

Soutenance de thèse :
Comportement en temps long de différents processus stochastiques en
neuroscience

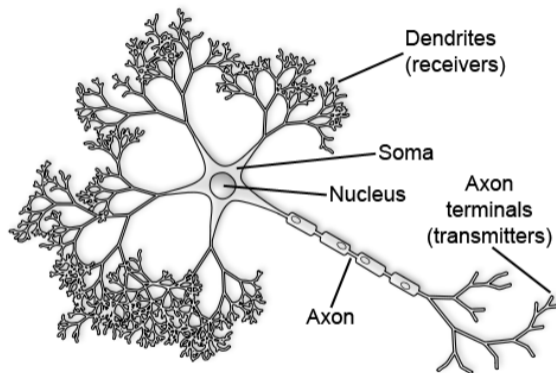
Laetitia Colombani

IMT

4 juillet 2022,
Toulouse



Modélisation de neurones



- ▶ 10^{11} neurones dans un cerveau humain
- ▶ Un neurone typique reçoit des signaux de plusieurs milliers de neurones.

Figure: Représentation d'un neurone, par Nicolas Rougier (2007)

Deux modélisations différentes

Si on s'intéresse aux instants de décharges

Modèles de sauts : processus de renouvellement, processus de Poisson inhomogène, processus de Hawkes, ...

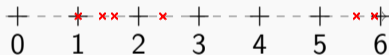


Figure: Exemple de processus de sauts

Si on s'intéresse à la valeur du potentiel

Modèles continus : processus Intègre-et-tir, Hodgkin-Huxley, FitzHugh-Nagumo, ...

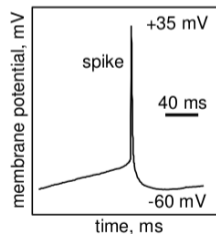


Figure: Décharge enregistrée *in vitro*, Eugene M. Izhikevich (2005)

Deux modélisations différentes

Si on s'intéresse aux instants de décharges

Modèles de sauts : processus de renouvellement, processus de Poisson inhomogène, processus de Hawkes, ...

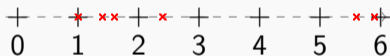


Figure: Exemple de processus de sauts

► Chapitre 3: Processus de Hawkes

Si on s'intéresse à la valeur du potentiel

Modèles continus : processus Intègre-et-tir, Hodgkin-Huxley, FitzHugh-Nagumo, ...

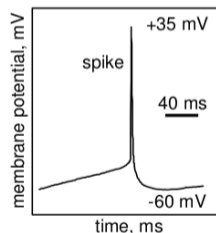


Figure: Décharge enregistrée *in vitro*, Eugene M. Izhikevich (2005)

► Chapitre 4: Processus de FitzHugh-Nagumo

1. Introduction: Modélisation neuronale
2. Processus de Hawkes
3. Processus de FitzHugh-Nagumo
4. Conclusion et perspectives

1. Introduction: Modélisation neuronale
2. Processus de Hawkes
 - Définition
 - Nouveau point de vue
 - Résultat et idées de preuve
 - Exemple
3. Processus de FitzHugh-Nagumo
4. Conclusion et perspectives

Définition

Soit $\lambda > 0$ et $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable signée.

Un processus de Hawkes¹ N^h d'intensité initiale λ est un processus ponctuel auto-influent dont l'intensité est donné à chaque instant $t \geq 0$ par:

$$\begin{aligned} \Lambda^h : t \in (0, +\infty) \mapsto &= \left(\lambda + \sum_{i \geq 1} h(t - U_i) \right)^+ \\ &= \left(\lambda + \int_{(-\infty, t)} h(t - u) N^h(du) \right)^+, \end{aligned}$$

où $(U_i)_i$ sont les sauts de N^h .

¹Alan G. Hawkes. "Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes". In: *Biometrika* 58.1 (1971), pp. 83–90.

Construction de Costa, Graham, Marsalle, Tran²

Proposition

Soit Q une mesure aléatoire de Poisson $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ - mesurable sur $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ d'intensité unitaire. On considère les équations

$$\begin{cases} \Lambda^h(t) = \left(\lambda + \int_{(-\infty, t)} h(t-u) N^h(du) \right)^+, & u > 0, \\ N^h = \int_{(0, +\infty) \times (0, +\infty)} \delta_u \mathbb{1}_{\theta \leq \Lambda^h(u)} Q(du, d\theta). \end{cases} \quad (1)$$

Si $\|h^+\| < 1$, et sous certaines hypothèses, alors il existe une solution, et cette solution est un processus de Hawkes.

On peut écrire N^h comme : $N^h = \sum_{i \geq 1} \delta_{U_i}$ où les U_i sont les sauts.

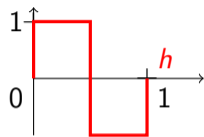
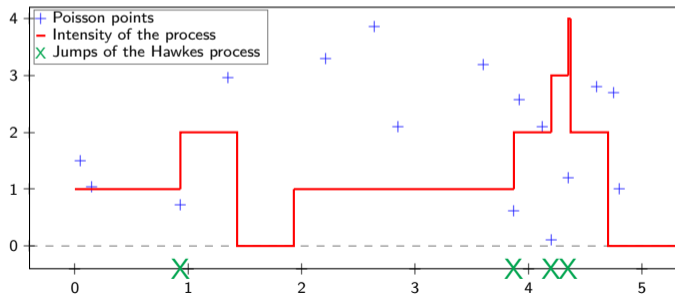
²Manon Costa, Carl Graham, Laurence Marsalle, and Viet Chi Tran. "Renewal in Hawkes Processes with Self-Excitation and Inhibition". In: *Advances in Applied Probability* 52.3 (2020), pp. 879–915.

Exemple

Exemple

$$\lambda = 1$$

$$h = \mathbb{1}_{[0,0.5]} - \mathbb{1}_{(0.5,1]}$$

Figure: fonction h Figure: N^h et son intensité au cours du temps

Remarques

Remarque

Cette proposition fournit un moyen de coupler des processus de Hawkes.

Proposition

Au sens des mesures, $N^h \leq N^{h^+}$.

Exemple

Si $h \leq 0$, alors $h^+ = 0$.

Dans ce cas: N^h est inférieur à un processus de Poisson de paramètre λ .

Hypothèses

Objet d'intérêt: nombre de sauts sur un intervalle $[0, t]$: $N^h([0, t]) = N_t^h$, quand t tend vers ∞ .

Premières hypothèses

- ▶ $\|h^+\|_1 < 1$
- ▶ Condition initiale vide: $N^h([-\infty, 0]) = 0$
- ▶ h a un support compact, inclus dans $[0, L(h)]$

Etat de l'art

Cas linéaire: h positive. On suppose $\|h\|_{L^1(du)} < 1$.

Loi des grands nombres³

$$\frac{N_t^h}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\lambda}{1 - \|h\|_{L^1(du)}} := \mu \quad ,$$

et Théorème Central Limite

$$\frac{N_t^h - \mu t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}^h \left(0, \frac{\lambda}{(1 - \|h\|_{L^1(du)})^3} \right) .$$

³Daryl J. Daley and David Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. 2nd ed. Probability and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 2003. 471 pp.

Etat de l'art

Cas linéaire: h positive. On suppose $\|h\|_{L^1(du)} < 1$.

Bordenave et Torrisi³ obtiennent un Principe de Grandes Déviations pour N_t^h/t , quand $h \geq 0$ avec fonction de taux

$$I(x) = x \ln \left(\frac{x}{\lambda + x \|h\|_{L^1(du)}} \right) - x(1 - \|h\|_{L^1(du)}) + \lambda.$$

(L'expression explicite a été obtenue par Zhu⁴ p.761.)

³Charles Bordenave and Giovanni Luca Torrisi. “Large Deviations of Poisson Cluster Processes”. In: *Stochastic Models* 23.4 (2007), pp. 593–625.

⁴Lingjiong Zhu. “Central Limit Theorem for NonLinear Hawkes Processes”. In: *Journal of Applied Probability* 50.3 (2013), pp. 760–771. JSTOR: 43283499.

1. Introduction: Modélisation neuronale

2. Processus de Hawkes

- Définition
- **Nouveau point de vue**
- Résultat et idées de preuve
- Exemple

3. Processus de FitzHugh-Nagumo

4. Conclusion et perspectives

Processus cumulatif (Asmussen⁵)

Définition de Asmussen

Soit $(\tau_i, W_i)_i$ des couples de variables aléatoires i.i.d.

Soit M_t le processus de comptage associé à $(\tau_i)_i$:

$$M_t = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n \tau_i \leq t \right\}.$$

Le *processus cumulatif* associé aux $(\tau_i, W_i)_i$ est

$$Z_t = \sum_{i=1}^{M_t} W_i.$$

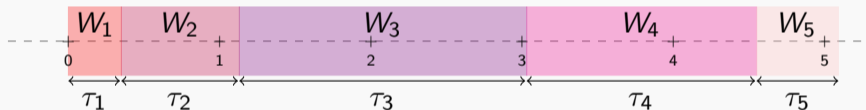
⁵Soeren Asmussen. *Applied Probability and Queues*. 2nd ed. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer-Verlag, 2003.

Processus cumulatif

Exemple

$(\tau_i)_i$ une suite de temps aléatoires qui représentent des intervalles sur \mathbb{R}^+ .

W_i une quantité aléatoire associée au i -ème intervalle.



Attention : $(\tau_i, W_i)_i$ sont des couples i.i.d., mais à i fixé τ_i et W_i ne sont pas supposés indépendantes.

Etat de l'art pour les processus cumulatifs

Objet d'intérêt: processus $Z_t = \sum_{i=1}^{M_t} W_i$ à l'instant t quand t tend vers $+\infty$.

- ▶ Loi des grands nombres (peut être trouvée dans Asmussen)
- ▶ Théorème centrale limite (peut être trouvé dans Asmussen)
- ▶ Principe de grandes déviations (Borovkov, Mogul'skii⁶ ; Cattiaux, C., Costa⁷; Zamparo⁸)

⁶Alexander A. Borovkov and Anatolii A. Mogul'skii. "Large Deviation Principles for the Finite-Dimensional Distributions of Compound Renewal Processes". In: *Siberian Mathematical Journal* 56.1 (2015), pp. 28–53.

⁷Patrick Cattiaux, Laetitia Colombani, and Manon Costa. *Large Deviation Principles for Cumulative Processes and Applications*. 2021. arXiv: 2109.07800.

⁸Marco Zamparo. *Large Deviation Principles for Renewal-Reward Processes*. 2021. arXiv: 2111.01679.

Lien entre les processus de Hawkes et les processus cumulatifs

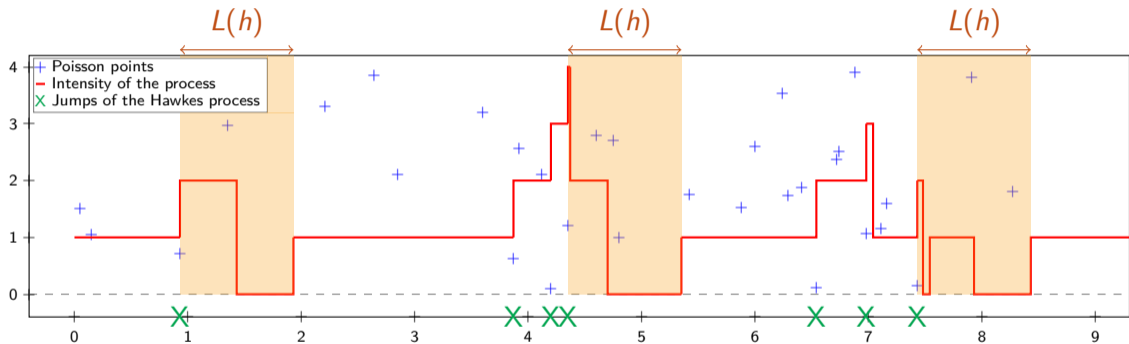
Hypothèse: h a un support compact.

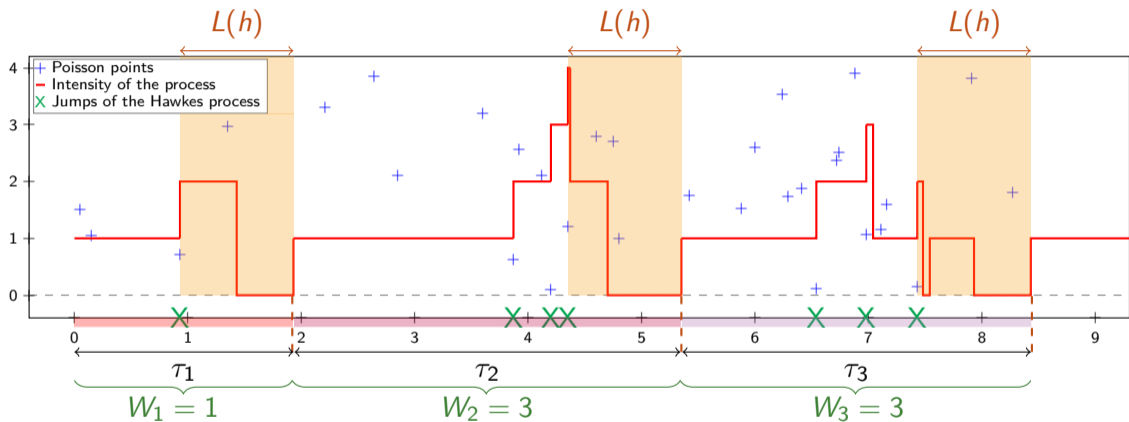
Le processus de Hawkes associé est un processus cumulatif.

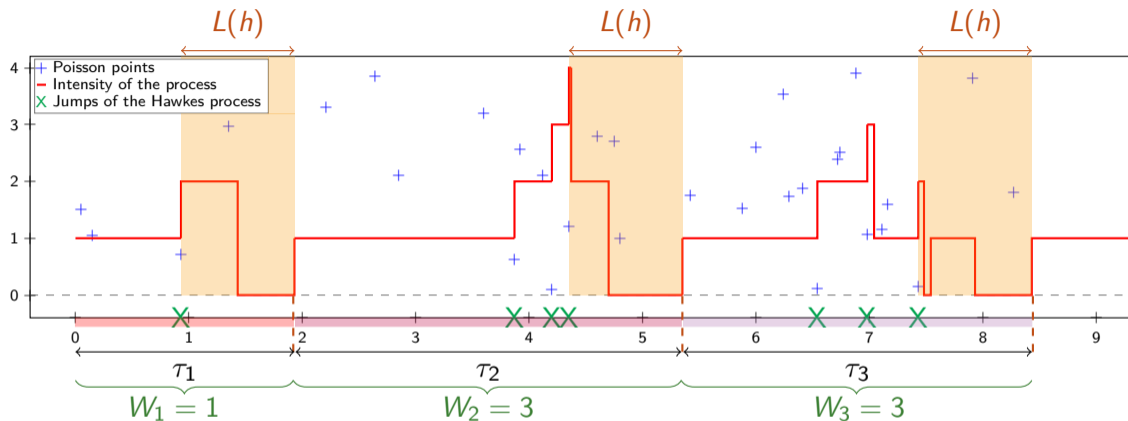
Intensité

$\Lambda^h(t) = \left(\lambda + \sum_{i \geq 1} h(t - U_i) \right)^+$, où U_i sont les sauts de N^h .

Si $t > U_i + L(h)$ pour tout $U_i < t$, alors $\Lambda^h(t) = \lambda$.







$$\tau_1 = \inf\{t > U_1, N^h((t - L(h), t]) = 0\}$$

$$W_1 = N^h([0, \tau_1]).$$

$$N^h(t) = \sum_{i=1}^{M_t} W_i + R_t$$

$$\text{où } 0 \leq R_t \leq W_{M_t+1}$$

1. Introduction: Modélisation neuronale

2. Processus de Hawkes

- Définition
- Nouveau point de vue
- **Résultat et idées de preuve**
- Exemple

3. Processus de FitzHugh-Nagumo

4. Conclusion et perspectives

Résultats

Loi des grands nombres et Théorème Centrale Limite pour les processus de Hawkes [Cattiaux, C., Costa]

Soit h une fonction signée, dont le support est inclus dans $[0, L(h)]$. Alors on a :

$$\frac{N_t^h}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\mathbb{E}[W_1]}{\mathbb{E}[\tau_1]}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \left(N_t^h - \frac{\mathbb{E}[W_1]}{\mathbb{E}[\tau_1]} t \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = \text{Var} \left(W_1 - \frac{\mathbb{E}[W_1]}{\mathbb{E}[\tau_1]} \tau_1 \right)$.

Inégalités de grandes déviations

Soit θ_0 tel que $\forall \theta < \theta_0, \mathbb{E}(e^{\theta|W|}) < \infty$.

Inégalités de grandes déviations [Cattiaux, C., Costa]

- ▶ Si $\theta_0 = \infty$, alors N_t^h/t satisfait un Principe de Grandes Déviations.

Inégalités de grandes déviations

Soit θ_0 tel que $\forall \theta < \theta_0, \mathbb{E}(e^{\theta|W|}) < \infty$.

Inégalités de grandes déviations [Cattiaux, C., Costa]

► Si $\theta_0 < +\infty$, on a pour tout $a > 0$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{N_t^h}{t} > m + a \right) \leq - \min \left[\inf_{z \geq m+a/2} J(z), \theta_0 a/4 \right],$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{N_t^h}{t} < m - a \right) \leq - \min \left[\inf_{z \leq m-a/2} J(z), \theta_0 a/4 \right],$$

où on définit

$$\Lambda^*(a, b) = \sup_{x, y} \left\{ ax + by - \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{x\tau + yW} \right] \right) \right\} \quad \text{et} \quad J(z) = \inf_{\beta > 0} \beta \Lambda^* \left(\frac{1}{\beta}, \frac{z}{\beta} \right).$$

1. Introduction: Modélisation neuronale

2. Processus de Hawkes

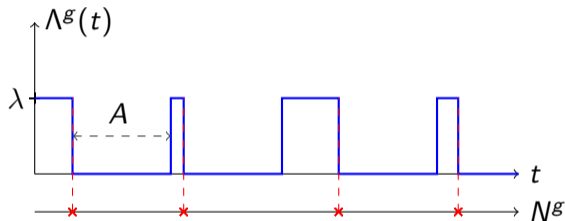
- Définition
- Nouveau point de vue
- Résultat et idées de preuve
- Exemple

3. Processus de FitzHugh-Nagumo

4. Conclusion et perspectives

Exemples

1. Soit $g = -\lambda \mathbb{1}_{[0,A]}$.



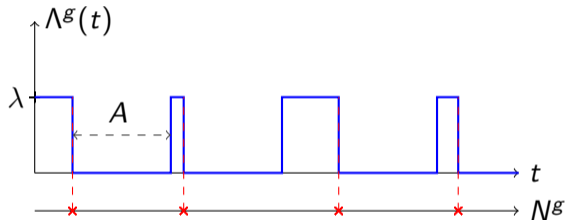
Alors $\frac{N_t^g}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\lambda}{\lambda A + 1}$.

$\theta_0 = \infty$

Remarque: $\|g\|_1 = \lambda A$

Exemples

1. Soit $g = -\lambda \mathbb{1}_{[0,A]}$.

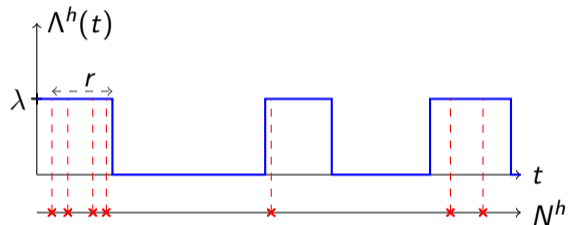


$$\text{Alors } \frac{N_t^g}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\lambda}{\lambda A + 1}.$$

$$\theta_0 = \infty$$

$$\text{Remarque: } \|g\|_1 = \lambda A$$

2. Soit $h = -\lambda \mathbb{1}_{[r,r+A]}$ avec $r < A$.



$$\text{Alors } \frac{N_t^g}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\lambda(1 + \lambda r)}{\lambda A + 2\lambda r + e^{-r}}.$$

$$\theta_0 = \infty$$

Remarque: Pas de lien direct avec $\|h\|_1 = \lambda A$, importance de r .

Conclusion

Pour un h signé, on a donc:

- ▶ p.s., pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t^g \leq N_t^h$, pour $g = -\lambda \mathbb{1}_{[0, L(h)]}$.
- ▶ p.s, $N^h \leq N^{h^+}$.

Conséquence

Pour tout h à support compact:

$$\frac{\lambda}{\lambda L(h) + 1} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t^h}{t} \leq \frac{\lambda}{1 - \|h^+\|_1} \quad p.s.$$

1. Introduction: Modélisation neuronale
2. Processus de Hawkes
- 3. Processus de FitzHugh-Nagumo**
 - Définition
 - Résultats
 - Stratégie de preuve
4. Conclusion et perspectives

Que modélise-t-on?

- ▶ Modéliser le potentiel de membrane
- ▶ Bruit du courant présynaptique
- ▶ Bruit de la dynamique de conductance
- ▶ Transmission de potentiel entre des neurones via des synapses

Que modélise-t-on?

- ▶ Modéliser le potentiel de membrane X
- ▶ Bruit du courant présynaptique
- ▶ Bruit de la dynamique de conductance
- ▶ Transmission de potentiel entre des neurones via des synapses

Modèle déterministe

$$\begin{cases} dX_t = (X_t - (X_t)^3 - C_t - \alpha)dt \\ dC_t = (\gamma X_t - C_t + \beta)dt \\ Z_t = (X_t, C_t). \end{cases}$$

C est une variable de récupération. α , β , γ sont fixés.

Que modélise-t-on?

- ▶ Modéliser le potentiel de membrane X
- ▶ Bruit du courant présynaptique B^X
- ▶ Bruit de la dynamique de conductance B^C
- ▶ Transmission de potentiel entre des neurones via des synapses

Modèle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = (X_t - (X_t)^3 - C_t - \alpha)dt + \sigma_x dB_t^X \\ dC_t = (\gamma X_t - C_t + \beta)dt + \sigma_c dB_t^C \\ Z_t = (X_t, C_t). \end{cases}$$

C est une variable de récupération.

Que modélise-t-on?

- ▶ Modéliser le potentiel de membrane X
- ▶ Bruit du courant présynaptique B^X
- ▶ Bruit de la dynamique de conductance B^C
- ▶ Transmission de potentiel entre des neurones via des synapses: interactions K_X et K_C

Modèle stochastique avec interactions

On considère N neurones et pour chaque $i \leq N$, $X^{i,N}$ et $C^{i,N}$ les quantités associées.

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = (X_t^{i,N} - (X_t^{i,N})^3 - C_t^{i,N} - \alpha)dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)dt + \sigma_X dB_t^{i,X} \\ dC_t^{i,N} = (\gamma X_t^{i,N} - C_t^{i,N} + \beta)dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_C(Z_t^i - Z_t^j)dt + \sigma_C dB_t^{i,C} \\ Z_t^{i,N} = (X_t^{i,N}, C_t^{i,N}). \end{cases} \quad (2)$$

Propagation du chaos

- ▶ Particules échangeables (loi symétrique)

Notion de chaos (Kac⁹, Sznitman¹⁰)

A k fixé, k particules dans un ensemble de N particules sont asymptotiquement i.i.d. quand N tend vers l'infini.

Propagation du chaos

A t fixé, si le système de N particules est initialement chaotique, alors il le reste à l'instant t .

Ainsi, à k et t fixés, les k particules parmi N , observées à l'instant t , sont asymptotiquement i.i.d. lorsque le nombre de particules N tend vers l'infini.

⁹Mark Kac. "Foundations of Kinetic Theory". In: *Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. 1956.

¹⁰Alain-Sol Sznitman. "Topics in Propagation of Chaos". In: *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX — 1989*.

1. Introduction: Modélisation neuronale
2. Processus de Hawkes
- 3. Processus de FitzHugh-Nagumo**
 - Définition
 - Résultats**
 - Stratégie de preuve
4. Conclusion et perspectives

Cadre de travail

Hypothèses

$\sigma_C > 0$ et/ou $\sigma_X > 0$.

Interactions Lipschitz.

Notations

Distribution initiale : $(\mu_0)^{\otimes N}$.

$\mu_t^{k,N}$: distribution marginale à l'instant t des k premiers neurones dans un réseau de N neurones avec cette distribution initiale.

Nous mesurons la distance entre $\mu_t^{k,N}$ et $\bar{\mu}_t^{\otimes k}$ où $\bar{\mu}_t$ est une mesure spécifique.

Définition de $\bar{\mu}_t$?

On note $K * \nu(x) = \int K(x - y)\nu(dy)$.

$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)$ peut être vu comme $K_X * \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{Z_t^j} \right)$ appliqué à Z_t^i .

Définition de $\bar{\mu}_t$?

On note $K * \nu(x) = \int K(x - y)\nu(dy)$.

$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)$ peut être vu comme $K_X * \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{Z_t^j} \right)$ appliqué à Z_t^i .

On construit un processus pour *une seule particule* (sans interaction).

Définition de $\bar{\mu}_t$?

On note $K * \nu(x) = \int K(x-y)\nu(dy)$.

$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)$ peut être vu comme $K_X * \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{Z_t^j}\right)$ appliqué à Z_t^i .

On construit un processus pour *une seule particule* (sans interaction).

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = (X_t^{i,N} - (X_t^{i,N})^3 - C_t^{i,N} - \alpha)dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)dt + \sigma_x dB_t^{i,X} \\ dC_t^{i,N} = (\gamma X_t^{i,N} - C_t^{i,N} + \beta)dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_C(Z_t^i - Z_t^j)dt + \sigma_c dB_t^{i,C} \\ Z_t^{i,N} = (X_t^{i,N}, C_t^{i,N}). \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = (\bar{X}_t - (\bar{X}_t)^3 - \bar{C}_t - \alpha)dt + K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t)dt + \sigma_x d\bar{B}_t^X \\ d\bar{C}_t = (\gamma \bar{X}_t - \bar{C}_t + \beta)dt + K_C * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t)dt + \sigma_c d\bar{B}_t^C \\ \bar{Z}_t = (\bar{X}_t, \bar{C}_t) \\ \bar{\mu}_t = \text{Loi}((\bar{X}_t, \bar{C}_t)). \end{cases}$$

Equation différentielle stochastique non-linéaire de type McKean-Vlasov

Définition of $\bar{\mu}_t$?

Pour $1 \leq i \leq N$,

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{X}_t^i = (\bar{X}_t^i - (\bar{X}_t^i)^3 - \bar{C}_t^i - \alpha)dt + K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i)dt + \sigma_X d\bar{B}_t^{i,X} \\ d\bar{C}_t^i = (\gamma\bar{X}_t^i - \bar{C}_t^i + \beta)dt + K_C * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i)dt + \sigma_C d\bar{B}_t^{i,C} \\ \bar{Z}_t^i = (\bar{X}_t^i, \bar{C}_t^i) \\ \bar{\mu}_t = \text{Loi}((\bar{X}_t^1, \bar{C}_t^1)), \end{array} \right.$$

Alors $\bar{\mu}_t^{\otimes k}$ est la loi de $(\bar{Z}_t^1, \dots, \bar{Z}_t^k)$.

- ▶ Même type de drift (ou dérive).
- ▶ Même idée pour l'interaction.
- ▶ Bruit Brownien.

Résultat: Propagation du chaos

Soit K_X L_X -Lipschitz, K_C L_C -Lipschitz. On rappelle que σ_X ou σ_C peut-être nul.

Propagation du chaos non uniforme en temps [C., Le Bris]

Il existe des constantes explicites $C_1, C_2 > 0$, telles que pour toute bonne mesure de probabilité μ_0 sur \mathbb{R}^2 on a

$$\mathcal{W}_1\left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k}\right) \leq C_1 e^{C_2 t} \frac{k}{\sqrt{N}}.$$

Résultat: Propagation du chaos

Soit K_X L_X -Lipschitz, K_C L_C -Lipschitz. On rappelle que σ_X ou σ_C peut-être nul.

Propagation du chaos non uniforme en temps [C., Le Bris]

Il existe des constantes explicites $C_1, C_2 > 0$, telles que pour toute bonne mesure de probabilité μ_0 sur \mathbb{R}^2 on a

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq C_1 e^{C_2 t} \frac{k}{\sqrt{N}}.$$

Propagation du chaos uniforme en temps [C., Le Bris]

Sous certaines conditions sur L_X et L_C , il existe une constante explicite $B_1 > 0$, telle que pour toute bonne mesure de probabilité μ_0 sur \mathbb{R}^2 on a

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq B_1 \frac{k}{\sqrt{N}}.$$

1. Introduction: Modélisation neuronale
2. Processus de Hawkes
- 3. Processus de FitzHugh-Nagumo**
 - Définition
 - Résultats
 - **Stratégie de preuve**
4. Conclusion et perspectives

Stratégie: Méthode de couplage

Distance de Wasserstein

$$\mathcal{W}_1(\nu, \nu') = \inf_{\pi \in \Pi(\nu, \nu')} \int d(z, z') \pi(dz, dz')$$

Stratégie: Méthode de couplage

Distance de Wasserstein

$$\mathcal{W}_1(\nu, \nu') = \inf_{\pi \in \Pi(\nu, \nu')} \int d(z, z') \pi(dz, dz')$$

Deux choix :

- ▶ choix du couplage π
- ▶ choix de la distance (ou d'une majoration de) d

Stratégie: Méthode de couplage

Idée naïve: couplage synchrone

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i| \right]$$

Stratégie: Méthode de couplage

Idée naïve: couplage synchrone

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i| \right]$$

Etude de la dynamique de $d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i)$ et $d(C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i)$.

Stratégie: Méthode de couplage

Idée naïve: couplage synchrone

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i| \right]$$

Etude de la dynamique de $d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i)$ et $d(C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i)$.

On définit $\bar{B}_t^{i,X} = B_t^{i,X}$ et $\bar{B}_t^{i,C} = B_t^{i,C}$.

$$d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i) = (\text{Drift on } X_t^{i,N})dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)dt - (\text{Drift on } \bar{X}_t^i)dt - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i)dt$$

Stratégie: Méthode de couplage

Idée naïve: couplage synchrone

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i| \right]$$

Etude de la dynamique de $d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i)$ et $d(C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i)$.

On définit $\bar{B}_t^{i,X} = B_t^{i,X}$ et $\bar{B}_t^{i,C} = B_t^{i,C}$.

$$d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i) = (\text{Drift on } X_t^{i,N})dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)dt - (\text{Drift on } \bar{X}_t^i)dt - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i)dt$$

Lemme de Gronwall sur $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left[|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i| \right] \Rightarrow$ premier théorème prouvé (non uniforme in temps).

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

(Ici $\sigma_X > 0$). On considère, pour un bon δ :

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + \delta |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i|) \right]$$

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

(Ici $\sigma_X > 0$). On considère, pour un bon δ :

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + \delta |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i|) \right]$$

Etude de la dynamique $d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i)$ et $d(C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i)$.

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

(Ici $\sigma_X > 0$). On considère, pour un bon δ :

$$\mathcal{W}_1 \left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k} \right) \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + \delta |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i|) \right]$$

Etude de la dynamique $d(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i)$ et $d(C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i)$.

Dans le sous-espace $\{(X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i) = 0\}$: contraction déterministe. \Rightarrow Couplage synchrone

Dans le sous-espace orthogonal \Rightarrow Couplage par réflexion (maximisation de la variance)

Couplage non-synchrone. On mélange un couplage par réflexion et un couplage synchrone.

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

On considère deux bruits Gaussiens pour chaque i : $B^{i,sc,X}$, $B^{i,rc,X}$.

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

On considère deux bruits Gaussiens pour chaque i : $B^{i,sc,X}$, $B^{i,rc,X}$.

On considère deux fonctions sc et rc : $\mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ tel que $rc^2 + sc^2 = 1$:

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

On considère deux bruits Gaussiens pour chaque i : $B^{i,sc,X}$, $B^{i,rc,X}$.

On considère deux fonctions sc et rc : $\mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ tel que $rc^2 + sc^2 = 1$:

$$\begin{aligned} dB_t^{i,X} &= sc \left(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| \right) dB_t^{i,sc,X} + rc \left(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| \right) dB_t^{i,rc,X} & d\bar{B}_t^{i,C} &= dB_t^{i,C} \\ d\bar{B}_t^{i,X} &= sc \left(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| \right) dB_t^{i,sc,X} - rc \left(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| \right) dB_t^{i,rc,X} \end{aligned}$$

Alors:

$$dB_t^{i,X} - d\bar{B}_t^{i,X} = 2rc \left(|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| \right) dB_t^{i,rc,X}$$

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

Deux fonctions de Lyapunov:

1) Suffisant pour avoir de bonnes bornes sur les moments de Z_t^i et \bar{Z}_t^i .

$$H(z) = \frac{1}{2}\gamma x^2 + \beta x + \frac{1}{2}c^2 + \alpha c + H_0$$

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

Deux fonctions de Lyapunov:

1) Suffisant pour avoir de bonnes bornes sur les moments de Z_t^i et \bar{Z}_t^i .

$$H(z) = \frac{1}{2}\gamma x^2 + \beta x + \frac{1}{2}c^2 + \alpha c + H_0$$

2) Besoin d'un meilleur contrôle du bruit :

$$\tilde{H}(z) = \int_0^{H(z)} \exp(a\sqrt{u}) du = \frac{2}{a^2} \exp\left(a\sqrt{H(z)}\right) \left(a\sqrt{H(z)} - 1\right) + \frac{2}{a^2}.$$

Stratégie: Méthode de couplage

Idee améliorée: couplage mélangé

Deux fonctions de Lyapunov:

2) Besoin d'un meilleur contrôle du bruit :

$$\tilde{H}(z) = \int_0^{H(z)} \exp(a\sqrt{u}) du = \frac{2}{a^2} \exp\left(a\sqrt{H(z)}\right) \left(a\sqrt{H(z)} - 1\right) + \frac{2}{a^2}.$$

On définit une nouvelle "distance":

$$\rho\left((z_j, z'_j)_{1 \leq j \leq N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f\left(d(z_i, z'_i)\right) \left(1 + \epsilon \tilde{H}(z_i) + \epsilon \tilde{H}(z'_i) + \dots\right)$$

avec f concave.

Stratégie: Méthode de couplage

Idée améliorée: couplage mélangé

Avec ce couplage et cette dynamique, on travaille sur la dynamique de $e^{ct} \rho \left((Z_t^{j,N}, \bar{Z}_t^j)_{1 \leq j \leq N} \right)$.
Bon choix de paramètres + contraction dans les différents espaces + lemme de Gronwall \Rightarrow
Second théorème (uniforme en temps)

Etat de l'art: couplage mélangé

- ▶ Lindvall, Rogers (1986). *"Coupling of Multidimensional Diffusions by Reflection"*
- ▶ Eberle, Zimmer (2016). *"Sticky couplings of multidimensional diffusions with different drifts"*
 - ▶ Discute de l'approche de couplages collants
 - ▶ Fournit des bornes de variation totale
 - ▶ Prouve la contraction d'un processus sur un sous-espace linéaire
- ▶ Eberle, Guillin, Zimmer (2019). *"Couplings and quantitative contraction rates for Langevin dynamics"*
 - ▶ appliqué à l'équation de Langevin sans interaction

1. Introduction: Modélisation neuronale
2. Processus de Hawkes
3. Processus de FitzHugh-Nagumo
4. Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives pour les processus à sauts

Ce qu'on a réussi à faire

- ▶ Nouveau point de vue sur les processus de Hawkes avec h compact
- ▶ Principe de Grandes Déviations pour les processus cumulatifs
- ▶ Résultats asymptotiques pour les processus de Hawkes avec h compact

Conclusion et perspectives pour les processus à sauts

Ce qu'on a réussi à faire

- ▶ Nouveau point de vue sur les processus de Hawkes avec h compact
- ▶ Principe de Grandes Déviations pour les processus cumulatifs
- ▶ Résultats asymptotiques pour les processus de Hawkes avec h compact

Perspectives

- ▶ Résultats non asymptotiques pour les processus cumulatifs
- ▶ Estimations et statistiques pour les processus de Hawkes
- ▶ Lien entre h et la loi de (τ, W)

Conclusion et perspectives pour les processus continus

Ce qu'on a réussi à faire

- ▶ Propagation du chaos uniforme en temps pour les FitzHugh-Nagumo

Conclusion et perspectives pour les processus continus

Ce qu'on a réussi à faire

- ▶ Propagation du chaos uniforme en temps pour les FitzHugh-Nagumo

Perspectives

- ▶ Autres types d'interaction
- ▶ Bruit environnemental: $dZ_t^i = f(Z_t^i)dt + \sigma dB_t$
- ▶ Paramètres individuels $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$
- ▶ Synchronisation

Thank you

- ▶ Patrick Cattiaux, Laetitia Colombani, and Manon Costa. *Large Deviation Principles for Cumulative Processes and Applications*. 2021. arXiv: 2109.07800
- ▶ Patrick Cattiaux, Laetitia Colombani, and Manon Costa. “Limit Theorems for Hawkes Processes Including Inhibition”. In: *Stochastic Processes and their Applications* (2022)
- ▶ Laetitia Colombani and Pierre Le Bris. *Chaos Propagation in Mean Field Networks of FitzHugh-Nagumo Neurons*. 2022. arXiv: 2206.13291

Strategy: Coupling method (return)

Naive idea: Synchronous coupling

Steps:

Strategy: Coupling method (return)

Naive idea: Synchronous coupling

Steps:

1) Denote $r_t^i = |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i|$. Then

$$dr_t^i \leq \left[Cr_t^i + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_C(Z_t^i - Z_t^j) - K_C * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| \right] dt.$$

Strategy: Coupling method (return)

Naive idea: Synchronous coupling

Steps:

1) Denote $r_t^i = |X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i| + |C_t^{i,N} - \bar{C}_t^i|$. Then

$$dr_t^i \leq \left[Cr_t^i + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_C(Z_t^i - Z_t^j) - K_C * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| \right] dt.$$

2) Decompose interaction part

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(\bar{Z}_t^i - \bar{Z}_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(\bar{Z}_t^i - \bar{Z}_t^j) \right|. \end{aligned}$$

Strategy: Coupling method (return)

Naive idea: Synchronous coupling

Steps:

2) Decompose interaction part

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(\bar{Z}_t^i - \bar{Z}_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(\bar{Z}_t^i - \bar{Z}_t^j) \right|.$$

First sum: bounded by $\sum r_t^j$ thanks to Lipschitz property.

Strategy: Coupling method (return)

Naive idea: Synchronous coupling

Steps:

2) Decompose interaction part

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(\bar{Z}_t^i - \bar{Z}_t^j) - K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t^i) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_X(\bar{Z}_t^i - \bar{Z}_t^j) \right|.$$

First sum: bounded by $\sum r_t^j$ thanks to Lipschitz property.

Second sum: we bound expectation of the sum with sort of law of large numbers.

Strategy: Coupling method (return)

Naive idea: Synchronous coupling

Steps:

3) Finally

$$d\mathbb{E}(r_t^i) \leq \left(C\mathbb{E}(r_t^i) + C \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\mathbb{E}(\|\bar{Z}_t\|_1^2) \right)^{1/2} \right) dt.$$

Good bounds on $\mathbb{E}(\|\bar{Z}_t\|_1^2)$ + Gronwall's lemma \Rightarrow first theorem proved (non uniform in time)

State of the art : FitzHugh-Nagumo (return)

- ▶ León, Samson (2018). *"Hypoelliptic stochastic FitzHugh–Nagumo neuronal model: mixing, up-crossing and estimation of the spike rate"*
 - ▶ Noise only on C (conductance dynamic)
 - ▶ Study of equations for one neuron.

State of the art : FitzHugh-Nagumo (return)

- ▶ León, Samson (2018). *"Hypoelliptic stochastic FitzHugh–Nagumo neuronal model: mixing, up-crossing and estimation of the spike rate"*
 - ▶ Noise only on C (conductance dynamic)
 - ▶ Study of equations for one neuron.
- ▶ Mischler, Quininao, Touboul (2016). *"On a kinetic FitzHugh-Nagumo model of neuronal network"*.
 - ▶ Noise only on X (presynaptic current).
 - ▶ Linear interaction on X ($K_C = 0$ and $K_X(x, c) = \lambda x$).
 - ▶ Study on N neurons (propagation of chaos, existence, uniqueness)

State of the art : FitzHugh-Nagumo (return)

- ▶ León, Samson (2018). *"Hypoelliptic stochastic FitzHugh–Nagumo neuronal model: mixing, up-crossing and estimation of the spike rate"*
 - ▶ Noise only on C (conductance dynamic)
 - ▶ Study of equations for one neuron.
- ▶ Mischler, Quinao, Touboul (2016). *"On a kinetic FitzHugh-Nagumo model of neuronal network"*.
 - ▶ Noise only on X (presynaptic current).
 - ▶ Linear interaction on X ($K_C = 0$ and $K_X(x, c) = \lambda x$).
 - ▶ Study on N neurons (propagation of chaos, existence, uniqueness)
- ▶ Bossy, Faugeras, Talay (2015). *"Clarification and Complement to "Mean-Field Description and Propagation of Chaos in Networks of Hodgkin–Huxley and FitzHugh–Nagumo Neurons"*
 - ▶ Noise only on X
 - ▶ Interaction more complicated, on X
 - ▶ Propagation of chaos and convergence

Large Deviations Principle for Cumulative Process (return)

Important assumptions for LDP for cumulative processes

- ▶ $\exists \beta_0 \in (0, +\infty]$ such that $\mathbb{E}[e^{\beta\tau}] < \infty$ for $\beta < \beta_0$,
- ▶ $\exists \theta_0 \in (0, +\infty]$ such that $\mathbb{E}[e^{\theta|W|}] < \infty$, for $\theta < \theta_0$.

Large deviation principle for Cumulative Process (return)

Rate functions

For W^n a well-chosen reduction of W , we introduce the Cramer transform for $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, and the rate function J^n associated for $z \in \mathbb{R}^+$

$$\Lambda_n^*(a, b) = \sup_{x, y} \left\{ ax + by - \ln \mathbb{E} \left(e^{x\tau + yW^n} \right) \right\} \quad \text{and} \quad J^n(z) = \inf_{\beta > 0} \beta \Lambda_n^* \left(\frac{1}{\beta}, \frac{z}{\beta} \right).$$

We also define

$$\tilde{J}(z) = \sup_{\delta > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{|y-z| < \delta} J^n(y).$$

For W , we introduce the Cramer transform for $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, , and the rate function J associated for $z \in \mathbb{R}^+$

$$\Lambda^*(a, b) = \sup_{x, y} \left\{ ax + by - \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{x\tau + yW} \right] \right) \right\} \quad \text{and} \quad J(z) = \inf_{\beta > 0} \beta \Lambda^* \left(\frac{1}{\beta}, \frac{z}{\beta} \right).$$

Large deviation principle for Cumulative Process (return)

Theorem

- If $\theta_0 = +\infty$ (in particular if W is bounded) then $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i$ satisfies a full LDP with good rate function \tilde{J} , i.e.

$$\text{for any closed set } \mathcal{C} \in \mathbb{R}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i \in \mathcal{C} \right) \leq - \inf_{m \in \mathcal{C}} \tilde{J}(m),$$

$$\text{for any open set } \mathcal{O} \in \mathbb{R}, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i \in \mathcal{O} \right) \leq - \inf_{m \in \mathcal{O}} \tilde{J}(m).$$

Large deviation principle for Cumulative Process (return)

Theorem

- If $\theta_0 = +\infty$ (in particular if W is bounded) then $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i$ satisfies a full LDP with good rate function \tilde{J} . We also have the following inequalities

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i \geq m + a \right) \leq - \inf_{z \geq m+a} J(z),$$

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i \leq m - a \right) \leq - \inf_{z \leq m-a} J(z).$$

Large deviation principle for Cumulative Process (return)

Theorem

- ▶ If $\theta_0 = +\infty$ (in particular if W is bounded) then $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i$ satisfies a full LDP with good rate function \tilde{J} .
- ▶ If $\theta_0 < +\infty$, denoting $m = \mathbb{E}(W)/\mathbb{E}(\tau)$ we have for all $a > 0$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i \geq m + a \right) \leq - \min \left[\inf_{z \geq m + (a/2)} J(z), \theta_0 a/4 \right],$$

and

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{M_t} W_i < m - a \right) \leq - \min \left[\inf_{z \leq m - (a/2)} J(z), \theta_0 a/4 \right].$$

Proposition for Hawkes process (return)

Let θ_0 such that $\forall \theta < \theta_0, \mathbb{E}(e^{\theta|W|}) < \infty$.

Rate functions

For W^n a well-chosen reduction of W , we introduce the Cramer transform for $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, and the rate function J^n associated for $z \in \mathbb{R}^+$

$$\Lambda_n^*(a, b) = \sup_{x, y} \left\{ ax + by - \ln \mathbb{E} \left(e^{x\tau + yW^n} \right) \right\} \quad \text{and} \quad J^n(z) = \inf_{\beta > 0} \beta \Lambda_n^* \left(\frac{1}{\beta}, \frac{z}{\beta} \right).$$

We also define

$$\tilde{J}(z) = \sup_{\delta > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{|y-z| < \delta} J^n(y).$$

For W ,

$$\Lambda^*(a, b) = \sup_{x, y} \left\{ ax + by - \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{x\tau + yW} \right] \right) \right\} \quad \text{and} \quad J(z) = \inf_{\beta > 0} \beta \Lambda^* \left(\frac{1}{\beta}, \frac{z}{\beta} \right).$$

Proposition for Hawkes process (return)

Let θ_0 such that $\forall \theta < \theta_0, \mathbb{E}(e^{\theta|W|}) < \infty$.

Theorem

- ▶ If $\theta_0 = \infty$, then N_t^h/t satisfies a LDP with rate function \tilde{J} .
- ▶ If $\theta_0 < +\infty$, we have for all $a > 0$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{N_t^h}{t} > m + a \right) \leq - \min \left[\inf_{z \geq m+a/2} J(z), \theta_0 a/4 \right].$$

Similarly

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P} \left(\frac{N_t^h}{t} < m - a \right) \leq - \min \left[\inf_{z \leq m-a/2} J(z), \theta_0 a/4 \right].$$