψ s'appellera application passage du col dans le sens $x \rightarrow y$ et l'ensemble :*

$$Col(\Delta) := \{\phi_t^Y(m) / m \in \overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)^* \times \partial\mathbb{D}, \Psi(m) \in U_\Delta, 0 \leq t \leq \tau(m)\},$$

sera appelé *\mathcal{F} -collier de gabarit Δ* .

Il est clair que $Col(\Delta) \cup Z$ est un voisinage fermé de $Z := \{xy = 0\} \cap \mathbb{K}$ dans le polydisque fermé $\mathbb{K} := \overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$. L'intersection $Col(\Delta) \cap \partial\mathbb{K}$ est constitué exactement des deux composantes connexes suivantes :

$$U_\Delta^* := U_\Delta - C \quad \text{et} \quad V_\Delta^* := \Psi^{-1}(U_\Delta^*).$$

L'ensemble

$$(18) \quad V_\Delta := V_\Delta^* \cup C'$$

est un voisinage de C' dans $\mathbb{D}(\varepsilon_4) \times \partial\mathbb{D}$. L'appellation « collier » est justifiée par le fait que *l'application de rectification*

$$(19) \quad R_\Delta : U_\Delta^* \times [0, 1] \longrightarrow Col(\Delta), \quad R_\Delta(m, t) := \phi_{-t \cdot \tau \circ \Psi^{-1}(m)}^Y(m),$$

est un difféomorphisme analytique réel qui conjugue le feuilletage produit $\mathcal{F}|_{U_\Delta^*} \times [0, 1]$ au feuilletage $\mathcal{F}|_{Col(\Delta)}$. Visiblement R_Δ est égale à l'identité en restriction à $U_\Delta^* \times \{0\}$ et égale

à Ψ^{-1} en restriction à $U_\Delta^* \times \{1\}$. Ainsi nous obtenons trivialement les relations de connexité feuilletée :

$$(20) \quad U_\Delta^* \xrightarrow[\mathcal{F}]{} Col(\Delta) \quad \text{et} \quad V_\Delta^* \xrightarrow[\mathcal{F}]{} Col(\Delta).$$

PROPOSITION 4.2.3. – *Il existe des constantes $c_0, c > 0$ et une fonction $\mathfrak{d} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{d}(r) = 0$, telles que, si $\|\Delta\|_y$ et $\mathbf{e}_y(\partial\Delta)$ sont tous $\leq c_0$, alors il existe un compact $\Delta' \subset \mathbb{D} \times \{1\}$ vérifiant les assertions suivantes :*

1. *le bord de Δ' est un lacet simple analytique lisse par morceaux, d'indice 1 par rapport à l'origine,*
2. *la suspension $U'_{\Delta'}$ de Δ' au-dessus de C' , suivant la projection $(x, y) \mapsto y$, est contenue dans V_Δ ,*
3. $U'^*_{\Delta'} := (U'_{\Delta'} - C')$ est 1- \mathcal{F} -connexe dans V_Δ^* ,
4. $\mathbf{e}_x(\Delta') \leq \{\mathbf{e}_y(\Delta) + \mathfrak{d}(\|\Delta\|_x)\}$ et $\|\Delta'\|_x \leq c\|\Delta\|_x^\lambda$.

Preuve de l'implication (4.2.3) \Rightarrow (3.2.1). – Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la proposition (4.2.3) en choisissant Σ de F -rugosité nulle. Nous obtenons un bloc \mathcal{F} -adapté avec un bord de type suspension, en posant :

$$\mathcal{B}_\alpha := \text{Col}(\Sigma) \cup U_\Sigma^* \cup U'^*_{\Sigma'}.$$

Les assertions (BC1) et (BC3) du théorème (3.2.1) résultent directement de la construction. L'assertion (BC2) découle des relations (20) et de la propriété 3 de (4.2.3). Les propositions (3.1.5) et (3.1.6) permettent de traduire les inégalités (4) de (4.2.3) en termes de F -rugosité. Il vient :

$$\mathbf{e}_F(\Sigma') \leq K_1 \|\Sigma\|_F, \quad \|\Sigma'\| \leq K_2 \|\Sigma\|_F^\lambda,$$

pour des constantes K_1, K_2 appropriées. Ainsi, avec les notations de (3.1.4), $\mathbf{e}_F(U_\Sigma^*) = 0$, $\mathbf{e}_F(U'^*_{\Sigma'})$, $\|U_\Sigma^*\|_F$ et $\|U'^*_{\Sigma'}\|_F$ tendent encore vers 0 pour $\|\Sigma\|_F \rightarrow 0$, ce qui prouve l'assertion (BC4). Les assertions (BC3') et (BC4') sont encore une retranscription de la proposition (4.2.3), en posant $V_{j_0} = V := U_\Sigma^*$. Nous en laissons les détails au lecteur. \square

4.3. Description de V_Δ , rabotage et preuve de (1)-(3) de (4.2.3)

Notons

$$h := \phi_{2\pi i}^X|_{1 \times \mathbb{D}(\varepsilon_3)} : \{1\} \times \mathbb{D}(\varepsilon_3) \longrightarrow \{1\} \times \mathbb{C}$$

l'application d'holonomie de \mathcal{F} le long de $\partial\mathbb{D} \times \{0\}$. Désignons encore par Δ un disque conforme fermé contenu dans $\{1\} \times \mathbb{D}(\varepsilon_3)$ de bord un lacet simple a.l.p.m., d'indice 1 autour du point $(1, 0)$ et de taille et de rugosité $\leq c_0$. Si c_0 est suffisamment petit, la suspension de Δ est bien définie et les compacts Δ et $h(\Delta)$ sont étoilés. Ils sont distincts, car h ne possède pas de domaine invariant. La « différence symétrique »

$$\Delta \triangle h(\Delta) := (\Delta - h(\Delta)) \cup (h(\Delta) - \bar{\Delta})$$

est une union de « lunules » délimitées par des courbes simples. Plus précisément, nous avons une subdivision de $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$:

$$(21) \quad \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q = \theta_0 + 2\pi, \quad q \geq 1,$$

et des courbes simples a.l.p.m. à valeurs dans $\partial\Delta \cup h(\partial\Delta)$,

$$\gamma_j(\theta) = \rho_j(\theta) e^{i\theta}, \quad \tilde{\gamma}_j(\theta) = \tilde{\rho}_j(\theta) e^{i\theta}, \quad 0 < \rho_j(\theta) \leq \tilde{\rho}_j(\theta), \quad \theta \in I_j := [\theta_{j-1}, \theta_j],$$

avec $j = 1, \dots, q$, vérifiant :

$$(22) \quad \begin{aligned} \gamma_j(\theta_{j-1}) &= \tilde{\gamma}_j(\theta_{j-1}) = \gamma_{j-1}(\theta_j) = \tilde{\gamma}_{j-1}(\theta_j), \quad j = 1, \dots, q, \\ \gamma_1(\theta_0) &= \tilde{\gamma}_1(\theta_0) = \gamma_q(\theta_q) = \tilde{\gamma}_q(\theta_q), \end{aligned}$$

et telles que $\Delta \triangle h(\Delta)$ soit l'union des *lunules* :

$$(23) \quad \mathcal{L}_j = \{r e^{i\theta} / \theta \in I_j, \rho_j(\theta) \leq r \leq \tilde{\rho}_j(\theta)\}, \quad j = 1, \dots, q.$$

Éventuellement \mathcal{L}_j peut être réduit à l'image $\text{Im}(\gamma_j)$ de γ_j , si $\gamma_j \equiv \tilde{\gamma}_j$, et dans ce cas l'intérieur de \mathcal{L}_j

$$\mathring{\mathcal{L}}_j := \{r e^{i\theta} / \theta \in I_j, \rho_j(\theta) < r < \tilde{\rho}_j(\theta)\}$$

est vide. Quitte à modifier la subdivision, nous supposons qu'il existe un sous-ensemble d'indices \mathfrak{K} tel que :

$$\mathring{\mathcal{L}}_k \neq \emptyset \quad \text{pour } k \in \mathfrak{K} \quad \text{et} \quad \gamma_j \equiv \tilde{\gamma}_j \quad \text{pour } k \notin \mathfrak{K}.$$

Le bord de Δ est une concaténation $\mu_1 \vee \dots \vee \mu_q$, avec : $\mu_j = \gamma_j$, ou bien $\mu_j = \tilde{\gamma}_j$. Il en est de même du bord de $h(\Delta)$. Comme l'holonomie ne possède pas de domaine invariant, on ne peut pas avoir $\gamma_j \equiv \tilde{\gamma}_j$ pour tout j et il existe des lunules d'intérieur non-vide.

L'holonomie h vérifie aussi $h(\Delta) \not\subset \Delta$ et $\Delta \not\subset h(\Delta)$. Il en résulte

$$\#\mathfrak{K} \geq 2.$$

Nous pouvons décomposer le bord de U_Δ en l'union disjointe

$$\partial U_\Delta = \mathcal{L} \cup \partial^{\text{sat}} U_\Delta,$$

avec $\mathcal{L} := \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} \mathcal{L}_k$ et $\partial^{\text{sat}} U_\Delta$ désignant l'ouvert de ∂U_Δ constitué des points m satisfaisant la propriété de saturation suivante :

(*) Il existe un voisinage W_m de m et $\varepsilon_m > 0$ tel que $\phi_{it}^X(m') \in \partial U_\Delta$ pour tout $m' \in W_m \cap \partial U_\Delta$ et tout $|t| < \varepsilon_m$.

Nous dirons que m est un point de saturation générique de U_Δ pour $\mathcal{F}_{|U_\Delta}$. Visiblement on a :

$$\partial \mathcal{L} = \partial(\overline{\partial^{\text{sat}} U_\Delta}) = \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} (\text{Im}(\gamma_k) \cup \text{Im}(\tilde{\gamma}_k)).$$

Remarquons que les *lunules* dégénérées épontées de leurs extrémités

$$\mathring{\mathcal{L}}_j := \{\gamma_j(\theta) \mid \theta_{j-1} < \theta < \theta_j\}, \quad j \notin \mathfrak{K},$$

sont contenues dans $\partial^{\text{sat}} U_\Delta$. D'autre part les points m de

$$\mathring{\mathcal{L}} := \bigcup_{j \in \mathfrak{K}} \mathring{\mathcal{L}}_j$$

sont caractérisés par la propriété suivante :

(**) L'une des assertions suivantes est satisfaite pour $t > 0$ assez petit :

$$(a) \quad \phi_{it}^X(m) \in \mathring{U}_\Delta \quad \text{et} \quad \phi_{-it}^X(m) \notin \mathring{U}_\Delta,$$

$$(b) \quad \phi_{-it}^X(m) \in \overset{\circ}{U}_\Delta \quad \text{et} \quad \phi_{it}^X(m) \notin \overset{\circ}{U}_\Delta.$$

Nous dirons que m est un *point de non-saturation générique de U_Δ* .

REMARQUE 4.3.1. – Il est clair que pour chaque $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_j$, $j \in \mathfrak{K}$, une seule des deux éventualités (a) ou (b) est réalisée en tout point.

Le difféomorphisme \mathbb{R} -analytique Ψ^{-1} défini en (4.2.2) conjugue les restrictions de \mathcal{F} à $\overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)^* \times \partial\mathbb{D}$ et à $\partial\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}^*$. Ainsi il vérifie

$$\Psi^{-1}(\partial U_\Delta) = \partial V_\Delta \quad \text{et} \quad \Psi^{-1}(\partial^{\text{sat}} U_\Delta) = \partial^{\text{sat}} V_\Delta,$$

où $\partial^{\text{sat}} V_\Delta$ est défini par la propriété de saturation analogue à la propriété (\star) mais relativement au champ Y et à l'ensemble ∂V_Δ . Comme Ψ laisse invariants les hyperplans $\{\arg y = c\}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$, les restriction de Ψ^{-1} induisent des difféomorphismes

$$U_\Delta^* \cap (\partial\mathbb{D} \times \{\arg y \in I_k\}) \xrightarrow{\sim} V_\Delta^* \cap \mathcal{T}(I_k),$$

où $\mathcal{T}(I_k)$ désigne le « 3-tube » $\mathcal{T}(I_k) := \overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)^* \times \{e^{i\theta} / \theta \in I_k\}$. Ainsi chaque image réciproque $\Psi^{-1}(\mathcal{L}_k)$, $k \in \mathfrak{K}$, est contenue dans $\mathcal{T}(I_k)$. Nous avons la décomposition :

$$\partial V_\Delta = \mathcal{L}' \sqcup \partial^{\text{sat}} V_\Delta, \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}' := \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} \mathcal{L}'_k, \quad \mathcal{L}'_k := \Psi^{-1}(\mathcal{L}_k).$$

De même les points intérieurs de $\overset{\circ}{\mathcal{L}}' = \Psi^{-1}(\overset{\circ}{\mathcal{L}})$ sont caractérisés par l'analogue pour Y et ∂V_Δ de la propriété $(\star\star)$.

Pour tout sous-ensemble Ω de $\mathbb{C} \times \partial\mathbb{D}$, ou de $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, pour $I \subset \mathbb{R}$, et pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous adoptons désormais les notations suivantes :

$$(24) \quad \Omega(I) := \Omega \cap \{\arg y \in I\}, \quad \Omega(\theta) := \Omega \cap \{\arg y = \theta\}.$$

Fixons $1 \leq k \leq q$ et considérons maintenant les restrictions de \mathcal{F} aux ensembles $V_\Delta(I_k)$. Visiblement :

$$\left(\partial(V_\Delta(I_k)) \right)(\overset{\circ}{I}_k) = (\partial V_\Delta)(\overset{\circ}{I}_k) = \left(\Psi^{-1}(\partial U_\Delta) \right)(\overset{\circ}{I}_k) = \Psi^{-1} \left((\partial U_\Delta)(\overset{\circ}{I}_k) \right).$$

Supposons d'abord $k \notin \mathfrak{K}$. On a l'égalité $(\partial U_\Delta)(\overset{\circ}{I}_k) = (\partial^{\text{sat}} U_\Delta)(\overset{\circ}{I}_k)$. Comme Ψ préserve la propriété de saturation générique, les égalités ci-dessus donnent :

$$(\partial V_\Delta)(\overset{\circ}{I}_k) = (\partial^{\text{sat}} V_\Delta)(\overset{\circ}{I}_k), \quad k \notin \mathfrak{K}.$$

Ainsi dans ce cas, chaque feuille est une courbe simple dont l'une des extrémités est située sur $V_\Delta(\theta_{j-1})$, l'autre extrémité étant située sur $V_\Delta(\theta_j)$. D'où :

REMARQUE 4.3.2. – L'ensemble $V_\Delta(I_k)$ est une suspension au-dessus de I_k , pour $k \notin \mathfrak{K}$.

Supposons maintenant $k \in \mathfrak{K}$. Le même raisonnement montre que les extrémités des feuilles de $\mathcal{F}|_{V_\Delta(I_k)}$ sont situées sur $\mathcal{L}'_j \cup V_\Delta(\theta_{k-1}) \cup V_\Delta(\theta_k)$.

LEMME 4.3.3. – *Il n'existe pas de feuille de $\mathcal{F}|_{V_\Delta(I_k)}$, dont les deux extrémités sont situées sur $\overset{\circ}{\mathcal{L}}'_k$.*

Preuve. — Raisonnons par contraposée. Une feuille $L' \in \mathcal{F}|_{V_\Delta(I_k)}$ telle que $\partial L' \subset \overset{\circ}{\mathcal{L}'_k}$ soit l'image inverse par Ψ d'une partie connexe d'une feuille de $\mathcal{F}|_{U_\Delta}$, qui est paramétrisée par $t \mapsto \phi_{it}^X(m)$, $t \in [0, 2\pi]$, et telle que m et $\phi_{i2\pi}(m)$ appartiennent à $\mathcal{L}_k \cap \{\arg y \neq \theta_k, \theta_{k+1}\}$. Mais ceci est impossible d'après (4.3.1). \square

REMARQUE 4.3.4. — Chaque feuille de $\mathcal{F}|_{V_\Delta(I_k)}$, $k \in \mathfrak{K}$, dont l'une des extrémités m est située sur $\overset{\circ}{\mathcal{L}'_k}$, a son autre extrémité, que nous notons $l_k(m)$, située sur $V(\theta_k)$, ou bien sur $V(\theta_{k-1})$. Par un argument de continuité nous voyons qu'il existe $\theta_+(k) \in \{\theta_{k-1}, \theta_k\}$ tel que $l_k(m) \in V_\Delta(\theta_+(k))$, pour tout $m \in \overset{\circ}{\mathcal{L}'_k}$. Par extension nous obtenons une application analytique réelle $l_k : \overset{\circ}{\mathcal{L}'_k} \longrightarrow V(\theta_+(k))$, $m \mapsto l_k(m)$. Toutes feuilles de $\mathcal{F}|_{V_\Delta(I_k)}$ qui n'intersectent pas $\overset{\circ}{\mathcal{L}'_k}$ ont une de leurs extrémités située sur $V(\theta_k)$ et l'autre sur $V(\theta_{k-1})$. Finalement on obtient une application \mathbb{R} -analytique « de transport holonome », que nous notons encore l_k ,

$$l_k : V_\Delta(I_k) \longrightarrow V_\Delta(\theta_+(k)), \quad \{l_k(m)\} := L_k(m) \cap V_\Delta(\theta_+(k)),$$

avec $L_k(m)$ désignant la feuille de $\mathcal{F}|_{V_\Delta(I_k)}$ qui contient le point m .

Considérons un intervalle $I = [\theta', \theta'']$, $0 < \theta'' - \theta' \leq 2\pi$ et un sous-ensemble connexe fermé Ω de $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ dont l'image par la projection $(x, y) \mapsto y$ est l'arc de cercle $\mathcal{I} := \{(e^{i\theta}, 0) \mid \theta \in I\}$. Nous supposons que $\mathcal{F}|_\Omega$ est un feuilletage en courbes lisses réelles. Considérons le sous-ensemble $\Omega^0 \subset \Omega$ des points m qui sont intérieurs à Ω pour la topologie feuilletée, i.e. il existe $\epsilon_m > 0$, tel que $\phi_{it}^Y(m) \in \Omega$, pour $-\epsilon_m \leq t \leq \epsilon_m$. Notons

$$\partial_{\mathcal{F}}\Omega := \Omega \setminus \Omega^0 \quad \text{et} \quad \Omega^\Delta := \Omega \setminus (\Omega(\theta') \cup \Omega(\theta'')) = \Omega(I).$$

Comme l'union de deux ensembles de type suspension au-dessus de \mathcal{I} est aussi de type suspension au-dessus de \mathcal{I} , la définition suivante a un sens.

DÉFINITION 4.3.5. — *Nous appelons* raboté de Ω au-dessus de I , *le plus grand sous-ensemble* $\text{Rab}_I(\Omega)$ *de* Ω *de type suspension au-dessus de* \mathcal{I} *pour la projection* $(x, y) \mapsto y$.

Plus précisément,

$$\text{Rab}_I(\Omega) = \overline{\Omega^\Delta \setminus \text{Sat}\left(\partial_{\mathcal{F}}\Omega \setminus (\Omega(\theta') \cup \Omega(\theta'')), \Omega^\Delta\right)}.$$

En particulier, si $\theta'' - \theta' = 2\pi$, c'est une suspension au-dessus du cercle C' , pointée en $P_0 := (0, e^{i\theta'})$.

D'après (4.3.4), pour $k \in \mathfrak{K}$ nous avons l'égalité

$$\text{Rab}_{I_k}(V_\Delta(I_k)) = \overline{V_\Delta(\overset{\circ}{I_k}) - \text{Sat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{L}'_k(\overset{\circ}{I_k}); V_\Delta(\overset{\circ}{I_k}))}.$$

Cet ensemble est la suspension de $V_\Delta(\theta_-(k))$ au-dessus de $\mathcal{I}_k := \{0\} \times \{e^{i\theta} \mid \theta \in I_k\}$, où $\theta_-(k)$ est l'élément de $\{\theta_{k-1}, \theta_k\}$ autre que $\theta_+(k)$. D'autre part, pour $k \notin \mathfrak{K}$, $V_\Delta(I_k)$ est déjà une suspension et $\text{Rab}_{I_k}(V_\Delta(I_k)) = V_\Delta(I_k)$.

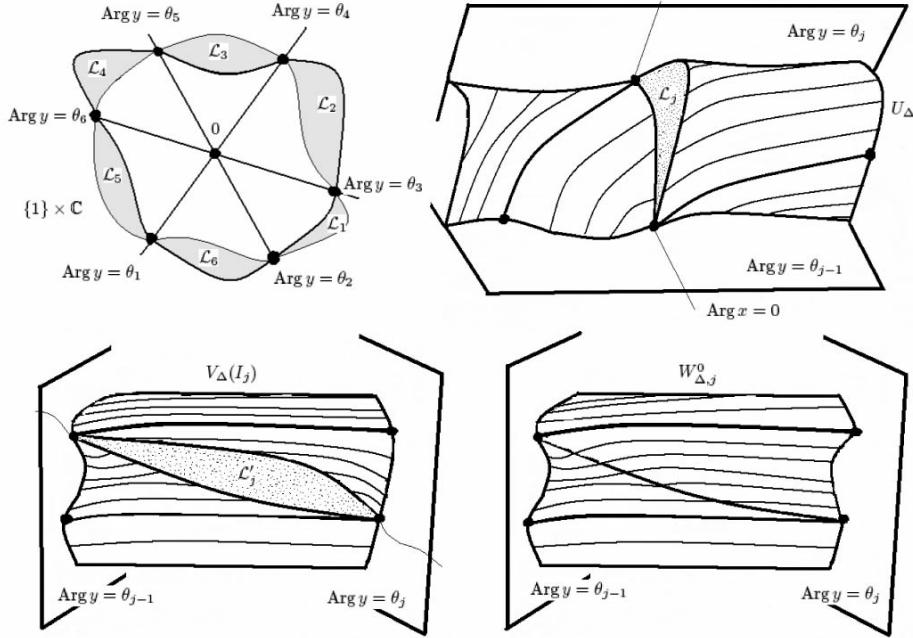


FIGURE 2. Description des lunules et du procédé de rabotage.

Ainsi l'ensemble

$$W_{\Delta}^0 := \bigcup_{k=1}^q W_{\Delta, k}^0, \quad \text{avec} \quad W_{\Delta, k}^0 := \text{Rab}_{I_k}(V_{\Delta}(I_k))$$

est une multi-suspension de longueur $\leq q$ au-dessus du cercle C' , cf. (4.2.1). Notons que d'après la remarque (4.3.4), nous avons :

$$(25) \quad \{W_{\Delta, k}^0(\theta_{k-1}), W_{\Delta, k}^0(\theta_k)\} = \{V_{\Delta}(\theta_{-}(k)), l_k(V_{\Delta}(\theta_{-}(k)))\}.$$

Supposons $\varepsilon_4 > 0$ assez petit pour que les difféomorphismes d'holonomie $\phi_{2\pi i}^X$ et $\phi_{2\pi i}^Y$ ne possèdent pas de point périodique dans U_{Δ}^* et V_{Δ}^* respectivement. Cela est possible grâce à la dynamique en pétales de l'holonomie, cf. [2, 10]. L'ensemble $W_{\Delta}^{0*} := W_{\Delta}^0 \setminus C'$ est 0-connexe dans V_{Δ}^* , car chaque feuille de la restriction de \mathcal{F} à $\text{Sat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{L}'_k; V_{\Delta}(I_k))$ contient une extrémité d'une feuille de $\mathcal{F}|_{V_{\Delta}^*}$. En appliquant la proposition (1.2.4) on obtient : $W_{\Delta}^{0*} \stackrel{1}{\not\hookrightarrow}_{\mathcal{F}} V_{\Delta}^*$.

Nous allons maintenant construire une multi-suspension $W_{\Delta}^{1*} \subset W_{\Delta}^{0*}$ de longueur $\leq q-1$ au-dessus de C' , qui sera 1- \mathcal{F} -connexe dans W_{Δ}^{0*} . Considérons la restriction de \mathcal{F} à $W_{\Delta, q-1}^0 \cup W_{\Delta, q}^0$. Les feuilles sont des courbes homéomorphes à un intervalle fermé dont les extrémités sont : ou bien toutes deux situées sur $W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-2}) \cup W_{\Delta, q}^0(\theta_q)$, ou bien l'une est située sur $W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-2}) \cup W_{\Delta, q}^0(\theta_q)$ et l'autre sur la différence symétrique

$W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-1}) \Delta W_{\Delta, q}^0(\theta_{q-1})$. Ainsi l'ensemble

$$W_{\Delta, q-1}^1 := \text{Rab}_{I_{q-1} \cup I_q}(W_{\Delta, q-1}^0 \cup W_{\Delta, q}^0)$$

est une suspension au-dessus de $I_{q-1}^1 := I_{q-1} \cup I_q$. L'ensemble

$$W_{\Delta}^1 := \overline{W_{\Delta}^0 - (W_{\Delta, q-1}^0 \cup W_{\Delta, q}^0)} \cup W_{\Delta, q-1}^1$$

est une multi-suspension de longueur $\leq q-1$. Par le même argument que précédemment, la $0\text{-}\mathcal{F}$ -connexité de $W_{\Delta}^{1*} := W_{\Delta}^1 \setminus C'$ dans W_{Δ}^{0*} est évidente. Il vient : $W_{\Delta}^{1*} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} W_{\Delta}^{0*}$.

En itérant ce procédé, nous obtenons une succession de multi-suspensions $W_{\Delta}^j \subset W_{\Delta}^{j-1}$ de longueur $\leq q-j$, vérifiant :

$$W_{\Delta}^{q-1*} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \cdots \xrightarrow[\mathcal{F}]{} W_{\Delta}^{j*} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \cdots \xrightarrow[\mathcal{F}]{} W_{\Delta}^{0*} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} V_{\Delta}^*.$$

Ainsi W_{Δ}^{q-1} est une suspension au-dessus du cercle C' pointée en $P_0 := (0, e^{i\theta_0})$, d'un ensemble $\widetilde{\Delta}' \subset \mathbb{D} \times \{P_0\}$ qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3) de la proposition (4.2.3). Si $\theta_0 = 0$, nous posons $\Delta' := \widetilde{\Delta}'$ et $U'_{\Delta'} := W_{\Delta}^{q-1}$. Si θ_0 n'est pas nul, pour obtenir une suspension pointée en $(0, 1)$, nous effectuons une opération de rabotage supplémentaire : nous posons $J := [0, 2\pi]$ et l'ensemble

$$U'_{\Delta'*} := \text{Rab}_J(W_{\Delta}^{q-1*}) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} W_{\Delta}^{q-1*} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} V_{\Delta}^*.$$

convient.

4.4. Estimation de la rugosité et preuve de (4) de (4.2.3)

Pour prouver (4), nous allons estimer les éventuels « gains de rugosité » à chaque étape de l'induction précédente.

Étape 1 : gain de rugosité par opérations de rabotage. – Reprenons les notations (24) du paragraphe précédent. Pour $I = [\theta', \theta'']$ et pour $\Omega \subset \mathbb{D} \times \{e^{i\theta}, \theta' \leq \theta \leq \theta''\}$, posons :

$$\mathbf{e}_{I,x}(\Omega) := \max\{\mathbf{e}_x(\partial(\Omega(\theta'))), \mathbf{e}_x(\partial(\Omega(\theta'')))\},$$

$$\|\Omega\|_{I,x} := \max\{\|\partial(\Omega(\theta'))\|_x, \|\partial(\Omega(\theta''))\|_x\},$$

en convenant que $\mathbf{e}_{I,x}(\partial(\Omega(\theta))) = +\infty$, si $\partial(\Omega(\theta))$ n'est pas un chemin a.l.p.m..

D'après (25) on a pour tout $k = 1, \dots, q$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{I_k,x}(W_{\Delta, k}^0) &= \max \left\{ \mathbf{e}_x(V_{\Delta}(\theta_-(k))), \mathbf{e}_x(l_k(V_{\Delta}(\theta_-(k)))) \right\}, \\ \|W_{\Delta, k}^0\|_{I_k,x} &= \max \left\{ \|V_{\Delta}(\theta_-(k))\|_x, \|l_k(V_{\Delta}(\theta_-(k)))\|_x \right\}. \end{aligned}$$

La proposition (3.1.5) appliquée à la restriction du transport holonome $l_k|_{V_{\Delta}(\theta_-(k))}$: $V_{\Delta}(\theta_-(k)) \rightarrow V_{\Delta}(\theta_+(k))$ donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{I_k,x}(W_{\Delta, k}^0) &\leq \|\mathbf{e}_x(V_{\Delta}(\theta_-(k))) + c_1^{(0)}\|V_{\Delta}(\theta_-(k))\|_x\|, \\ \|W_{\Delta, k}^0\|_{I_k,x} &\leq c_2^{(0)}\|V_{\Delta}(\theta_-(k))\|_x, \end{aligned}$$

pour des constantes $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} > 0$ appropriées. Il vient :

$$(26) \quad \mathbf{e}_{I_k,x}(W_{\Delta, k}^0) \leq \left\| \max_{j=1, \dots, q} \mathbf{e}_x(V_{\Delta}(\theta(j))) + c_1^{(0)} \max_{j=1, \dots, q} \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x \right\|,$$

$$\|W_{\Delta, k}^0\|_{I_k, x} \leq c_2^{(0)} \max_{j=1, \dots, q} \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x.$$

Appliquons de même les inégalités (12) et la proposition (3.1.5) aux applications de transport holonome :

$$\begin{aligned} W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-1}) \cap W_{\Delta, q}^0(\theta_{q-1}) &\rightarrow W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-2}), \\ W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-1}) \cap W_{\Delta, q}^0(\theta_{q-1}) &\rightarrow W_{\Delta, q}^0(\theta_q). \end{aligned}$$

On obtient aisément l'inégalité

$$(27) \quad \mathbf{e}_{I_{q-1}^1, x}(W_{\Delta, q-1}^1) \leq \{ \max\{\mathbf{e}_x(W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-1})), \mathbf{e}_x(W_{\Delta, q}^0(\theta_{q-1}))\} + \tilde{c}_1^{(1)} \max\{\|W_{\Delta, q-1}^0(\theta_{q-1})\|_x, \|W_{\Delta, q}^0(\theta_{q-1})\|_x\} \}.$$

Ce qui donne grâce à (26)

$$\mathbf{e}_{I_{q-1}^1, x}(W_{\Delta, k}^1) \leq \{ \max_{j=1, \dots, q} \mathbf{e}_x(V_{\Delta}(\theta(j))) + c_1^{(1)} \max_{j=1, \dots, q} \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x \},$$

pour une constante $c_1^{(1)} > 0$ appropriée. On montre de même une inégalité :

$$\|W_{\Delta, k}\|_{I_{q-1}^1, x} \leq c_2^{(2)} \max_{j=1, \dots, q} \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x.$$

En itérant ces majorations tout au long de l'induction précédente, on aboutit à des inégalités similaires pour $U'_{\Delta'}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{I_k^{q-1}, x}(U'_{\Delta'}) &\leq \{ \max_{j=1, \dots, q} \mathbf{e}_x(V_{\Delta}(\theta(j))) + c_1^{(q-1)} \max_{j=1, \dots, q} \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x \}, \\ \|U'_{\Delta'}\|_{I_k^{q-1}, x} &\leq c_2^{(q-1)} \max_{j=1, \dots, q} \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x. \end{aligned}$$

Pour obtenir les majorations (4) de la proposition (4.2.3), il suffit de prouver l'existence de constantes c_j et de fonctions $\mathfrak{d}_j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{d}_j(r) = 0$ telles que :

$$(28) \quad \mathbf{e}_x(V_{\Delta}(\theta_j)) \leq \{ \mathbf{e}_y(\Delta) + \mathfrak{d}_j(\|\Delta\|_y) \}, \quad \|V_{\Delta}(\theta_j)\|_x \leq c_j \|\Delta\|_y^\lambda.$$

Pour cela nous allons utiliser les propriétés de « l'application de Dulac » du passage du col. Nous rappellerons brièvement cette notion et, pour plus de détails, nous renvoyons au chapitre 7.1. du livre de F. Loray [7].

Étape 2 : gain de rugosité par l'application de Dulac. – Fixons j et désignons par $\zeta_j : V_{\Delta} \setminus V_{\Delta}(\theta_j) \rightarrow \mathbb{D} \times \{e^{i\theta_j}\}$ l'application de transport holonome $\zeta_j(x, e^{i\theta}) := \phi_{i(\theta_j - \theta)}^Y(x, e^{i\theta})$. Désignons aussi par $\widetilde{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)$ la surface de Riemann du disque fermé éponté $\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)^*$. Nous désignons par $r\underline{e}^{i\theta}$, $0 < r \leq \varepsilon_4$, $\theta \in \mathbb{R}$, les points de $\widetilde{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)$ et par $\chi(r\underline{e}^{i\theta}) := (1, r\underline{e}^{i\theta})$, l'application de revêtement. L'application holomorphe

$$\mathfrak{D}_j := \zeta_j \circ \Psi^{-1} \circ \chi|_{\mathcal{S}_j} : \mathcal{S}_j := \{r\underline{e}^{i\theta} \mid 0 < r \leq \varepsilon_4, \theta_j < \theta < \theta_j + 2\pi\} \rightarrow V_{\Delta}(\theta_j),$$

avec Ψ désignant toujours l'application de passage du col (4.2.2), se prolonge au bord du domaine. Plus précisément, on voit facilement que $\mathfrak{D}_j(r\underline{e}^{i\theta})$ tend vers $\Psi^{-1}(r\underline{e}^{i\theta_j})$ pour $\theta \rightarrow \theta_j$ et $\mathfrak{D}_j(r\underline{e}^{i\theta})$ tend vers $h_j(\Psi^{-1}(r\underline{e}^{i\theta_j}))$ pour $\theta \rightarrow \theta_j + 2\pi$, où $h_j := \phi_{2i\pi}^Y$ est l'holonomie de \mathcal{F} le long du cercle C' . Ainsi en posant

$$\widetilde{\mathfrak{D}}_j(1, r\underline{e}^{i(\theta+2\pi n)}) := h_j^{\circ n}(\mathfrak{D}_j(r\underline{e}^{i\theta})), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad h_j := \phi_{2i\pi}^Y,$$

on obtient un prolongement analytique de \mathfrak{D}_j , noté $\widetilde{\mathfrak{D}}_j$, qui peut être défini au voisinage d'un fermé $\widetilde{\mathcal{S}}_j \supset \mathcal{S}_j$ du type suivant :

$$\widetilde{\mathcal{S}}_j := \{ r\underline{e}^{i\theta} / 0 < r \leq \xi_j(\theta) \} \subset \widetilde{\mathbb{D}}(\varepsilon_4), \quad \text{avec } \xi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ continue.}$$

L'application $\widetilde{\mathfrak{D}}_j : \widetilde{\mathcal{S}}_j \rightarrow V_\Delta(\theta_j)$ s'appelle *application de Dulac de \mathcal{F} , réalisée sur la transversale $\widetilde{\mathcal{S}}_j$ et à valeurs dans $\mathbb{D} \times \{e^{i\theta_j}\}$* . Il est clair que, pour tout $r\underline{e}^{i\theta} \in \widetilde{\mathcal{S}}_j$, les points $(1, r\underline{e}^{i\theta})$ et $\widetilde{\mathfrak{D}}_j(r\underline{e}^{i\theta})$ sont sur une même feuille du collier $Col(\mathcal{F})$.

LEMME 4.4.1. – *Soit $G : \Omega \rightarrow V_\Delta(\theta_j)$ une application continue vérifiant les propriétés : a) Ω est un sous-ensemble connexe de $\widetilde{\mathcal{S}}_j$, b) pour tout $m \in \Omega$ les points $\chi(m)$ et $G(m)$ appartiennent à la même feuille de $Col(\mathcal{F})$, c) il existe un point $P_0 \in \Omega$ tel que $G(P_0) = \widetilde{\mathfrak{D}}_j(P_0)$. Alors $G \equiv \widetilde{\mathfrak{D}}_j|_\Omega$.*

Preuve. – On sait que chaque feuille de $\mathcal{F}|_{Col(\mathcal{F})}$ intersecte $V_\Delta(\theta_j)$ suivant l'orbite de h_j qui est un ensemble discret. Ainsi, si l'on se donne la valeur de G ou de $\widetilde{\mathfrak{D}}_j$ en un point, les valeurs aux points voisins sont entièrement déterminées par la propriété b). L'ensemble des points de Ω où G , et $\widetilde{\mathfrak{D}}_j$ coïncident est donc un ouvert. La connexité de Ω permet de conclure. \square

Désignons par $\alpha_j(\theta) =: (1, \varrho_j(\theta)\underline{e}^{i\theta})$, $\theta \in [\theta_j, \theta_j + 2\pi]$ un chemin a.l.p.m. qui paramétrise simplement $\partial\Delta$ dans le sens direct et notons $\widetilde{\alpha}_j : \mathbb{R} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}(\varepsilon_4)$ son relevé $\widetilde{\alpha}_j(\theta) := \varrho_j(\theta)\underline{e}^{i\theta}$. Nous allons admettre provisoirement les lemmes ci-dessous et prouver les inégalités (28).

LEMME 4.4.2. – *Pour $\|\Delta\|_x$ assez petit, il existe $\vartheta_j \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\widetilde{\mathfrak{D}}_j \circ \widetilde{\alpha}_j([\theta_j, \theta_j + \vartheta_j]) = \partial V_\Delta(\theta_j)$ et $0 < \vartheta_j \leq 2\pi(\lambda + 1)$.*

LEMME 4.4.3. – *Lorsque $y = r\underline{e}^{i\theta}$ tend vers 0 avec θ variant dans un intervalle compact, $(e^{i\theta_j}\widetilde{\mathfrak{D}}_j(y)/y^\lambda)$ tend uniformément vers 1 et $(y\widetilde{\mathfrak{D}}'_j(y)/\widetilde{\mathfrak{D}}_j(y))$ tend uniformément vers λ .*

Le bord de $V_\Delta(\theta_j)$ est l'image du chemin $\widetilde{\alpha}_j$ par l'application $\widetilde{\mathfrak{D}}_j$, d'après le premier lemme ci-dessus. La seconde inégalité de (28) résulte donc directement du second lemme. La formule de composition analogue à (14) donne la première inégalité de (28) en prenant pour $\mathfrak{d}_j(r)$ le maximum de la valeur absolue de l'argument de $y\widetilde{\mathfrak{D}}'_j(y)/\widetilde{\mathfrak{D}}_j(y)$ pour $y = \varrho\underline{e}^{i\theta}$, avec $\varrho \leq r$ et $\theta_j \leq \theta \leq \theta_j + 2\pi(\lambda + 1)$. D'après (4.4.3) comme λ est réel > 0 , $\mathfrak{d}_j(r)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Preuve du lemme (4.4.2). – Les feuilles de la restriction de \mathcal{F} à $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$ sont transverses aux surfaces $T_\theta := \{e^{i\theta}\} \times \mathbb{C}^*$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Elles sont aussi transverses aux surfaces $T^\theta \subset \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$ d'équation $\arg(y) = \theta$; pour le voir on peut remarquer que $\mathcal{F}|_{\mathbb{D}^* \times \partial\mathbb{D}}$ est transverse aux surfaces $T'_\theta \subset \mathbb{D}^* \times \partial\mathbb{D}$ d'équations $\arg(y) = \theta$ et que l'application Ψ de passage du col échange ces deux feuilletages et transforme T'_θ en T^θ . Ainsi, étant donné un chemin

$$(29) \quad t \mapsto \phi_{it}^X(1, y_0), \quad t \in [0, t_1]$$

d'extrémités $(1, y_0) \in T_0$ et $m_1 = \phi_{it_1}^X(1, y_0) \in T^{\theta_j}$, il existe une unique fonction analytique réelle ς , définie sur un voisinage de m_0 dans T^{θ_j} et à valeurs dans $\mathbb{R}_{<0}$, telle que $\phi_{i\varsigma(m)}^X(m) \in T_0$ et $\varsigma(m_1) = -t_1$. L'application $m \mapsto \phi_{i\varsigma(m)}^X(m)$ est un difféomorphisme local \mathbb{R} -analytique de (T_0, m_0) sur (T^{θ_j}, m_1) .

D'autre part $\partial^{sat}U_\Delta$ est l'ensemble des points $\phi_{it}^X(1, y)$ avec $(1, y) \in \partial\Delta$ et $0 < t < 2\pi$. Ainsi tout point de $\Gamma_j := \partial^{sat}U_\Delta \cap T^{\theta_j}$ est relié dans $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$ à un point de $\partial\Delta$, par un chemin du type (29) ci-dessus, avec $0 < t_1 < 2\pi$. On déduit de ce qui précède que Γ_j est localement difféomorphe à $\partial\Delta$. Plus précisément Γ_j est un chemin analytique par morceaux, homéomorphe à un intervalle ouvert, tracé dans T^{θ_j} . Le transport holonome induit une application « localement injective » $\beta_j : \Gamma_j \rightarrow \partial\Delta$. Notons P_j le point de $\partial\Delta$ d'argument θ_j . Visiblement $\{P_j\} = \overline{\Gamma_j} \cap T_0 = \partial U_\Delta \cap T^{\theta_j}$. Soit $\widehat{\Gamma}_j$ la compactification de Γ_j homéomorphe à un intervalle fermé. Nous pouvons noter $\widehat{\Gamma}_j := \Gamma_j \sqcup \{P_j, P'_j\}$, avec l'application β_j qui se prolonge continuement en une application $\widehat{\beta}_j : \widehat{\Gamma}_j \rightarrow \partial\Delta$, telle que $\widehat{\beta}_j(P_j) = \widehat{\beta}_j(P'_j) = P_j$. Celle-ci se factorise en une injection $\widetilde{\beta}_j : \widehat{\Gamma}_j \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}_j$, si Δ est de taille assez petite.

Remarquons que l'application

$$\mathcal{D} := (\Psi^{-1} \circ \widetilde{\beta}_j^{-1}) : \Omega \longrightarrow V_\Delta(\theta_j), \quad \Omega := \widetilde{\beta}_j(\widehat{\Gamma}_j),$$

satisfait les hypothèses du lemme (4.4.1). En effet a) et b) sont évidentes par construction et c) résulte de la remarque suivante : $\Psi^{-1}(re^{i\theta}) = \widetilde{\mathcal{D}}_j(e^{i\theta})$ si $\theta = \theta_j$. Ainsi $\widetilde{\mathcal{D}}_j(\Omega) = \Psi^{-1}(\overline{\Gamma_j})$. Mais par construction $\Psi^{-1}(\overline{\Gamma_j}) = \partial V_\Delta(\theta_j)$. Pour obtenir une égalité $\widetilde{\mathcal{D}}_j \circ \widetilde{\alpha}_j([\theta_j, \theta_j + \vartheta_j]) = \partial V_\Delta(\theta_j)$, il suffit de remarquer que Ω est l'image d'un intervalle par $\widetilde{\alpha}_j$.

La longueur ϑ_j de cet intervalle est majorée par $2\pi d_j$, où d_j est le nombre maximum de points d'une fibre de l'application β_j . Celui-ci se majore par la variation de l'argument de y dans un chemin $\gamma_{y_0} : t \mapsto \phi_{it}^X(1, y_0)$, $t \in [0, 2\pi]$, avec $y_0 \in \partial\Delta$. Ce qui donne :

$$d_j \leq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{y_0}} \frac{dy}{y} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{y_0}} (\lambda + xyA(x, y)) \frac{dx}{x} \right) \leq \lambda + \epsilon_\Delta,$$

où ϵ_Δ est le maximum de $|yA(x, y)|$ pour $(x, y) \in U_\Delta$. D'où la conclusion. \square

Preuve du lemme (4.4.3). — Remarquons d'abord que si l'on compose $\widetilde{\mathcal{D}}_j$ par l'application de transport holonome $\phi_{-i\theta_j}^Y$, on obtient l'application de Dulac réalisée encore sur $\widetilde{\mathcal{S}}_j$ mais à valeurs dans $\mathbb{D} \times \{1\}$. Toujours d'après (3.1.5) et (3.1.6), il revient au même de prouver le lemme pour $\widetilde{\mathcal{D}}_j$, ou bien pour \mathcal{D} . Ainsi nous supposerons $\theta_j = 0$. L'application $\widetilde{\mathcal{D}}_j$ est alors l'application de Dulac décrite dans le chapitre 7.1.4 de [7] et la première affirmation du lemme, énoncée aussi dans la section 7.1.4 de cette référence, résulte des estimations établies dans la preuve du lemme 2.2 de [10].

Considérons la forme normale formelle du germe de \mathcal{F} au point singulier. Elle est donnée par une 1-forme qui s'écrit :

$$(30) \quad \omega_{p_0/q_0, k, \alpha} := q_0 x (1 + \alpha x^{kp_0} y^{kq_0}) dy + p_0 y (1 + (\alpha - 1) x^{kp_0} y^{kq_0}) dx,$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$, définissant un feuilletage noté $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$. D'après [10] il existe des applications $\Phi_l : U_l(r_0, \varepsilon) \rightarrow \operatorname{Col}(\Delta)$, $l = 0, \dots, 2k - 1$, définies et différentiables (au sens de Whitney) sur les secteurs fermés

$$U_l(r_0, \varepsilon) := u^{-1} \left\{ re^{i\theta} / 0 \leq r \leq r_0, \left| \theta - \frac{\pi}{2k} - l \frac{\pi}{k} \right| \leq \pi/k \right\} \cap \mathbb{D} \times \mathbb{D},$$

holomorphes sur les secteurs ouverts $\overset{\circ}{U}_l(r_0, \varepsilon)$, tangentées à l'identité en chaque point des axes et qui conjuguent $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$ à $\mathcal{F}_{\operatorname{Col}(\Delta)}$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ des entiers qui satisfont :

$mp_0 - nq_0 = 1$. L'application multiforme

$$H := x^n y^m (x^{p_0} y^{q_0})^{\frac{\alpha - mp_0}{p_0 q_0}} \exp\left(\frac{-1}{p_0 q_0 u(x, y)^k}\right)$$

est, sur \mathbb{C}^2 privé des axes, une intégrale première de $\mathcal{F}_{k, \alpha}$. Elle est uniforme sur $U_l(r_0, \varepsilon)$ et sépare les feuilles de la restriction de $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$ à $U_l(r_0, \varepsilon)$, cf. [10] page 598. Ainsi, si deux points $(1, y)$ et $(x, e^{i\theta_0})$ appartiennent à $U_l(r_0, \varepsilon)$ et satisfont l'équation

$$(31) \quad H(1, y) = H(x, e^{i\theta_0}),$$

il existe un chemin dans une feuille de $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}|_{U_l(r_0, \varepsilon)}$ qui joint ces deux points. On en déduit que toute solution de (31) est une détermination de l'application de Dulac de $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$. Il en résulte aussi que les applications de conjugaison Φ_l , $l = 0, \dots, 2k - 1$, induisent un système complet de conjugaisons sectorielles (à la source et au but) entre des déterminations de l'application de Dulac de $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$ et de \mathcal{F} . Ces conjugaisons sont holomorphes sur les secteurs ouverts et possèdent un développement asymptotique tangent à l'identité à l'origine. On en déduit, grâce à (3.1.5) et (3.1.6), qu'il suffit de prouver le lemme (4.4.3) pour le feuilletage $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$.

Supposons désormais $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$. Pour simplifier les calculs, remarquons d'abord que l'on peut se ramener au cas $p_0 = q_0 = k = 1$. En effet $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$ est l'image réciproque de $\mathcal{F}_{1, 1, \alpha}$ par l'application $R(x, y) := (x^{kp_0}, y^{kq_0})$. Celle-ci est un revêtement en restriction à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et ses restrictions à des secteurs appropriés contenus dans des transversales aux axes conjuguent les applications de Dulac respectives. Les conjugantes g sont du type $\varphi(z) = cz^\beta$, avec $z = x$ ou y et $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$; elles ne modifient pas la rugosité des courbes. Il en découle que le lemme (4.4.3) est satisfait par $\mathcal{F}_{p_0/q_0, k, \alpha}$, dès qu'il l'est par $\mathcal{F}_{1, 1, \alpha}$.

Supposons finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1, 1, \alpha}$ et $\theta_j = 0$. En dérivant la relation (31) on voit que le graphe de l'application de Dulac $x = \tilde{\mathcal{D}}_j(y)$ est une solution de l'équation différentielle :

$$(32) \quad \frac{y \, dx}{x \, dy} = \frac{x(1 + \alpha y)}{y(1 + (\alpha - 1)x)}.$$

Comme $\tilde{\mathcal{D}}_j(y)$ tend vers 0 lorsque y tend vers 0 avec un argument borné, on déduit de cette équation que $(y \tilde{\mathcal{D}}'_j(y) / \tilde{\mathcal{D}}_j(y))$ converge alors et possède la même limite 1 que $(\tilde{\mathcal{D}}_j(y) / y)$. \square

5. Blocs feuilletés adaptés de type Seifert

Dans ce chapitre, nous démontrons le théorème d'existence de blocs \mathcal{F} -adaptés (3.2.1), dans le cas où $\alpha \in \mathcal{A}$ est une composante irréductible D du diviseur \mathcal{D} , qui n'est pas contenue dans une branche morte. Au paragraphe (5.1), nous construisons le bloc \mathcal{B}_D et nous prouvons qu'il satisfait les propriétés (BC1), (BC3), (BC3'), (BC4) et (BC4') du théorème (3.2.1). Il reste alors à prouver la propriété (BC2), qui affirme que \mathcal{B}_D est \mathcal{F} -adapté. Dans ce même paragraphe, nous réduisons la preuve de cette propriété à celle de la seule condition (BF4) de 1-connexité de $\partial\mathcal{B}_D$ dans \mathcal{B}_D . Celle-ci sera montrée au paragraphe (5.3); mais auparavant nous introduisons au paragraphe (5.2) les constructions et les descriptions auxiliaires dont nous avons besoin.

5.1. Construction du bloc et réduction de la preuve de (3.2.1)

À partir d'un disque ouvert Σ contenu dans la fibre de π_D au-dessus d'un point fixé P_0 de D^* , nous allons d'abord construire un voisinage fermé $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^*)$ de D^* dans $\pi_D^{-1}(D^*)$. À la fin de cette étape, nous indiquerons comment un bon choix de Σ , ainsi que l'existence de « bons » voisinages $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ des branches mortes \mathfrak{M}_j adjacentes à D , permettent de définir, par une construction bord à bord adéquate, un bloc \mathcal{B}_D qui satisfait les conditions du théorème (3.2.1). Ensuite à l'étape 2, nous construirons les voisinages $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$. Enfin à l'étape 3, nous réduirons la preuve du théorème (3.2.1) à une forme faible de la condition (BC2).

Étape 1 : construction de $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^)$.* — Choisissons une numérotation des points singuliers s_0, \dots, s_n de \mathcal{F} sur D , avec $n := v(D) - 1$, pour que s_{k+1}, \dots, s_n soient les points d'attache des branches mortes $\mathfrak{M}_{k+1}, \dots, \mathfrak{M}_n$ adjacentes à D . Visiblement il existe toujours au moins un point singulier sur D qui n'est pas situé sur une branche morte ; ainsi $0 \leq k \leq n$. Rappelons les définitions (7) et (10) des compacts de D suivants :

$$D^\sharp = D \setminus \bigcup_{j=0}^k D_{s_j}, \quad D^* = D^\sharp \setminus \bigcup_{j=k+1}^n D_{s_j}.$$

Donnons-nous des chemins simples réguliers analytiques réels :

$$\sigma_j : [0, 1] \rightarrow D^\sharp, \quad j = 0, \dots, n,$$

(cf. Fig. 3), dont les images $|\sigma_j|$ vérifient :

- $|\sigma_i| \cap |\sigma_j| = \emptyset$, pour $i \neq j$;
- $|\sigma_i| \cap \overline{D}_{s_j} = \emptyset$, pour $j \neq 0, i$;
- $|\sigma_j| \cap \overline{D}_{s_0} = \{\sigma_j(1)\} \subset \partial D_{s_0}$;
- si $i = 1, \dots, k$ alors $|\sigma_i| \cap \overline{D}_{s_i} = \{\sigma_i(0)\} \subset \partial D_{s_i}$;
- si $j = k+1, \dots, n$ alors $|\sigma_j| \cap \overline{D}_{s_j}$ est un chemin radial de $\sigma_j(0) = s_j$ à $\sigma_j(1/2) \in \partial D_{s_j}$.

Considérons aussi le sous-ensemble simplement connexe de D défini par :

$$D^\diamond := D^* \setminus \bigcup_{j=1}^n |\sigma_j|.$$

Fixons un point de base $P_0 \in D^\diamond$ et notons encore $\pi_D : \mathcal{T}_{\eta_1}(D^*) \rightarrow D^*$ la restriction au bloc de Milnor $\mathcal{T}_{\eta_1}(D^*)$ de la fibration (8) construite en (2.2), $\eta_1 > 0$ désignant encore une hauteur d'uniformité introduite au paragraphe (2.2). Soit $\Sigma \subset \pi_D^{-1}(P_0)$ un disque ouvert dont le bord est lisse par morceaux. La restriction $\mathcal{F}_{D^\diamond} := \mathcal{F}_{|\pi_D^{-1}(D^\diamond)}$ de \mathcal{F} à $\pi_D^{-1}(D^\diamond)$ est un feuilletage produit, car D^\diamond est simplement connexe. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que, si $|F(Q)| \leq C$, la restriction de π_D à la feuille de \mathcal{F}_{D^\diamond} passant par $Q \in \pi_D^{-1}(P_0)$ est un difféomorphisme sur D^\diamond . Choisissons Σ assez petit pour satisfaire l'inégalité $\|\Sigma\|_F = \max\{|F(Q)|, Q \in \Sigma\} \leq C$ et considérons la réunion $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^\diamond)$ des feuilles de \mathcal{F}_{D^\diamond} qui intersectent Σ . Par relèvement des chemins dans les feuilles suivant π_D , on construit un biholomorphisme $\varphi^\diamond : D^\diamond \times \Sigma \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^\diamond)$ qui conjugue le feuilletage horizontal à \mathcal{F}_{D^\diamond} et qui vérifie :

$$\pi_D(\varphi^\diamond(P, Q)) = P \quad \text{et} \quad \varphi^\diamond(P_0, Q) = Q \quad \text{pour tous } P \in D^\diamond \text{ et } Q \in \Sigma.$$

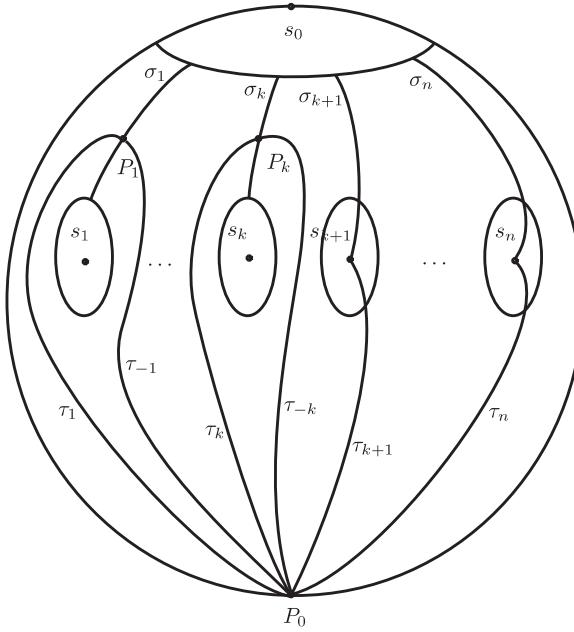


FIGURE 3. Numérotation des points singuliers et description des courbes auxiliaires.

Comme le bord de D^\diamond est lisse par morceaux, il existe une uniformisation ψ^\diamond de l'intérieur de D^\diamond dans D par le disque unité \mathbb{D} , qui s'étend continument au disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi le biholomorphisme $\phi^\diamond := \psi^\diamond \circ (\psi^\diamond \times \text{id}_\Sigma)$ s'étend en une application continue $\phi : \overline{\mathbb{D}} \times \Sigma \rightarrow T_\eta(D^*)$. Soit $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^*)$ l'image de ϕ et

$$\mathcal{B}_\Sigma(D^*) = \underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^*) \setminus D.$$

Le type d'homotopie de $\mathcal{B}_\Sigma(D^*)$ dépend de la taille et de la rugosité de Σ . En effet, pour $P \in D^\diamond$, la fibre $\pi_D^{-1}(P) \cap \mathcal{B}_\Sigma(D^*)$ est l'image de Σ par l'application d'holonomie $h_\alpha : \pi_D^{-1}(P_0) \rightarrow \pi_D^{-1}(P)$ du feuilletage le long d'un chemin α tracé dans D^\diamond , joignant P_0 à P . Par contre si P est un point d'une courbe $|\sigma_j|$, alors la fibre $\Sigma_P := \pi_D^{-1}(P) \cap \underline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^*)$ est égale à l'union $h_\alpha(\Sigma) \cup h_\beta(\Sigma)$, où α et β sont des chemins d'origine P_0 contenus dans D^\diamond , sauf leur extrémité qui est commune, égale à P et atteinte par des côtés différents de la courbe $|\sigma_j|$. *A priori* cette union pourrait ne pas être simplement connexe. Une conséquence directe de la proposition (3.1.5) est la suivante :

REMARQUE 5.1.1. – Reprenons les notations de (11) et (13). Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $P \in D^*$, la fibre Σ_P vérifie les estimations suivantes :

$$(33) \quad \mathbf{e}_F(\Sigma_P) \leq \{\{\mathbf{e}_F(\Sigma) + C_1\|\Sigma\|_F\}\} \quad \text{et} \quad \|\Sigma_P\|_F \leq C_1\|\Sigma\|_F.$$

On en déduit que si $\mathbf{c}(\Sigma) = \max\{\mathbf{e}_F(\Sigma), \|\Sigma\|_F\}$ est assez petit, alors toutes les fibres Σ_P ont une rugosité finie et sont donc étoilées. Plus précisément, en désignant toujours par η_1 l'hauteur d'uniformité introduite au paragraphe (2.2), on a le

LEMME 5.1.2. – *Il existe une constante $C' > 0$, telle que si $\mathfrak{c}(\Sigma) \leq C'$, alors pour tout $\eta_0 \leq \eta_1$ et tout $0 < \eta < \eta_0$, $\mathcal{B}_\Sigma(D^*)$ est contenu dans $\mathcal{T}_{\eta_0}(D^*)$ et se rétracte sur $\mathcal{T}_\eta^*(D^*)$. En particulier, l'inclusion $\mathcal{T}_\eta^*(D^*) \subset \mathcal{B}_\Sigma(D^*)$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux et ceux-ci admettent la présentation suivante :*

$$(34) \quad \langle a_0, \dots, a_n, c \mid a_0 \cdots a_n = c^\nu, [a_r, c] = 1, r = 0, \dots, n \rangle ,$$

où : $\{a_j\}_{j=0}^n$ sont les relevés, par une section de la fibration triviale $\pi_D : \mathcal{B}_\Sigma(D^*) \rightarrow D^*$, d'un système de générateurs géométriques de $\pi_1(D^*)$; c est le générateur du groupe fondamental de la fibre générique qui s'identifie à \mathbb{D}^* ; et $-\nu$ est égal à l'auto-intersection (D, D) . D'autre part, chaque composante connexe du bord de $\mathcal{T}_\eta^*(D^*)$ est contenue dans une composante connexe du bord de $\mathcal{B}_\Sigma(D^*)$. Cette inclusion induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux, ceux-ci admettant pour présentation : $\langle a_j, c \mid [a_j, c] = 1 \rangle, j = 0, \dots, n$.

Démonstration. – Supposons $C > 0$ assez petite pour que les fibres Σ_P soient toutes étoilées. Pour définir la rétraction, il suffit d'intégrer un relèvement du champ radial $\partial/\partial z$ par $F : \mathcal{T}_{\eta_1} \rightarrow \mathbb{D}_{\eta_1}$, en un champ tangent aux fibres de π_D . Remarquons que par définition les lacets $\{\underline{\sigma}_j \vee \partial D_{s_j} \vee \underline{\sigma}_j^{-1}\}_{j=0}^n$ forment un système de générateurs géométriques de $\pi_1(D^*)$, où $\underline{\sigma}_j = \sigma_j$, si $j = 0, \dots, k$ et où $\underline{\sigma}_j = \sigma_{j|[1/2, 1]}$, si $j = k+1, \dots, n$. Le seul point de la présentation (34) qui n'est pas évident, est le fait que l'exposant ν de c dans la relation $a_0 \cdots a_n = c^\nu$ soit égal à $-(D, D)$. Ceci est facile à voir dans le cas $\nu = 1$; c'est une conséquence directe de la description de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\nu)$ comme le quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)/\mathbb{Z}_\nu$ dans le cas général, voir aussi [14]. \square

Notons que chaque composante connexe

$$\partial_j \mathcal{B}_\Sigma(D^*) := \mathcal{B}_\Sigma(D^*) \cap \pi_D^{-1}(\partial D_{s_j}), \quad j = 0, \dots, n,$$

du bord $\partial \mathcal{B}_\Sigma(D^*)$ est de type suspension pour $j = 1, \dots, n$ et de type multi-suspension pour $j = 0$, cf. (4.2.1). En effectuant le procédé du « rabotage » décrit dans (4.3.5) nous construisons un sous-ensemble de type suspension Δ_0 qui est 1- \mathcal{F} -connexe dans $\partial_0 \mathcal{B}_\Sigma(D^*)$, dans le cas où l'holonomie h_0 de ∂D_{s_0} n'admet pas de domaine invariant. Dans le cas contraire, nous prenons pour Δ_0 , un domaine invariant par h_0 et contenu dans $\partial_0 \mathcal{B}_\Sigma(D^*)$. À l'étape suivante, nous montrons l'existence d'un voisinage $\underline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ de chaque branche morte \mathfrak{M}_j , $j = k+1, \dots, n$, adjacente à D , tel que $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) := \underline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \setminus (\mathfrak{M}_j \cup D)$ satisfait les propriétés :

- (BM1) $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est \mathcal{F} -saturé dans $\mathcal{T}_{\eta_1}^*(\mathfrak{M}_j)$,
- (BM2) le bord $\partial \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est contenu dans $\pi_D^{-1}(\partial D_{s_j}) \cap \overline{\mathcal{B}}_\Sigma(D^*)$ et est invariant par l'holonomie h_j de $\partial D_{s_j} \subset D$,
- (BM3) $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est maximal pour l'inclusion parmi les sous-ensembles de $\mathcal{T}_{\eta_1}^*(\mathfrak{M}_j)$ qui vérifient les propriétés (BM1) et (BM2).

Remarquons que la propriété (BM3) implique l'unicité de $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$. Cela nous permet de définir :

$$(35) \quad \mathcal{B}_\Sigma(D^\sharp) := \left(\mathcal{B}_\Sigma(D^*) \setminus \bigcup_{j=k+1}^n \partial_j \mathcal{B}_\Sigma(D^*) \right) \cup \bigcup_{j=k+1}^n \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) ,$$

$$(36) \quad \mathcal{B}_D := \left(\mathcal{B}_\Sigma(D^\sharp) \setminus \partial_0 \mathcal{B}_\Sigma(D) \right) \cup \Delta_0 \quad \text{et} \quad \partial_0 \mathcal{B}_D := \Delta_0,$$

en choisissant le disque Σ de la manière suivante :

- si $k \geq 1$, nous numérotions les singularités pour avoir $\pi_D(V) \subset \partial D_{s_1}$, nous prenons pour $\sigma_1(0) \in \partial D_{s_1}$ le « point de rupture » de la suspension V , nous choisissons P_0 sur $\partial D_{s_1} \setminus \{\sigma_1(0)\}$ et nous posons $\Sigma := \pi_D^{-1}(P_0) \cap V$;
- si $k = 0$, D est nécessairement la composante initiale de \mathcal{D} , d'après la proposition (2.2.1). Dans ce cas, nous prenons pour P_0 un point quelconque de D° et pour Σ un disque conforme assez petit de rugosité nulle.

Il est clair que $\partial \mathcal{B}_D = \bigcup_{i=0}^k V_i$ est de type suspension et que $V_1 = V$ lorsque D n'est pas la composante initiale de \mathcal{D} . Cela prouve les propriétés (BC3) et (BC3') du théorème (3.2.1). Quant aux propriétés (BC4) et (BC4'), elles résultent immédiatement de la remarque (5.1.1).

Étape 2 : construction et description de $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$. – Il est bien connu que l'holonomie h_j de \mathcal{F} le long du lacet $\partial D_{s_j} \subset D$ est périodique. Notons p_j , la période positive minimale de h_j . Il est facile de voir que \mathcal{F} possède, au voisinage de chaque branche morte \mathfrak{M}_j , une intégrale première holomorphe f_j s'annulant sur $\mathfrak{M}_j \cup \overline{D}_{s_j}$. D'après la proposition (3.1.5) et les propriétés (12), il existe une constante $C'' > 0$ telle que si $\max\{\mathbf{e}_F(\Sigma), \|\Sigma\|_F\} \leq C''$ alors, pour chaque $j = k+1, \dots, n$, l'ensemble

$$\Sigma_j := \Sigma_{\sigma_j(1/2)} \cap h_j(\Sigma_{\sigma_j(1/2)}) \cap \dots \cap h_j^{p_j-1}(\Sigma_{\sigma_j(1/2)})$$

est un disque conforme, ouvert, invariant par l'holonomie h_j et dont le bord est de F -rugosité finie. Si Δ_j est l'image de Σ_j par l'intégrale première f_j , alors l'ensemble

$$(37) \quad \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) := f_j^{-1}(\Delta_j^*) \setminus \pi_D^{-1}(D \setminus \overline{D}_{s_j}), \quad \Delta_j^* := \Delta_j \setminus \{0\},$$

vérifie les propriétés (BM1)–(BM3) précédentes.

Remarquons que pour le feuilletage donné par dF l'ensemble $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ que nous venons de définir coïncide avec $\mathcal{T}_\eta^*(\mathfrak{M}_j)$, si l'on choisit Σ pour avoir $F(\Sigma) = \mathbb{D}_\eta$. En effet, dans ce cas nous pouvons prendre, pour f_j , la restriction de F à un voisinage de $\mathfrak{M}_j \cup \overline{D}_{s_j}$.

Maintenant nous allons donner une liste de cinq propriétés techniques de $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ qui interviendront de manière essentielle à l'étape 3, pour réduire la preuve de (3.2.1) à celle de (5.1.5). La plus remarquable de ces propriétés est peut-être le fait que $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ admet de manière naturelle une fibration de Seifert au-dessus de D_{s_j} . En (5.2) nous étendons cette fibration le long de tout bloc fondamental K_D , (2.2.4), en une fibration de Seifert de base D^\sharp . Celle-ci jouera un rôle clé dans la preuve de (5.1.5). La notion de $\overline{\mathbb{D}}^*$ -fibration Seifert que nous considérons ici est l'analogue à la définition classique de fibration Seifert en cercles. Plus précisément, une application différentiable $\sigma : V \rightarrow S$ d'une 4-variété à bord V sur une surface S est appelée ici $\overline{\mathbb{D}}^*$ -fibration de Seifert, si tout point P de S admet un voisinage U tel que la restriction de σ à $\sigma^{-1}(U)$ soit équivalente au modèle local $\sigma_{a,b} : \mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{D}$ défini par $\sigma_{a,b}(x, y) = x^a (y/|y|)^{-b}$, avec des entiers $0 \leq b < a$ premiers entre eux. Remarquons que la restriction de σ à $\mathbb{D} \times \partial \overline{\mathbb{D}}$ (i.e. à $|y| = 1$) est une \mathbb{S}^1 -fibration de Seifert au sens classique, cf. [15]. On dit que la fibre correspondant à $\{x = 0\}$ est *exceptionnelle de type (a, b)* . Toutes les autres fibres de $\sigma^{-1}(U)$ admettent des voisinages tubulaires modélisés par $\sigma_{1,0}$, c'est-à-dire sur lesquels σ est une $\overline{\mathbb{D}}^*$ -fibration localement triviale. Comme dans le cas classique, pour toute

$\overline{\mathbb{D}}^*$ -fibration Seifert $\sigma : V \rightarrow S$, il existe un revêtement ramifié $\rho : \widehat{S} \rightarrow S$, tel que le pull-back $\widehat{\sigma} := \rho^*\sigma$ de $\widehat{V} := \rho^*V$ en \widehat{S} soit une $\overline{\mathbb{D}}^*$ -fibration localement triviale. En effet, il suffit de considérer le modèle local $\sigma_{a,b}$ et le revêtement ramifié $\rho_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ donné par $\rho_a(x) = x^a$.

PROPOSITION 5.1.3. – *Si $\max\{\mathbf{e}_F(\Sigma), \|\Sigma\|_F\} \leq C''$, alors $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ vérifie les propriétés suivantes :*

- (a) *il existe une carte holomorphe $\chi_j = (x_j, y_j) : \mathcal{T}_{\eta_1}(K_{s_j}) \rightarrow \overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$, telle que $\overline{D}_{s_j} = \chi_j^{-1}(\{y_j = 0\})$, $x_j \circ \pi_D = x_j$ et la restriction à $\mathcal{T}_{\eta_1}(K_{s_j})$ de l'intégrale première holomorphe f_j s'écrit sous la forme $f_j(x_j, y_j) = x_j^{q_j} y_j^{p_j}$, où $-q_j/p_j \in \mathbb{Q}_{<0}$ est la fraction réduite de l'indice de Camacho-Sad du feuilletage \mathcal{F} par rapport à D au point singulier s_j ;*
- (b) *$\partial\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cup \partial D_{s_j}$ est une 3-variété à bord qui est un voisinage de ∂D_{s_j} dans $\pi_D^{-1}(\partial D_{s_j})$;*
- (c) *il existe un C^1 -difféomorphisme $\Phi_j : \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \rightarrow \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}^*$, qui conjugue la restriction de \mathcal{F} au feuilletage horizontal et qui envoie $\partial\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ sur $\partial\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}^*$. En particulier, la restriction de \mathcal{F} à $\partial\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est un feuilletage en cercles dont chaque feuille est le bord d'une feuille de $\mathcal{F}|_{\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)}$;*
- (d) *les générateurs a_j et c du groupe fondamental de la composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\Sigma(D^*)$ qui se rétracte sur $\partial\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ s'identifient respectivement aux classes d'homotopie des lacets (positivement orientés) $\chi_j^{-1}(\{|x_j| = \varepsilon_j, y_j = \varepsilon_j\})$ et à $\chi_j^{-1}(\{x_j = \varepsilon_j, |y_j| = \varepsilon_j\})$, avec $\varepsilon_j > 0$ assez petit. De plus, le groupe fondamental de $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ admet la présentation suivante :*

$$(38) \quad \pi_1(\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)) \cong \langle a_j, c \mid [a_j, c] = 1, a_j^{p_j} = c^{q_j} \rangle = \mathbb{Z}\langle a_j^{m_j} c^{-n_j} \rangle,$$

où $m_j, n_j \in \mathbb{N}$, $n_j < p_j$, vérifient la relation $m_j p_j - n_j q_j = 1$;

- (e) *la restriction de π_D à $\partial\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ se prolonge en une $\overline{\mathbb{D}}^*$ -fibration de Seifert $\sigma_{\mathfrak{M}_j} : \overline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \rightarrow \overline{D}_{s_j}$ de classe C^1 et transverse à \mathcal{F} , avec exactement une fibre exceptionnelle $\sigma_{\mathfrak{M}_j}^{-1}(s_j)$, qui est de type (p_j, n_j) .*

Preuve. – La propriété (a) est bien connue et l'assertion (b) est évidente à partir de la caractérisation (37) de $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$. Pour montrer (c), remarquons d'abord que, si $D' \subset \mathfrak{M}_j$ est la composante extrémale de valence 1, alors il existe un C^1 -difféomorphisme $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \mathcal{T}_{\eta_1}(D') \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}^*$ qui conjugue \mathcal{F} au feuilletage horizontal. Si $D' \subset \mathfrak{M}_j$ est une composante de valence 2 ayant pour singularités du feuilletage $s', s'' \in D'$ alors $D'^* = D' \setminus (D'_{s'} \cup D'_{s''})$ est une couronne et possède un champ de vecteurs réel dont chaque orbite relie un des cercles de son bord $\partial D'_{s'}$ à l'autre $\partial D'_{s''}$. En intégrant le relevé de ce champ aux feuilles de \mathcal{F} via $\pi_{D'}$, on obtient des C^1 -difféomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \mathcal{T}_{\eta_1}(D'^*) &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \pi_{D'}^{-1}(\partial D'_{s'})) \times [0, 1] \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \pi_{D'}^{-1}(\partial D'_{s''})) \times [0, 1]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour toute singularité s du feuilletage située sur \mathfrak{M}_j , nécessairement point d'intersection de deux composantes D' et D'' de \mathcal{E} , la restriction de \mathcal{F} à $\mathcal{T}_{\eta_1}(K_s)$ est linéarisable avec un résidu λ rationnel positif. D'après la description faite dans la section 4.1, on obtient des difféomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \mathcal{T}_{\eta_1}(K_s) &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \pi_{D'}^{-1}(\partial D'_{s})) \times [0, 1] \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \pi_{D''}^{-1}(\partial D''_s)) \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Il est clair que les feuilles de $\mathcal{F}_{|\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)}$ sont obtenues en collant bord à bord un disque avec une succession des couronnes. En fait les difféomorphismes précédents se recollent pour donner un C^1 -difféomorphisme global

$$\Phi_j : \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}^*$$

satisfaisant les propriétés requises. Nous laissons les détails de cette construction au lecteur.

La description des générateurs a_j et c dans l'assertion (d) est évidente d'après le lemme (5.1.2). D'autre part, il est clair que la restriction de f_j à $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est une fibration localement triviale en disques (car elle est homotope à $\text{pr}_2 \circ \Phi_j$). On déduit de la suite exacte d'homotopie que l'application $[\gamma] \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{df_j}{f_j}$ est un isomorphisme entre $\pi_1(\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j))$ et \mathbb{Z} . D'après la description locale des générateurs a_j et c , on a : $\frac{1}{2i\pi} \int_{a_j} \frac{df_j}{f_j} = q_j$ et $\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{df_j}{f_j} = p_j$. D'où $a_j^{p_j} = c^{q_j}$ dans $\pi_1(\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)) \cong \mathbb{Z}$ et ce groupe admet $a_j^{m_j} c^{-n_j}$ comme générateur dès que $m_j p_j - n_j q_j = 1$.

Pour prouver l'assertion (e), considérons l'application :

$$\phi_j : \mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{D}}^*, \quad \phi_j(e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) = (e^{i(m_j \theta_1 + n_j \theta_2)}, r^{q_j} e^{i(q_j \theta_1 + p_j \theta_2)}),$$

où $\mathbb{S}^1 = \partial \overline{\mathbb{D}}$. C'est un difféomorphisme dont l'inverse est :

$$\phi_j^{-1}(e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) = (e^{i(p_j \theta_1 - n_j \theta_2)}, r^{\frac{1}{q_j}} e^{i(-q_j \theta_1 + m_j \theta_2)}).$$

La restriction de Φ_j à $\partial \overline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ coïncide avec $\phi_j \circ \chi_j : \partial \overline{\mathcal{B}}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{D}}^*$. L'application $\varsigma_j := x_j \circ \pi_D \circ \Phi_j^{-1} : \mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{S}^1$, qui s'écrit aussi sous la forme $\varsigma_j(e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) = e^{i(p_j \theta_1 - n_j \theta_2)}$, admet un prolongement $\underline{\varsigma}_j : \overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}^* \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ obtenu en posant $\underline{\varsigma}_j(x, re^{i\theta_2}) := x^p e^{-in\theta_2} = \sigma_{p,n}(x, y)$, $y = re^{i\theta_2} \in \overline{\mathbb{D}}^*$. Celui-ci satisfait visiblement les propriétés suivantes :

- (a) la restriction de $\underline{\varsigma}_j$ à chaque feuille $\overline{\mathbb{D}} \times \{re^{i\theta_2}\}$ du feuilletage horizontal \mathcal{H} est un revêtement ramifié avec l'origine comme unique point de ramification (non-triviale, sauf si $p_j = 1$),
- (b) chaque fibre de $\underline{\varsigma}_j$, y compris la fibre exceptionnelle $\underline{\varsigma}_j^{-1}(0)$, est une courbe lisse C^∞ transverse à chaque feuille de \mathcal{H} .

Posons $\sigma_{\mathfrak{M}_j} := \underline{\varsigma}_j \circ \Phi_j$. Pour achever la preuve, il suffit de voir que $p_j \neq 1$. Visiblement p_j est la période de l'application d'holonomie h_j du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long du lacet ∂D_{s_j} . Or on sait que l'holonomie au point de branchement d'une branche morte n'est jamais l'identité, cf. [12] lemme (6.2.5). \square

Étape 3 : réduction de la preuve du théorème (3.2.1). — Posons : $C_D := \min\{C, C', C''\} > 0$. Les assertions (BC3), (BC3'), (BC4), (BC4') ont déjà été prouvées à l'étape 1. Montrons l'assertion (BC1). D'après la présentation (38), si $\max\{\mathbf{e}_F(\Sigma), \|\Sigma\|_F\} \leq C''$ et si $0 < \eta < \eta_1$ est assez petit, alors les inclusions $\mathcal{T}_\eta^*(\mathfrak{M}_j) \subset \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ et $\partial \mathcal{T}_\eta^*(\mathfrak{M}_j) \subset \partial \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ induisent des isomorphismes au niveau des groupes fondamentaux. Remarquons aussi que nous avons : $\partial \mathcal{T}_\eta^*(\mathfrak{M}_j) = \mathcal{T}_\eta^*(\mathfrak{M}_j) \cap \mathcal{T}_\eta^*(D^*)$ et $\partial \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) = \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \cap \mathcal{B}_\Sigma(D^*)$. Ainsi l'assertion (BC1) de (3.2.1) découle de la remarque (2.1.3) et du lemme (5.1.2). Pour achever la preuve du théorème (3.2.1) il ne reste plus qu'à montrer l'assertion (BC2) de \mathcal{F} -adaptabilité du bloc \mathcal{B}_D , i.e.

- (i) le bord $\partial \mathcal{B}_D$ est incompressible,
- (ii) \mathcal{F} est transverse à $\partial \mathcal{B}_D$,

- (iii) chaque feuille de $\mathcal{F}|_{\mathcal{B}_D}$ est incompressible dans \mathcal{B}_D ,
- (iv) $\partial\mathcal{B}_D \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \mathcal{B}_D$.

En appliquant le théorème de Seifert-Van Kampen et en utilisant les présentations (34) et (38), nous obtenons la présentation explicite suivante du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{B}_D)$:

$$(39) \quad \left\langle a_0, \dots, a_n, c \mid a_0 \cdots a_n = c^\nu, [a_r, c] = 1, a_j^{p_j} = c^{q_j}, \right. \\ \left. r = 0, \dots, n, j = k+1, \dots, n \right\rangle.$$

Visiblement le groupe fondamental $\pi_1(V_j) \cong \langle a_j, c \mid [a_j, c] = 1 \rangle$ de chaque composante connexe V_j du bord de \mathcal{B}_D , $j = 0, \dots, k$, s'injecte dans $\pi_1(\mathcal{B}_D)$; d'où (i).

REMARQUE 5.1.4. – En appliquant de façon récurrente le théorème de Seifert-Van Kampen aux blocs $\{\mathcal{T}_\eta^*(K_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ et à l'aide de la présentation (39) du groupe fondamental de $\pi_1(\mathcal{T}_\eta^*(K_D))$, nous obtenons la présentation (3) de $\pi_1(\mathcal{T}_\eta^*)$ énoncée dans l'introduction.

La propriété (ii) est évidente par construction. Nous allons voir maintenant que l'assertion (iii) est une conséquence de (iv). Soit L une feuille de $\mathcal{F}|_{\mathcal{B}_D}$. Comme par construction de \mathcal{B}_D , la feuille L intersecte $\partial\mathcal{B}_D$, nous pouvons considérer un point p de $L \cap \partial\mathcal{B}_D$. Désignons par s la singularité de D associée à la composante connexe de $\partial\mathcal{B}_D$ qui contient le point p et que nous notons ici $\partial_p\mathcal{B}_D$. Distinguons deux cas :

- si s est linéarisable avec résidu $\lambda \in \mathbb{Q} > 0$, alors la description faite dans la section (4.1) implique que $L \cap \partial_p\mathcal{B}_D$ est incompressible dans $\partial_p\mathcal{B}_D$;
- sinon, ou bien $\lambda \notin \mathbb{Q}$, auquel cas s est linéarisable d'après les hypothèses du théorème principal, ou bien s est une singularité résonante. Dans les deux cas, $L \cap \partial_p\mathcal{B}_D \cong \mathbb{R}$ est simplement connexe, donc incompressible dans $\partial_p\mathcal{B}_D$.

En combinant l'incompressibilité de $L \cap \partial_p\mathcal{B}_D$ dans $\partial_p\mathcal{B}_D$ avec l'assertion (iv) et la transitivité de la relation $\xrightarrow[\mathcal{F}]^1$, nous obtenons les relations

$$\{p\} \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \partial_p\mathcal{B}_D \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \mathcal{B}_D,$$

c'est-à-dire l'incompressibilité de L dans \mathcal{B}_D .

Effectuons une dernière réduction du problème en utilisant la relation $\partial_0\mathcal{B}_D \xrightarrow[\mathcal{F}]^1 \partial_0\mathcal{B}_\Sigma(D^\#)$: par transitivité, la propriété (iv) est impliquée par la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1.5. – *Le bord de $\mathcal{B}_\Sigma(D^\#)$ est 1- \mathcal{F} -connexe dans $\mathcal{B}_\Sigma(D^\#)$.*

Finalement, pour achever la preuve du théorème (3.2.1), il suffit de prouver (5.1.5). Le reste de ce chapitre est consacré à cette démonstration, mais il nous faut préalablement introduire quelques constructions auxiliaires.

5.2. Constructions et descriptions auxiliaires

Pour alléger et unifier les notations dans les sections suivantes, nous écrirons $\mathcal{B}^\sharp := \mathcal{B}_\Sigma(D^\sharp)$. Considérons l'application :

$$\sigma : \mathcal{B}^\sharp \longrightarrow D^\sharp,$$

qui est égale à $\sigma_{\mathfrak{M}_j}$ en restriction à chaque voisinage $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$, $j = k+1, \dots, n$ et à π_D ailleurs. Elle satisfait à toutes les conditions des fibrations de Seifert, sauf peut-être la locale trivialité aux points de recollement, c'est-à-dire aux points de l'ensemble $\Xi := (\partial D^* \cup \bigcup_{j=1}^k |\sigma_j|)$. En fait, comme chaque fibre de σ est étoilée, σ est une pseudo-fibration (de Seifert) singulière dans Ξ , dans le sens suivant :

DÉFINITION 5.2.1. — *Nous dirons qu'une submersion surjective entre deux variétés différentiables $\sigma : E \rightarrow B$ est une pseudo-fibration (de Seifert) singulière dans $S \subset B$, s'il existe $E' \subset E$ tel que la restriction $\sigma|_{E'} : E' \rightarrow B$ soit une fibration de Seifert dont aucune fibre exceptionnelle n'est contenue dans S , s'il existe une rétraction par déformation de E sur E' donnée par une homotopie qui commute avec σ et si de plus E' et E coïncident au-dessus du complémentaire d'un voisinage ouvert de S dans B , que l'on peut choisir arbitrairement petit.*

A. Revêtement ramifié adapté à la pseudo-fibration. — Nous allons définir un revêtement ramifié qui trivialisera σ au voisinage de la fibre singulière. Il est bien connu (cf. [15]) que la base de toute fibration Seifert, en tant qu'espace de fibres, admet une structure d'orbifold ayant comme points de ramification les projections des fibres exceptionnelles. Ainsi, d'après le point (e) de la proposition (5.1.3), D^\sharp est un orbifold avec points de ramification s_{k+1}, \dots, s_n d'ordres respectifs p_{k+1}, \dots, p_n ; d'où l'isomorphisme

$$\pi_1^{\text{orb}}(D^\sharp) = \langle a_0, \dots, a_n \mid \prod_{i=0}^n a_i = 1, a_j^{p_j} = 1, j = k+1, \dots, n \rangle \cong \pi_1(D^*)/\mathcal{K},$$

où \mathcal{K} est le sous-groupe normal de $\pi_1(D^*) = \langle a_0, \dots, a_n \mid \prod_{i=0}^n a_i = 1 \rangle$ engendré par les éléments $a_j^{p_j}$, $j = k+1, \dots, n$. Le lecteur non familiarisé avec ces notions peut prendre l'isomorphisme ci-dessus, comme la définition de $\pi_1^{\text{orb}}(D^\sharp)$, sans avoir besoin d'autres propriétés. Soit $\rho^* : \widehat{D}^* \rightarrow D^*$ le revêtement associé à \mathcal{K} . Il existe une extension $\rho : \widehat{D} \rightarrow D^\sharp$ de ρ^* , qui est un revêtement ramifié, d'ordre p_j au-dessus de s_j , pour $j = k+1, \dots, n$. Remarquons que \widehat{D} est simplement connexe, car ρ^* déroule tous les lacets de D^* , sauf les lacets $a_j^{p_j}$ et par construction ces derniers bordent des disques dans \widehat{D} . Considérons le pullback $\widehat{\mathcal{B}} := \widehat{D} \times_{(\rho, \sigma)} \mathcal{B}^\sharp$ de la pseudo-fibration de Seifert par $\rho : \widehat{D} \rightarrow D^\sharp$, défini par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\widehat{\rho}} & \mathcal{B}^\sharp \\ \widehat{\sigma} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \widehat{D} & \xrightarrow{\rho} & D^\sharp. \end{array}$$

Visiblement $\widehat{\sigma} : \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{D}$ ne possède pas de fibres exceptionnelles. Nous verrons dans le paragraphe suivant que \widehat{D} est contractile et que par conséquent $\widehat{\sigma}$ est une pseudo-fibration triviale, dans un sens clair.

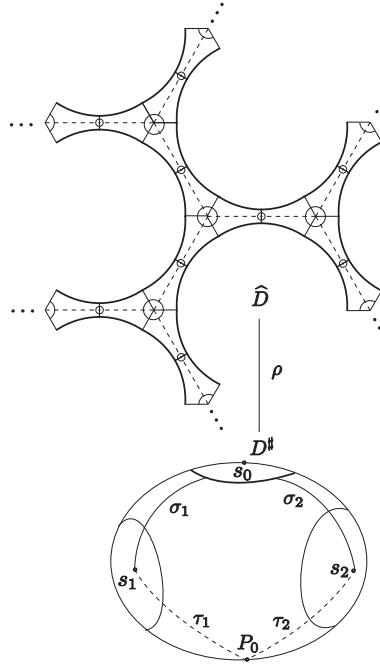


FIGURE 4. Le revêtement ramifié $\rho : \widehat{D} \rightarrow D^\sharp$, pour $k = 0, n = 2, p_1 = 2, p_2 = 3$. Les graphes \mathcal{G} et $\widehat{\mathcal{G}}$ sont en pointillés.

B. Graphe adapté au revêtement ramifié précédent. – Afin d'unifier les notations, nous écrivons désormais :

$$\mathcal{F}^\sharp := \mathcal{F}|_{B^\sharp} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{F}} := \widehat{\rho}^* \mathcal{F}^\sharp.$$

Soient $P_0 \in D^\diamond$ et $P_j \in |\sigma_j| \cap D^*$, $j = 1, \dots, k$. Nous noterons aussi $P_j := s_j$, si $j = k + 1, \dots, n$. Considérons des chemins réguliers simples (analytiques) $\tau_j : [0, 1] \rightarrow D^\sharp$, $j = -k, \dots, -1, 1, \dots, n$ tels que, si l'on désigne par $]\tau_j[$ l'image de τ_j privée de ses extrémités, les propriétés suivantes sont satisfaites (cf. Fig. 3) :

- $\tau_j(0) = P_0$ et $\tau_j(1) = P_j$;
- $]\tau_j[\subset D^\diamond$;
- $]\tau_j[\cap]\tau_\ell[= \emptyset$ si $j \neq \ell$;
- $\text{ind}_{s_j}(\tau_\ell \cdot \tau_{-\ell}^{-1}) = \delta_{j\ell}$ si $1 \leq j, \ell \leq k$.

Considérons la structure de graphe combinatoire \mathcal{G} définie sur l'ensemble

$$|\mathcal{G}| = \bigcup_{j=-k}^n |\tau_j|,$$

en décrétant que les sommets sont les points P_0, P_1, \dots, P_n et les arêtes les courbes $|\tau_j|$. Nous laissons au lecteur le soin de prouver le lemme suivant, à l'aide d'un champ de vecteurs approprié par exemple.

LEMME 5.2.2. – *Il existe une rétraction par déformation $q : D^\sharp \rightarrow |\mathcal{G}|$, telle que $q(|\sigma_j|) = \{P_j\}$, $j = 1, \dots, n$ et telle que la restriction de q à chaque composante connexe de*

$$\partial D^\sharp \setminus \{\sigma_1(0), \dots, \sigma_k(0), \sigma_1(1), \dots, \sigma_n(1)\}$$

soit injective.

Relevons cette rétraction par ρ , c'est-à-dire considérons l'unique rétraction par déformation $\widehat{q} : \widehat{D} \rightarrow |\widehat{\mathcal{G}}| := \rho^{-1}(|\mathcal{G}|)$ qui vérifie la relation de commutation $\rho \circ \widehat{q} = \widehat{q} \circ \rho$. Il existe un unique graphe combinatoire $\widehat{\mathcal{G}}$, dont $|\widehat{\mathcal{G}}|$ est la représentation géométrique et tel que ρ soit la représentation géométrique d'un revêtement de graphes $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$. Comme \widehat{D} est simplement connexe, $\widehat{\mathcal{G}}$ est un arbre et \widehat{D} est contractile.

C. *Description des feuilles de $\widehat{\mathcal{F}}$.* – Appelons *plaqué de \widehat{D}* , l'adhérence dans \widehat{D} de toute composante connexe de l'image réciproque

$$\rho^{-1} \left(D^\sharp \setminus \bigcup_{j=1}^n |\sigma_j| \right) \subset \widehat{D}.$$

Appelons *partie sécable* d'une plaque \mathcal{M} de \widehat{D} , toute composante connexe de l'ouvert

$$\rho^{-1} \left(\bigcup_{j=k+1}^n D_{s_j} \right) \cap \mathcal{M}.$$

Appelons *sous-plaque de la plaque \mathcal{M}* , toute différence $\mathcal{N} := \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est une union non-vide de parties sécables de \mathcal{M} . La plaque $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ sera dite *plaqué associée à la sous-plaque \mathcal{N}* et sera notée \mathcal{N}^c . Remarquons que l'on a :

$$(40) \quad \widehat{q}(\mathcal{N}) = \widehat{q}(\mathcal{N}^c), \quad \widehat{q}^{-1}(\widehat{q}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}^c \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^c \cap \partial \widehat{D} = \mathcal{N} \cap \partial \widehat{D}.$$

Appelons maintenant *plaqué d'une feuille \widehat{L}* de $\widehat{\mathcal{F}}$, toute composante connexe \mathcal{M}' de l'image réciproque par $\widehat{\sigma}_{|\widehat{L}}$ d'une plaque $\mathcal{M} \subset \widehat{D}$.

LEMME 5.2.3. – *La restriction de $\widehat{\sigma}$ à une plaque de \widehat{L} est injective et son image est une plaque ou bien une sous-plaque de \widehat{D} .*

Démonstration. – L'holonomie autour du point d'attache d'une branche morte n'est jamais l'identité, i.e. $p_j > 1$ pour tout $j = k+1, \dots, n$, cf. [12]. \square

Si l'image par $\widehat{\sigma}$ d'une plaque \mathcal{M}' de \widehat{L} est une sous-plaque, nous dirons que \mathcal{M}' est une *petite plaque*.

Considérons une composante connexe Γ de $\widehat{L} \cap (\rho \circ \widehat{\sigma})^{-1}(\partial D_{s_j})$, $j = k+1, \dots, n$. Une et une seule des deux éventualités suivantes est réalisée :

1. Γ est un cercle ; alors $\Gamma \subset \overset{\circ}{\widehat{L}}$ borde un disque dans \widehat{L} et la restriction de $\widehat{\sigma}$ à Γ est injective,

2. Γ est un segment ; alors Γ est contenu dans $\partial\widehat{L}$, il existe des petites plaques $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_r$, $r < p_j$, deux à deux distinctes telles que : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$, $\Gamma_j \subset \partial\mathcal{N}_j$, $\sharp(\Gamma_j \cap \Gamma_{j+1} = 1)$, $\Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset$ si $|k - l| \neq 1$, et la restriction de $\widehat{\sigma}$ à $\bigcup_{j=1}^r \mathcal{N}_j$ est injective.

Dans l'éventualité (2), nous appellerons *pièce associée à Γ* , l'ensemble :

$$\mathcal{P}(\Gamma) := \overline{\bigcup_{j=1}^r (\widehat{\sigma}(\mathcal{N}_j)^c \setminus \widehat{\sigma}(\mathcal{N}_j))}.$$

Remarquons que $\mathcal{P}(\Gamma)$ est un secteur du disque $\rho^{-1}(D_{s_j})$, pour un $j \in \{k+1, \dots, n\}$ approprié. Il est ainsi clair que $\widehat{\sigma}(\Gamma)$ (qui est homéomorphe à Γ), est un rétract par déformation de $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Notons $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, la collection des composantes Γ du type (2). Nous appelons *complété de la feuille \widehat{L}* le quotient

$$\widehat{L}^c := \left(\widehat{L} \cup \bigsqcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\Gamma_\alpha) \right) / \approx$$

où \bigsqcup est le symbole de l'union disjointe et \approx est la relation d'équivalence suivante :

- (a) Si $a \in \widehat{L}$ et $b \in \mathcal{P}(\Gamma_\alpha)$, alors $a \approx b$ ssi $a \in \Gamma_\alpha$ et $b = \widehat{\sigma}(a)$,
- (b) $a \in \mathcal{P}(\Gamma_\alpha)$ est équivalent à $b \in \mathcal{P}(\Gamma_\beta)$ ssi $\alpha = \beta$ et $a = b$.

REMARQUE 5.2.4. – Chaque feuille \widehat{L} de $\widehat{\mathcal{F}}$ se plonge proprement sur un fermé de \widehat{L}^c , qui est un rétract par déformation de \widehat{L}^c . Considérons donc désormais \widehat{L} comme un sous-ensemble de \widehat{L}^c . La restriction $\widehat{\sigma}_{\widehat{L}}$ de l'application $\widehat{\sigma}$ à \widehat{L} se prolonge à \widehat{L}^c en une application notée $\widehat{\sigma}_{\widehat{L}}^c$, dont l'image est l'union des plaques de \widehat{D} qui intersectent $\widehat{\sigma}(\widehat{L})$. Ce prolongement est un difféomorphisme local : plus précisément, sa restriction à chaque composante connexe de l'image réciproque $(\widehat{\sigma}_{\widehat{L}}^c)^{-1}(\mathcal{M})$ d'une plaque \mathcal{M} de \widehat{D} , est un difféomorphisme sur \mathcal{M} . En effet, avec les notations de l'éventualité (2), on voit que la restriction de $\widehat{\sigma}_{\widehat{L}}^c$ à $\mathcal{P}(\Gamma) \cup \bigcup_{j=1}^r \mathcal{N}_j$ est un difféomorphisme sur l'union des plaques $\bigcup_{j=1}^r \widehat{\sigma}(\mathcal{N}_j)^c$.

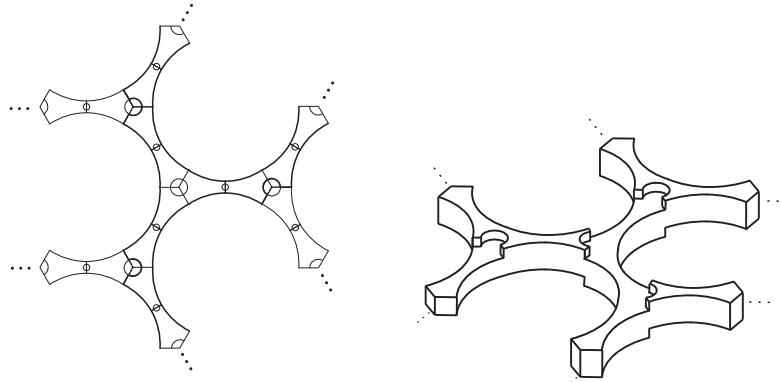


FIGURE 5. La feuille \widehat{L} et la feuille complétée \widehat{L}^c vues comme réunion de plaques.
Image symbolique de $\widehat{\mathcal{B}}^\sharp$.

LEMME 5.2.5. – $\widehat{\sigma}_L^c : \widehat{L}^c \rightarrow \widehat{D}$ est injective et \widehat{L}^c , ainsi que \widehat{L} , sont contractiles.

Pour chaque sommet s d'un graphe \mathcal{G} , nous définissons l'étoile de s comme le sous-graphe de \mathcal{G} dont les arêtes sont exactement les arêtes de \mathcal{G} adjacentes à s .

Sous-Lemme 5.2.6. – Soit $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ un morphisme localement injectif d'un graphe connexe \mathcal{G} dans un arbre \mathcal{A} , i.e. la restriction de h à l'étoile de chaque sommet s de \mathcal{G} est injective. Alors \mathcal{G} est un arbre et h est injective.

Preuve. – En considérant une exhaustion de \mathcal{A} par des parties connexes finies, on peut supposer que \mathcal{A} est un arbre fini. Nous raisonnons alors par récurrence sur le nombre de sommets de \mathcal{A} . Si \mathcal{A} n'a qu'un seul sommet, alors \mathcal{G} aussi. Ainsi \mathcal{G} est un arbre et h est injectif. Sinon, il existe un sommet d'extrémité s' de \mathcal{A} . Comme h est localement injectif, tout $s \in h^{-1}(s')$ est un sommet d'extrémité de \mathcal{G} . Si l'on enlève les sommets d'extrémités et leurs arêtes adjacentes aux graphes \mathcal{A} et \mathcal{G} , on obtient un nouveau morphisme localement injectif $h' : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{A}'$, où \mathcal{A}' est un arbre avec un sommet de moins que \mathcal{A} et \mathcal{G}' est toujours connexe. \square

Preuve du lemme (5.2.5). – Soit $|\mathcal{G}_L^c|$ la pré-image par $\widehat{\sigma}_L^c$ de $|\widehat{\mathcal{G}}|$. Comme $\widehat{\sigma}_L^c$ est un difféomorphisme local, cf. (5.2.3) et (5.2.4), il existe un graphe combinatoire \mathcal{G}_L^c dont $|\mathcal{G}_L^c|$ est la représentation géométrique et un morphisme localement injectif $h : \mathcal{G}_L^c \rightarrow \mathcal{G}$ dont la représentation géométrique $|h|$ est égale à la restriction de $\widehat{\sigma}_L^c$ à $|\mathcal{G}_L^c|$. Or $|\mathcal{G}_L^c|$ est l'image par la rétraction \widehat{q} de la feuille complétée \widehat{L}^c qui, elle, est connexe. Nous en déduisons que \mathcal{G}_L^c est un graphe connexe. D'autre part, nous avons déjà remarqué que $\widehat{\mathcal{G}}$ est un arbre. Le sous-lemme (5.2.6) implique que h est injectif et que \mathcal{G}_L^c est un arbre. Ainsi \widehat{L}^c , qui se rétracte sur $|\widehat{\mathcal{G}}|$, est contractile et $|h|$ est injectif. En utilisant de nouveau (5.2.3), l'injectivité locale de $\widehat{\sigma}_L^c$ donne l'injectivité de $\widehat{\sigma}_L^c$. D'autre part, la contractibilité de \widehat{L} résulte directement de celle de \widehat{L}^c , ce qui achève la démonstration. \square

LEMME 5.2.7. – La restriction de la rétraction \widehat{q} à toute composante connexe H de $\partial\widehat{D}$ est injective et $H \cong \mathbb{R}$.

Preuve. – Il découle du lemme (5.2.2) que la restriction de \widehat{q} à l'intersection de H et d'une plaque de \widehat{D} est injective. Ainsi il existe un graphe combinatoire \mathcal{H} dont H est la représentation géométrique et un morphisme localement injectif $\widehat{q}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \widehat{\mathcal{G}}$ dont \widehat{q} est la représentation géométrique. Le sous-lemme (5.2.6) implique que $\widehat{q}_{\mathcal{H}}$ est injectif et \mathcal{H} est un arbre. L'injectivité de \widehat{q} en découle. En fait H est une copie de \mathbb{R} car H , étant une composante du bord de la 2-variété \widehat{D} , est une 1-variété lisse. \square

LEMME 5.2.8. – Le bord de $\widehat{\mathcal{B}}$ est $0\text{-}\widehat{\mathcal{F}}$ -connexe dans $\widehat{\mathcal{B}}$, i.e. $\partial\widehat{\mathcal{B}} \xrightarrow[\widehat{\mathcal{F}}]{\widehat{\sigma}} \widehat{\mathcal{B}}$.

Preuve. – Considérons un chemin $\widehat{a} : [0, 1] \rightarrow \partial\widehat{\mathcal{B}}$, dont les extrémités sont dans une feuille \widehat{L} de $\widehat{\mathcal{F}}$ et montrons qu'il existe un chemin $\widehat{c} : [0, 1] \rightarrow \partial\widehat{\mathcal{B}} \cap \widehat{L}$ de mêmes extrémités que \widehat{a} . Par définition, l'image de $|\widehat{a}|$ par $\widehat{\sigma}$ est contenue dans une seule composante connexe de $\partial\widehat{D}$. Celle-ci étant une copie de \mathbb{R} d'après (5.2.7), considérons le chemin géodésique \widehat{c} joignant dans $\partial\widehat{D}$ les extrémités de $\widehat{\sigma} \circ a$. Le lemme (5.2.7) implique aussi que $\widehat{q} \circ \widehat{c}$ est un chemin

géodésique de $|\widehat{\mathcal{G}}|$. Ce chemin joint deux points de $\widehat{q} \circ \widehat{\sigma}(\widehat{L})$. Cet ensemble est connexe et, comme $\widehat{\sigma}(\widehat{L})$ est une union de plaques ou de sous-plaques, il est d'après (40) la représentation géométrique d'un sous-arbre de $\widehat{\mathcal{G}}$. Ainsi $|\widehat{q} \circ \widehat{c}|$ est nécessairement contenu dans $\widehat{q} \circ \widehat{\sigma}(\widehat{L})$. Toujours d'après (40) nous avons : $\widehat{q}^{-1}(\widehat{q}(\widehat{\sigma}(\widehat{L}))) \cap \partial \widehat{D} = \widehat{\sigma}(\widehat{L}) \cap \partial \widehat{D}$, cette égalité étant vraie pour toute union de plaques et de sous-plaques. Il vient l'inclusion : $\widehat{c} \subset \widehat{\sigma}(\widehat{L})$. D'après le lemme (5.2.5), \widehat{c} se relève dans \widehat{L} en un chemin \widehat{c} de mêmes extrémités que \widehat{a} . \square

5.3. Preuve de la proposition (5.1.5)

Pour montrer la $1\text{-}\mathcal{F}^\sharp$ -connexité de $\partial \mathcal{B}^\sharp$ dans \mathcal{B}^\sharp , fixons une feuille L^\sharp de \mathcal{F}^\sharp et considérons deux chemins de mêmes extrémités :

$$a : [0, 1] \rightarrow \partial \mathcal{B}^\sharp \quad \text{et} \quad b : [0, 1] \rightarrow L^\sharp,$$

qui sont homotopes dans \mathcal{B}^\sharp . Dans L^\sharp on peut homotoper b à un chemin, qu'on continuera à noter b , ne passant pas par les disques conformes $\sigma^{-1}(D_{s_j}) \cap \widehat{L}^\sharp$, $j = k + 1, \dots, n$,

$$|a|, |b| \subset \mathcal{B}^* := \mathcal{B}^\sharp \setminus : \bigcup_{j=k+1}^n \sigma^{-1}(D_{s_j}).$$

Comme la restriction de $\widehat{\rho}$ à $\widehat{\rho}^{-1}(\mathcal{B}^*)$ est un revêtement, il existe des $\widehat{\rho}$ -relèvements $\widehat{a} : [0, 1] \rightarrow \partial \widehat{\mathcal{B}}$ et $\widehat{b} : [0, 1] \rightarrow \widehat{L}$ de a et b , de même origine. Le lacet $b^{-1} \vee a = \widehat{\rho}(\widehat{b}^{-1} \vee \widehat{a})$ est homotope dans \mathcal{B}^\sharp à un lacet constant et son image par σ est contenue dans l'ensemble D^* . D'après (5.1.2) et (39), nous avons les isomorphismes

$$\pi_1(\mathcal{B}^*)/\langle c \rangle \cong \pi_1^{\text{orb}}(D^\sharp) \cong \pi_1(D^*)/\mathcal{K}.$$

On dispose donc du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{B}^*) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{B}^\sharp) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(D^*) & \longrightarrow & \pi_1(D^*)/\mathcal{K} \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont le morphisme induit par l'inclusion $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}^\sharp$ et le morphisme de passage au quotient, les flèches verticales étant induites par σ . Nous voyons ainsi que la classe d'homotopie de $\sigma(b^{-1} \vee a)$ appartient à \mathcal{K} et donc $\widehat{\sigma} \circ \widehat{a}$ et $\widehat{\sigma} \circ \widehat{b}$ possèdent les mêmes extrémités. Par construction (pull-back) la restriction de $\widehat{\rho}$ à toute fibre de $\widehat{\sigma}$ est injective. Il en résulte que \widehat{a} et \widehat{b} ont mêmes extrémités.

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme (5.2.8) pour trouver un chemin \widehat{c} tracé dans $\widehat{L} \cap \partial \widehat{\mathcal{B}}$ de mêmes extrémités que \widehat{a} et \widehat{b} . En effet, comme d'après le lemme (5.2.5) \widehat{L} est contractile, les chemins \widehat{c} et \widehat{b} sont homotopes dans \widehat{L} . Leurs images $c := \widehat{\rho} \circ \widehat{c}$ et b par $\widehat{\rho}$ sont homotopes dans L . Ceci permet de conclure, car l'existence d'une homotopie dans $\partial \mathcal{B}^\sharp$ reliant c à a , résulte de l'incompressibilité de $\partial \mathcal{B}^\sharp$ dans \mathcal{B}^\sharp , déjà démontrée à l'étape 3 de la section 5.1.

REMARQUE 5.3.1. — Le même genre d'arguments montre aussi la relation $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \xrightarrow[\mathcal{F}^\sharp]{} \mathcal{B}^\sharp$. En effet, considérons deux chemins $a : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{M})$ et $b : [0, 1] \rightarrow L$ homotopes dans \mathcal{B}^\sharp , où L est une feuille de \mathcal{F}^\sharp . Nous pouvons supposer que $|a|$ et $|b|$ n'intersectent pas les fibres exceptionnelles des pseudo-fibrations de Seifert. Ainsi comme précédemment a et b se

relèvent suivant le revêtement ramifié $\widehat{\rho}$ en deux chemins $\widehat{a} : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}$ et $\widehat{b} : [0, 1] \rightarrow \widehat{L}$ de mêmes extrémités. D'après le lemme (5.2.5), nous pouvons construire un chemin $\widehat{c} : [0, 1] \rightarrow \widehat{L} \cap \widehat{\rho}^{-1}(\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j))$ de mêmes extrémités que \widehat{a} et \widehat{b} . Comme \widehat{L} est contractile, \widehat{b} et \widehat{c} sont homotopes dans \widehat{L} . Si l'on définit $c := \widehat{\rho} \circ \widehat{c} : [0, 1] \rightarrow L \cap \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$, alors c est homotope à b dans L et à a dans \mathcal{B}^\sharp . Finalement, par le point (d) de la proposition (5.1.3), $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est incompressible dans \mathcal{B}^\sharp et donc a et c sont homotopes dans $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$. Ce qui achève la preuve de $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \mathcal{B}^\sharp$.

Notons que $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ n'est pas un bloc feuilleté \mathcal{F} -adapté car son bord n'est pas 1- \mathcal{F} -connexe dans $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$. Cependant, considérons l'ouvert $U^* = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ satisfaisant le théorème principal, que nous venons de construire par assemblage bord à bord feuilleté des blocs \mathcal{B}_α . La remarque ci-dessus et la transitivité de la relation de 1- \mathcal{F} -connexité feuilletée donnent immédiatement :

PROPOSITION 5.3.2. – $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}_j)$ est 1- \mathcal{F} -connexe dans U^* .

6. Extensions et conséquences du résultat principal

6.1. Existence de transversales 1- \mathcal{F} -connexes

Conservons les notations de l'introduction et considérons une courbe holomorphe $C \subset U$ telle que $C^* = C \setminus S$ soit lisse et transverse à \mathcal{F} . Remarquons que C^* est 1- \mathcal{F} -connexe dans $U^* = U \setminus S$, si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

(*) *si un chemin γ tracé dans une feuille L de $\mathcal{F}|_{U^*}$, à extrémités dans C^* , est homotope dans U^* à un chemin tracé dans C^* , alors γ est un lacet homotope à un point dans L .*

THÉORÈME 6.1.1. – *Soient \mathcal{F}_ω un germe à l'origine de \mathbb{C}^2 de feuilletage holomorphe singulier non-dicritique de type général, T_η un tube de Milnor pour la séparatrice totale S et soit C une courbe holomorphe (non nécessairement irréductible) telle que C^* soit lisse et transverse à \mathcal{F} . Alors il existe un voisinage U de S dans T_η vérifiant les propriétés (TP1), (TP2), (TP3) du théorème principal et tel que $C \cap U$ satisfasse aussi la propriété (*) ci-dessus.*

Preuve. – Prenons maintenant pour $E : T_\eta \rightarrow T_\eta$ une application obtenue par une succession d'éclatements au-dessus de l'origine, telle que E domine l'application de réduction de \mathcal{F}_ω et que de plus chaque transformée stricte \mathcal{C}_i des composantes irréductibles C_i , $i = 1, \dots, r$ de C intersecte le diviseur total $\mathcal{D} = E^{-1}(S)$ en un point régulier du feuilletage $\mathcal{F} := E^* \mathcal{F}_\omega$. Nous pouvons reprendre la construction de l'assemblage bord à bord feuilleté $U' = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ effectué à la section (3.2). En effet, d'après la proposition (2.2.1), \mathcal{D} possède au plus une composante initiale. Choisissons préalablement les disques conformes D_s construits en (2.2) pour qu'ils n'intersectent aucune composante \mathcal{C}_i . Choisissons aussi les fibrations π_D pour que chaque \mathcal{C}_i soit contenue dans une fibre. Fixons maintenant une composante \mathcal{C}_i et désignons par D la composante de \mathcal{D} qu'elle intersecte et par \mathcal{B}_α le bloc feuilleté adapté qui contient cette composante. Nous distinguons seulement deux éventualités, suivant que D est contenu dans une branche morte \mathfrak{M} de \mathcal{D} , ou non.

Dans le premier cas, $D \subset \mathfrak{M}$, nous allons montrer que \mathcal{C}_i est 1- \mathcal{F} -connexe dans l'ensemble $\mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M})$ construit à l'étape 2 de (5.1); la proposition (5.3.2) et la transitivité de la relation

de 1-connexité feuilletée donnent alors $\mathcal{C}_i \xrightarrow[\mathcal{F}]{} U^*$. Soit $f : \mathcal{B}_\Sigma(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{C}$ l'intégrale première considérée dans (37). Fixons une paramétrisation $z \mapsto \xi(z)$ de \mathcal{C}_i , telle que $f \circ \xi(z) = z^p$, avec $p > 0$. D'après la présentation (38) du groupe fondamental de $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ donné dans la proposition (5.1.3), l'application $f_* : \pi_1(\mathcal{B}(\mathfrak{M})) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui à γ fait correspondre $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{df}{f}$ est un isomorphisme. Soient L une feuille de $\mathcal{F}|_{\mathcal{B}(\mathfrak{M})}$ et $a : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_i^*$, $b : [0, 1] \rightarrow L$ deux chemins homotopes dans $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$. Alors $0 = f_*(a \vee b^{-1}) = \frac{p}{2i\pi} \int_a \frac{dz}{z}$, et donc a est un chemin fermé homotope à un point dans \mathcal{C}_i^* . Le chemin b ayant les mêmes extrémités que a est aussi un lacet, homotope à un point dans L puisque L est un disque.

Dans la deuxième éventualité, D n'est pas contenue dans une branche morte ; par transport holonome, nous pouvons supposer que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{U}'$ est contenue dans l'ensemble $\partial\mathcal{B}_\Sigma(D^\sharp)$ défini en (35). Chaque composante connexe de cet ensemble étant une multisuspension, il est aisément de voir que l'on a la relation $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{U}' \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \partial\mathcal{B}_\Sigma(D^\sharp)$. On conclut grâce à la proposition (5.1.5). \square

6.2. Groupe de monodromie d'un feuilletage singulier

Fixons U et C comme dans le théorème précédent. Quitte à remplacer C par $C \cap U$, nous supposons que $C \subset U$. Nous supposerons aussi que $\text{Sat}_{\mathcal{F}}(C^*, U^*) = U^*$. Désignons par $q_U : \widetilde{U} \rightarrow U^*$ le revêtement universel de U^* et notons $\widetilde{\mathcal{F}}_U = q_U^* \mathcal{F}|_{U^*}$. Il est clair que chaque composante connexe de C^* est incompressible dans U^* et donc chaque composante connexe C_α de $q_U^{-1}(C^*)$ est un disque conforme. La propriété (*) implique la propriété suivante :

(**) *l'intersection d'une composante C_α de C et d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ est soit vide, soit réduite à un point.*

Notons $\widetilde{\mathcal{Q}}_U$ l'ensemble des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$. Les applications canoniques $\tau_\alpha : C_\alpha \rightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}_U$ qui à un point $x \in C_\alpha$, associe la feuille L_x de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ passant par ce point, sont injectives. Leurs inverses $\tau_\alpha^{-1} : \tau_\alpha(C_\alpha) \rightarrow C_\alpha \cong \mathbb{D}$ définissent trivialement un atlas holomorphe sur $\widetilde{\mathcal{Q}}_U$, munissant ainsi cet ensemble d'une structure de variété holomorphe de dimension un, non-séparée en général. Chaque élément γ du groupe $\text{Aut}_{q_U}(\widetilde{U}) \cong \pi_1(U^*, \cdot)$ des automorphismes du revêtement $q_U : \widetilde{U} \rightarrow U^*$ préserve le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ et induit un élément $\mathfrak{m}_U(\gamma)$ du groupe $\text{Aut}(\widetilde{\mathcal{Q}}_U)$ des automorphismes holomorphes de $\widetilde{\mathcal{Q}}_U$.

DÉFINITION 6.2.1. – *Nous appelons monodromie de (\mathcal{F}, U) , la représentation \mathfrak{m}_U : $\text{Aut}_{q_U}(\widetilde{U}) \rightarrow \text{Aut}(\widetilde{\mathcal{Q}}_U)$.*

Désignons par M_U l'image de \mathfrak{m} . Le quotient de $\widetilde{\mathcal{Q}}_U$ par l'action de M_U est l'espace de feuilles \mathcal{Q}_U de $\mathcal{F}|_{U^*}$. Nous obtenons ainsi la propriété géométrique suivante :

PROPOSITION 6.2.2. – *L'espace de feuilles de $\mathcal{F}|_{U^*}$ est le quotient d'une variété holomorphe de dimension un, par une action holomorphe du groupe fondamental de U^* .*

EXEMPLE 6.2.3. – Soit \mathcal{F} une singularité linéaire $x\partial_x - \lambda y\partial_y$, avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On peut montrer que : $\widetilde{\mathcal{Q}}_U$ est biholomorphe à \mathbb{C} , la monodromie est la représentation de $\pi_1(U^*, \cdot) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, comme le sous-groupe $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ agissant par translations sur \mathbb{C} ; et \mathcal{Q}_U est biholomorphe à la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z})$.

REMARQUE 6.2.4. — La composition de la carte $\tau_\alpha^{-1} : \tau_\alpha(C_\alpha) \rightarrow C_\alpha \cong \mathbb{D}$ avec la restriction de l’application tautologique $\widetilde{U} \rightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}_U$ au saturé de chaque composante C_α , définit une intégrale première holomorphe locale de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$, à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{Q}}_U$. Celle-ci s’interprète comme une intégrale première multiforme « locale » du germe de \mathcal{F} le long de S , dont la monodromie est donnée par \mathfrak{m}_U .

Il est clair que $\mathfrak{m}_U : \pi_1(U^*) \rightarrow \text{Aut}(\widetilde{\mathcal{Q}}_U)$ est un invariant analytique de la paire (\mathcal{F}, U) . Pour obtenir un invariant analytique du germe de \mathcal{F} le long de la séparatrice totale S , nous établissons dans un travail en cours de rédaction, une version germifiée de cette notion de monodromie.

6.3. Sur le pseudo-groupe d’holonomie de Ortiz-Rosales-Voronin

Dans un travail récent [16], ces auteurs introduisent une représentation d’holonomie étendue $\mathcal{R} : \pi_1(U^*) \rightarrow \text{Aut}^{\text{loc}}(C_\alpha)$ à valeurs dans le pseudo-groupe de biholomorphismes locaux d’une composante connexe C_α de $q_U^{-1}(C)$, afin de donner une stratégie qui permettrait de prouver l’invariance topologique des holonomies projectives des différents composantes du diviseur exceptionnel de la réduction de singularités de \mathcal{F} . Pour faire cela, il leur faut un voisinage U de la singularité tel que les feuilles de $\mathcal{F}|_{U^*}$ soient incompressibles dans U^* et une courbe transverse $C \subset U$ vérifiant la propriété (*). Ils montrent l’existence de U et C dans le cas particulier où \mathcal{F} se réduit après un seul éclatement (Main Lemma 3.3 de [16]), cf. [9] pour une autre approche. Dans le cas général, le théorème (6.1.1) ci-dessus donne l’existence de U et C et la définition de \mathcal{R} est encore valide. Le principal problème est qu’on ne sait pas décider si, étant donné $\gamma \in \pi_1(U^*)$, le domaine de définition de $\mathcal{R}(\gamma)$ est non vide.

Nous considérerons toutes ces questions dans un travail ultérieur.

RÉFÉRENCES

- [1] M. BELLIART, I. LIOUSSE, F. LORAY, Sur l’existence de points fixes attractifs pour les sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbf{C}_{,0})$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), 443–446.
- [2] C. CAMACHO, On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in \mathbf{C}^2 , in *Journées Singulières de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978)*, Astérisque **59**, Soc. Math. France, 1978, 3, 83–94.
- [3] C. CAMACHO, A. LINS NETO, P. SAD, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, *J. Differential Geom.* **20** (1984), 143–174.
- [4] C. CAMACHO, P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Ann. of Math.* **115** (1982), 579–595.
- [5] D. EISENBUD, W. NEUMANN, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies **110**, Princeton University Press, 1985.
- [6] L. LE FLOC'H, Rigidité générique des feuilletages singuliers, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1998), 765–785.
- [7] F. LORAY, Pseudo-groupe d’une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux, prépublication, hal.archives-ouvertes.fr/hal-00016434, 2005.

- [8] W. MAGNUS, A. KARRASS, D. SOLITAR, *Combinatorial group theory*, second éd., Dover Publications Inc., 2004.
- [9] D. MARÍN, Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane, *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), 518–539.
- [10] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983), 571–621.
- [11] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), 469–523.
- [12] J.-F. MATTEI, E. SALEM, Modules formels locaux de feuilletages holomorphes, prépublication [arXiv:math/0402256](https://arxiv.org/abs/math/0402256).
- [13] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Math. Studies, No. 61, Princeton University Press, 1968.
- [14] D. MUMFORD, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Publ. Math. I.H.É.S.* **9** (1961), 5–22.
- [15] P. ORLIK, *Seifert manifolds*, Lecture Notes in Math., Vol. 291, Springer, 1972.
- [16] L. ORTIZ-BOBADILLA, E. ROSALES-GONZÁLEZ, S. M. VORONIN, Extended holonomy and topological invariance of the vanishing holonomy group, *Journal of Dynamical and Control Systems* **14** (2008), 299–358.
- [17] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 248–269.
- [18] C. T. C. WALL, *Singular points of plane curves*, London Math. Soc. Student Texts **63**, Cambridge University Press, 2004.
- [19] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Dover Publications Inc., 1987.
- [20] J.-C. Yoccoz, Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques, *As-térisque* **231** (1995), 3–88.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 2007 ;
accepté, après révision, le 20 mai 2008.)

David MARÍN
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra (Barcelona), Espanye
E-mail: davidmp@mat.uab.es

Jean-François MATTEI
Université Paul Sabatier
Institut de Mathématiques
Laboratoire Émile Picard
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 9, France
E-mail: jean-francois.mattei@math.univ-toulouse.fr

