

Centrale 2007. Filière MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par J.L. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Questions préliminaires.

Question I.A.

Nous supposons que l'espace d'arrivée est \mathbb{R} ou \mathbb{C} ou tout au moins un espace normé complet.

- Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Puisque la suite (u_n) est uniformément convergente sur I , elle y satisfait le critère de Cauchy de convergence uniforme donc :

$$\exists N_0 = N_0(\varepsilon) \text{ t.q. } |u_p(x) - u_q(x)| \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq N_0 \quad \forall x \in I \quad (1).$$

En fixant dans l'inégalité ci-dessus p et q et en faisant tendre x vers a il vient $|\ell_p - \ell_q| \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq N_0 \quad (2)$.

Ce qui prouve que la suite (ℓ_n) est de Cauchy donc convergente vers une limite notée ℓ . \square

- Nous avons $|U(x) - \ell| \leq |U(x) - u_{N_0}(x)| + |u_{N_0}(x) - \ell_{N_0}| + |\ell_{N_0} - \ell| \quad \forall x \in I \quad (3)$.

En fixant x quelconque dans I , q égal à N_0 et en faisant tendre p vers $+\infty$ dans (1) il vient :

$$|U(x) - u_{N_0}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I \quad (4).$$

En fixant $q = N_0$ dans (2) et en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $|\ell_{N_0} - \ell| \leq \varepsilon \quad (5)$.

Tenant compte de (4) et (5), l'inégalité (3) s'écrit $|U(x) - \ell| \leq 2\varepsilon + |u_{N_0}(x) - \ell_{N_0}| \quad \forall x \in I$.

Or puisque $\lim_{x \rightarrow a} u_{N_0}(x) = \ell_{N_0}$, il existe un voisinage V de a dans I tel que $|u_{N_0}(x) - \ell_{N_0}| \leq \varepsilon$ pour $x \in V$.

Ainsi $|U(x) - \ell| \leq 3\varepsilon$ pour $x \in V$ ce qui prouve bien que $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = \ell$. \square

Question I.B.

Notons $\alpha = \frac{k}{\omega}$, $n = n(t)$ l'entier tel que $nT \leq t < (n+1)T$ et $r = r(t) = t - nT$.

Notons également $\varphi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t e^{ikx} g(x) dx = \frac{1}{t} \int_0^t e^{i\alpha\omega x} g(x) dx$.

Par changement de variables il vient, pour tout entier j :

$$\int_{jT}^{(j+1)T} e^{i\alpha\omega x} g(x) dx = \int_0^T e^{i\alpha\omega(jT+x)} g(jT+x) dx = (e^{i\alpha 2\pi})^j \int_0^T e^{i\alpha\omega x} g(x) dx \quad (1).$$

- Premier cas : $kT \in 2\pi\mathbb{Z}$ i.e. $\alpha \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Alors } \int_{jT}^{(j+1)T} e^{i\alpha\omega x} g(x) dx = \int_0^T e^{ip\omega x} g(x) dx = Tc_{-p}(g) \text{ et } \varphi(t) = \frac{1}{nT+r} \left(nTc_{-p}(g) + \int_0^r e^{ip\omega x} g(x) dx \right).$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $n = n(t)$ également et $r = r(t)$ reste borné entre 0 et T . Ainsi $nT+r \sim nT$.

Par ailleurs $\int_0^r e^{ip\omega x} g(x) dx$ est borné car majoré en module par $\int_0^T |g(x)| dx$ clairement.

Il en découle que $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_{-p}(g)$. \square

- Second cas : $kT \notin 2\pi\mathbb{Z}$ i.e. $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Alors (1) s'écrit $\int_{jT}^{(j+1)T} e^{i\alpha\omega x} g(x) dx = \lambda^j \int_0^T e^{i\alpha\omega x} g(x) dx = \lambda^j L$ avec $\lambda \neq 1$ et $|\lambda| = 1$.

$$\text{Donc } \varphi(t) = \frac{1}{nT+r} \left(\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} L + \int_{nT}^{nT+r} e^{i\alpha\omega x} g(x) dx \right).$$

Or la quantité entre parenthèses est bornée car $\left| \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} L \right| \leq \frac{2}{|1-\lambda|} |L|$ et

$$\left| \int_{nT}^{nT+r} e^{i\alpha\omega x} g(x) dx \right| \leq \int_{nT}^{(n+1)T} |g(x)| dx = \int_0^T |g(x)| dx.$$

Il en découle que $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. \square

Question I.C.

Soit $f_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$. D'après le théorème de convergence normale de Dirichlet, la suite (f_n) converge normalement sur \mathbb{R} vers f .

Notons $u_n(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_n(t) g(t) dt$ et $U(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x) g(x) dx$ pour $t > 0$.

Il vient $|U(t) - u_n(t)| \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f(x) - f_n(x)| |g(x)| dx \leq N_\infty(g) N_\infty(f - f_n) = \varepsilon_n \quad \forall t > 0$

ce qui prouve que la suite (u_n) converge uniformément sur $I =]0, +\infty[$ vers U .

- Supposons que $\frac{T}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Alors $\frac{1}{t} \int_0^t e^{ikx} g(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ pour $k \neq 0$ d'après la question I.B.

Donc $u_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_0(f)c_0(g)$.

La question I.A prouve alors que $\frac{1}{t} \int_0^t f(x)g(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_0(f)c_0(g)$. \square

- Supposons que $\frac{T}{2\pi} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.

Alors $\frac{1}{t} \int_0^t e^{ikx} g(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ si $k \notin q\mathbb{Z}$ et vers $c_{-rp}(g)$ si $k = rq$ (question I.B).

Donc $u_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sum_{r=-R}^{r=R} c_{rq}(f)c_{-rp}(g)$ avec $Rq \leq n < (R+1)q$.

La question I.A prouve alors que la série $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{rq}(f)c_{-rp}(g)$ converge (au sens de Cauchy) et que

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(x)g(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{rq}(f)c_{-rp}(g) \quad \square$$

Il en découle évidemment que si les coefficients de Fourier complexes de f et g sont tous des réels positifs alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)g(x) dx \geq c_0(f)c_0(g). \quad \square$$

- Remarque : les fonctions f et g ainsi que les périodes T et 2π jouent des rôles symétriques et les résultats demeurent en supposant simplement f 2π -périodique et continue par morceaux mais par contre g T -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Partie II. Équation différentielle.

Question II.A.

Il est immédiat que $c_k(\phi) = c_0(e_k\phi)$. \square

Question II.B.

- Soit $\phi = y_0'' + c_0(a)y_0' + c_0(b)y_0$. La question revient à prouver que ϕ est nulle.
Comme y_0 est solution sur \mathbb{R} de $(E) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ avec a et b continues sur \mathbb{R} , classiquement y_0 est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et ainsi $\phi \in C_T^0$.
D'après le théorème de Parseval, il suffit donc de prouver que $c_k(\phi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Soit encore que $c_0(e_k\phi) = 0$ compte tenu de la question précédente.
- Comme y_0 est solution de (E) on a $\phi(x) = (c_0(a) - a(x))y_0'(x) + (c_0(b) - b(x))y_0(x) = \alpha(x)y_0'(x) + \beta(x)y_0(x)$.
- Par ailleurs, d'après la question I.B (avec $g(x) = e_k(x)\phi(x)$) il vient $c_0(e_k\phi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t e_k(x)\phi(x) dx$.
Ainsi $c_0(e_k\phi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\alpha(x)e_k(x)y_0'(x) + \beta(x)e_k(x)y_0(x)) dx$.
- Or $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont continues et 2π -périodiques et $e_k(x)y_0'(x)$ et $e_k(x)y_0(x)$ sont T -périodiques et de classe \mathcal{C}^1 (puisque y_0 est de classe \mathcal{C}^2).
D'après la remarque finale de la question I.C. on a (puisque $\frac{T}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$) : $c_0(e_k\phi) = c_0(\alpha)c_0(e_ky_0') + c_0(\beta)c_0(e_ky_0)$
Or $c_0(\alpha) = c_0(c_0(a) - a) = c_0(a) - c_0(a) = 0$ et de même $c_0(\beta) = 0$.
Ainsi $c_k(\phi) = c_0(e_k\phi) = 0$. \square

Partie III. Épicycloïde.

Question III.A. Définition de l'épicycloïde.

- L'affixe de $\overrightarrow{O\Omega(t)}$ est $(R+r)e^{it}$ donc $d(O, \Omega(t)) = R+r$ ce qui prouve que les deux cercles sont tangents en le point $H(t)$ d'affixe $h(t) = Re^{it}$. \square
- $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) + (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM}) + (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{OM}) = t + \pi + qt = (1+q)t + \pi$ donc l'affixe de \overrightarrow{OM} est $-re^{i(q+1)t}$.
Il en découle que $z(t) = ((R+r) - re^{iqt})e^{it} = r(q+1 - e^{iqt})e^{it}$. \square

Question III.B. Propriétés de l'épicycloïde.

Dans cette partie (très mal rédigée selon moi) on ne supposera pas forcément que q soit rationnel car bon nombre de résultats sont valables que q soit ou non rationnel. Les particularités dues au fait que q soit rationnel seront signalées au besoin. En outre on ne respectera pas exactement l'ordre des questions.

- $z(t)$ n'est jamais nul car $q + 1 > 1$ donc $q + 1 - e^{iq t}$ ne s'annule pas et z est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
Donc $z(t)\bar{z}(t)$ est strictement positif et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Il en va donc de même de $|z(t)|$ puisque la fonction racine carrée est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$. Notons désormais $\rho(t) = |z(t)|$.

Il en découle que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\rho(t)}z(t)$ est une application de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans l'ensemble \mathbb{U} des complexes de module 1. Par le théorème de relèvement, il existe une application θ de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} telle que $\varphi(t) = e^{i\theta(t)}$.

Ainsi il existe deux applications ρ et θ de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la première étant en outre strictement positive, telles que $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ pour tout réel t .

Par ailleurs $\rho(t) = r|q + 1 - e^{iq t}|$ donc la fonction ρ est $\frac{2\pi}{q}$ -périodique. \square

- Nous avons $z(t + \frac{2\pi}{q}) = e^{i2\pi/q}z(t)$ donc $M(t + \frac{2\pi}{q})$ se déduit de $M(t)$ par rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{q}$.
Ce qui prouve que l'épicycloïde est formée d'arches isométriques à celle décrite lorsque t décrit l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{q}]$.
Lorsque q est rationnel soit $q = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$, l'épicycloïde est composée d'exactly a arches puisque la $(a + 1)^{\text{ème}}$ rotation redonne l'arche de départ. En outre si q est entier les arches ne se coupent pas. Lorsque q est irrationnel on ne retombe jamais au point de départ et il y a une infinité d'arches. \square

- Ces arches se rejoignent en les points correspondant à $t = k\frac{2\pi}{q}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ c'est à dire en les points I_k d'affixe $z(k\frac{2\pi}{q}) = Re^{ik2\pi/q}$.

On retrouve que si $q = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$ il y a a arches (car a points I_k distincts).

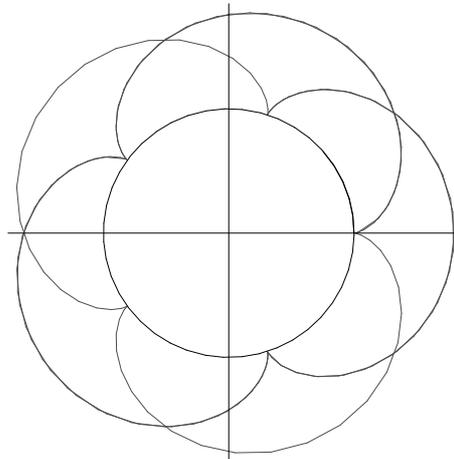
Par contre si q est irrationnel tous les points I_k pour $k \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux distincts. \square

- Étudions la position locale de l'arc au voisinage du point $M(0) = I_0$.
Un développement limité de $\overrightarrow{I_0M}(t)$ alias $z(t) - z(0) = z(t) - R$ s'écrit :

$$\begin{aligned} z(t) &= \left(R + r - r(1 + iqt - \frac{1}{2}q^2t^2 + O(t^3)) \right) \cdot \left(1 + it - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \right) - R \\ &= \left(R - iRt + \frac{qR}{2}t^2 + O(t^3) \right) \cdot \left(1 + it - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \right) - R = \left(\frac{q+1}{2}R \right)t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

Ainsi la tangente en $M(0)$ est horizontale et l'arc est au voisinage localement du côté pointé par le vecteur \vec{i} . Il y a donc un rebroussement en $M(0) = I_0$ et en tous les points I_k par rotation. \square

- À ce stade on a facilement l'allure de l'épicycloïde correspondant à $q = \frac{5}{2}$:



- La longueur d'une arche est donnée $\ell = \int_0^{2\pi/q} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt$.

$$\text{Or } z'(t) = i(R+r - re^{iqt} - rqe^{iqt})e^{it} = i(R+r)(1 - e^{iqt})e^{it} = 2(R+r) \sin\left(\frac{q}{2}t\right)e^{iqt/2}e^{it} \quad (1).$$

Lorsque t parcourt $[0, \frac{2\pi}{q}]$, $\frac{q}{2}t$ parcourt $[0, \pi]$ donc $\sin\left(\frac{q}{2}t\right)$ est positif donc $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = 2(R+r) \sin\left(\frac{q}{2}t\right)$.

$$\text{Donc } \ell = \int_0^{2\pi/q} 2(R+r) \sin\left(\frac{q}{2}t\right) dt = \frac{8}{q}(R+r) = 8\frac{q+1}{q^2}R. \quad \square$$

Si $q = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$ la longueur totale est donc $L = 8a\frac{q+1}{q^2}R$ et en particulier $8\frac{q+1}{q}R$ si $q = a \in \mathbb{N}$.

- On a $\overline{z(t)}z'(t) = \rho(t)e^{-i\theta(t)}(\rho'(t) + i\rho(t)\theta'(t))e^{i\theta(t)} = \rho(t)\rho'(t) + i\rho^2(t)\theta'(t)$.

Or l'aire \mathcal{A}' du secteur curviligne de centre O défini par une arche est égale à l'intégrale curviligne sur le bord

$$\text{orienté } \partial K \text{ du secteur } \int_{\partial K} \rho^2 d\theta \text{ qui se réduit ici à } \int_0^{2\pi/q} \rho^2(t)\theta'(t) dt.$$

$$\text{Par ailleurs } \int_0^{2\pi/q} \rho(t)\rho'(t) dt = \frac{1}{2}\left(\rho^2\left(\frac{2\pi}{q}\right) - \rho^2(0)\right) = 0.$$

$$\text{De sorte que } \mathcal{A}' = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi/q} \overline{z(t)}z'(t) dt.$$

Or d'après (1), $\overline{z(t)}z'(t) = (R+r - re^{-iqt})e^{-it} \times 2(R+r) \sin\left(\frac{q}{2}t\right)e^{iqt/2}e^{it}$ donc après simplifications :

$$\overline{z(t)}z'(t) = 2(R+r) \sin\left(\frac{q}{2}t\right) \times \left(R \cos\left(\frac{q}{2}t\right) + i(R+2r) \sin\left(\frac{q}{2}t\right)\right).$$

$$\text{Or } \int_0^{2\pi/q} \sin\left(\frac{q}{2}t\right) \cos\left(\frac{q}{2}t\right) dt = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi/q} \sin^2\left(\frac{q}{2}t\right) dt = \frac{\pi}{q}.$$

Donc l'aire d'un secteur curviligne de centre O défini par une arche de l'épicycloïde est :

$$\mathcal{A}' = \frac{\pi}{q}(R+r)(R+2r) = \frac{(q+1)(q+2)}{q^3}\pi R^2. \quad \square$$

Lorsque q est entier, les arches ne se "recouvrent" pas et l'aire totale de l'épicycloïde est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{(q+1)(q+2)}{q^2}\pi R^2. \quad \square$$

Remarque : lorsque q entier tend vers $+\infty$, \mathcal{A} tend vers l'aire du cercle (C_0) ce qui est intuitivement normal puisque les arches deviennent de plus en plus proches du cercle.

Question III.C. Densité de l'épicycloïde dans la couronne lorsque q est irrationnel.

- On a $e^{i\theta(x)} = \frac{z(x)}{\rho(x)}$, $z(x) = r(1 + q - e^{iqx})e^{ix}$ et $\rho(x) = r|1 + q - e^{iqx}|$ donc :

$$\rho^m(x)e^{in\theta} = \rho^{m-n}(x)z^n(x) = \underbrace{r^m|1 + q - e^{iqx}|^{m-n}}_{g(x)}(1 + q - e^{iqx})^n \times e^{inx}.$$

Or g est $T = \frac{2\pi}{q}$ périodique (et continue) et comme q est irrationnel, d'après la question I.B, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \rho^m(x)e^{in\theta(x)} dx = 0 \text{ pour tout } (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^* \text{ et la limite vaut } c_0(\rho^m) \text{ si } n = 0. \quad \square$$

Remarque : À noter cette fois carrément une faute d'énoncé : limite non nulle si $n = 0$ contrairement à ce qui est annoncé (ou alors copié-collé hasardeux !). En effet comme ρ est continue et strictement positive (donc ρ^m également), on a $c_0(\rho^m) > 0$.

- Donc par linéarité $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t P(\rho(x))Q(\theta(x)) dx = c_0(Q)c_0(P(\rho)) \quad \square$

- D'après le théorème de Weierstrass (version normale et version trigonométrique), il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $J = [R, R+2r]$ et une suite (Q_n) de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur \mathbb{R} .

Notons $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur J et N_∞ la norme uniforme sur \mathbb{R} .

Comme la suite (Q_n) converge uniformément sur \mathbb{R} , elle est y bornée pour la norme uniforme. Soit alors M tel que $N_\infty(Q_n) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit x quelconque dans \mathbb{R} . Comme $\rho(x) \in J$, il vient :

$$|P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x)) - f(\rho(x))g(\theta(x))| \leq |P_n(\rho(x)) - f(\rho(x))| \cdot |Q_n(\theta(x))| + |Q_n(\theta(x)) - g(\theta(x))| \cdot |f(\rho(x))|$$

$$\leq M \|P_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty N_\infty (Q_n - g) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ce qui prouve que la suite $v_n : x \rightarrow P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x))$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $V : x \mapsto f(\rho(x))g(\theta(x))$

Notons alors $u_n : t \mapsto \frac{1}{t} \int_0^t v_n(x) dx$ et $U : t \mapsto \frac{1}{t} \int_0^t V(x) dx$. Il vient pour tout réel $t > 0$:

$$|U(t) - u_n(t)| \leq \frac{1}{t} \left| \int_0^t (V(x) - v_n(x)) dx \right| \leq \frac{1}{t} \int_0^t |V(x) - v_n(x)| dx \leq \|V - v_n\|_\infty.$$

Ainsi la suite (u_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$ vers U .

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t)$ existe et vaut $c_0(Q_n)c_0(P_n(\rho))$.

Or comme (P_n) converge uniformément sur J vers f , la suite $(P_n(\rho))$ converge uniformément sur $[0, T] = [0, \frac{2\pi}{q}]$

vers $f(\rho)$. Il en découle que $c_0(P_n(\rho)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c_0(f(\rho))$.

De même $c_0(Q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c_0(g)$ puisque (Q_n) converge uniformément vers g sur $(0, 2\pi]$ en particulier.

Il découle alors du théorème du double passage à la limite établi en partie préliminaire que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x)) dx = c_0(g)c_0(f(\rho)) \quad \square$$

- Je ne vois pas comment utiliser le “bazar” qui précède pour établir la densité demandée alors qu’elle peut s’établir directement assez simplement :

En effet en conséquence de la structure topologique des sous-groupes additifs de \mathbb{R} (soit monogènes soit denses) on établit immédiatement que si $\frac{a}{b}$ est irrationnel $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . Il en découle, par continuité de $t \rightarrow e^{it}$,

que si $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel, l’ensemble $\{e^{in\alpha}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans l’ensemble \mathbb{U} des complexes de module 1.

Soit alors (ρ_0, θ_0) donné quelconque comme dans l’énoncé.

Comme $\rho(t) = |R + r - re^{iqt}|$ on a évidemment $\rho(\mathbb{R}) \subset [R, R + 2r]$. Par ailleurs $\rho(0) = R$ et $\rho(\frac{\pi}{q}) = R + 2r$.

Comme ρ est continue, il en découle que $\rho(\mathbb{R}) = [R, R + 2r]$ (théorème des valeurs intermédiaires). Et même $\rho[0, \frac{2\pi}{q}] = [R, R + 2r]$ vu la périodicité. Ainsi il existe t_0 tel que $\rho(t_0) = \rho_0$.

Soit α_0 tel que $z(t_0) = \rho_0 e^{i\alpha_0}$.

Comme $\{e^{in2\pi/q}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans \mathbb{U} , il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $e^{in_k 2\pi/q} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{i(\theta_0 - \alpha_0)}$

Soit alors $t_k = t_0 + n_k \frac{2\pi}{q}$.

On a $z(t_k) = z(t_0 + n_k \frac{2\pi}{q}) = z(t_0) e^{in_k 2\pi/q} = \rho_0 e^{i\alpha_0} e^{in_k 2\pi/q} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \rho_0 e^{i\theta_0}$

Ce qui prouve bien que l’épicycloïde est dense dans la couronne C . \square

Partie IV. Problème de visibilité.

Question IV.A.

- h est continue par morceaux sur \mathbb{R} donc, pour x fixé quelconque dans \mathbb{R} , $t \mapsto h(t)h(x-t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} donc bien intégrable sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Ainsi u est-elle bien définie sur \mathbb{R} . Elle est clairement 1-périodique puisque h l’est.

Il vient par changement de variable $t = -u$ puis en utilisant la parité de h :

$$u(-x) = \int_{-1/2}^{1/2} h(t)h(-x-t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} h(-u)h(-x+u) du = \int_{-1/2}^{1/2} h(u)h(x-u) du = u(x).$$

Donc u est paire.

Par ailleurs $u(x) = \int_{-1/2}^{1/2} h(t)h(x-t) dt = \int_{-r}^r h(x-t) dt = \int_{x-r}^{x+r} h(y) dy$.

Ainsi en tant qu’intégrale fonction de sa borne supérieure d’une fonction continue par morceaux, u est-elle continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. \square

- Comme u est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, elle est développable en série de Fourier et sa série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} vers elle.

Comme elle est paire on a $u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x)$ avec $a_n = 2 \int_0^1 u(x) \cos(2\pi n x) dx$.

Comme u est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on peut intégrer par parties, ce qui fournit pour $n \geq 1$:

$$\pi n a_n = - \int_0^1 (h(x+r) - h(x-r)) \sin(2\pi n x) dx$$

$$\text{Or } \int_0^1 h(x+r) \sin(2\pi n x) dx = \int_{1-2r}^1 \sin(2\pi n x) dx = \frac{1}{2\pi n} (\cos(4\pi n r) - 1) \leq 0$$

$$\text{et } \int_0^1 h(x-r) \sin(2\pi n x) dx = \int_0^{2r} \sin(2\pi n x) dx = \frac{1}{2\pi n} (1 - \cos(4\pi n r)) \geq 0$$

Ainsi $a_n \geq 0$ pour $n \geq 1$.

Par ailleurs $\frac{a_0}{2} = \int_0^1 u(x) dx = u(1) - \int_0^1 x(h(x+r) - h(x-r)) dx$ toujours par parties

$$\text{Or } \int_0^1 x(h(x+r) - h(x-r)) dx = \int_{1-2r}^1 x dx - \int_0^{2r} x dx = \frac{1}{2} (1 - (1-2r)^2 - 4r^2) = 2r(1-2r) \text{ et } u(1) = u(0) = 2r$$

$$\text{donc } \frac{a_0}{2} = 4r^2.$$

Ainsi $c_0 = \frac{a_0}{2} = 4r^2 > 0$ et pour $n > 0$ (puisque u est paire), $c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2} \geq 0$ \square

- Étudions, pour θ fixé quelconque dans \mathbb{R} , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(x \cos \theta) u(x \sin \theta) dx$.

Premier cas : $\sin \theta \cos \theta = 0$.

Alors $\varphi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(0)u(\pm x) dx = u(0) \times \frac{1}{t} \int_0^t u(x) dx$ par parité.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = u(0)c_0(u)$ (d'après II) et alors $\ell(\theta) = 2r \times 4r^2 = 8r^3 > 0$

Second cas : $\sin \theta \cos \theta \neq 0$.

Soient $f : x \mapsto u(x \cos \theta)$ et $g : x \mapsto u(x \sin \theta)$.

Alors f est $\frac{1}{\cos \theta}$ périodique et g est $\frac{1}{\sin \theta}$ périodique. En outre ces deux fonctions sont continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Par ailleurs $c_0(f) = \cos \theta \int_0^{1/\cos \theta} u(\cos \theta \cdot x) dx = \int_0^1 u(t) dt = c_0(u)$. De même $c_0(g) = c_0(u)$.

Par application des résultats de I.C., il vient que :

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} c_0(f)c_0(g) = c_0(u)^2 = 16r^4 > 0 \text{ si } \tan \theta \in \mathbb{Q} \text{ et,}$$

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell(\theta) \geq c_0(f)c_0(g) = c_0(u)^2 = 16r^4 > 0 \text{ si } \tan \theta \notin \mathbb{Q}.$$

Conclusion : pour tout réel θ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(x \cos \theta) u(x \sin \theta) dx = \ell(\theta) > 0$. \square

Remarque : On peut même donner un résultat plus précis :

On a $\ell(\theta) \geq \inf(8r^3, 16r^4) = 16r^4 > 0$ pour tout réel θ . \square

- Pour t fixé dans \mathbb{R} , la fonction $(x, \theta) \mapsto u(x \cos \theta) u(x \sin \theta)$ est continue sur $[0, t] \times \mathbb{R}$ donc la fonction $\theta \mapsto \int_0^t u(x \cos \theta) u(x \sin \theta) dx$ est continue sur \mathbb{R} (continuité d'une intégrale propre à paramètre). \square

- Il y a évidemment une erreur d'énoncé : je suppose qu'il faut lire \int_0^R et non \int_0^t . Mais même ainsi cela ne permet pas de conclure selon moi.

En outre pour la question intermédiaire suivante de l'existence, pour tout θ fixé (on notera là encore l'imprécision de l'énoncé avec l'absence de quantificateur relatif à θ ce qui est d'autant plus regrettable qu'à la question précédente l'intégrale doit être plus grande que 1 pour tout θ !!) de $x = x_\theta \in]0, R]$ tel que $u(x \cos \theta) u(x \sin \theta) \neq 0$ on n'a nul besoin du résultat concernant l'intégrale plus grande que 1 : pour tout θ la fonction $x \mapsto u(x \cos \theta) u(x \sin \theta)$ est continue et non nulle en 0 (valeur $u^2(0) = 4r^2$) donc non nulle au voisinage de 0 !

Je propose la solution suivante :

On commence par remarquer que vu la symétrie du problème de visibilité par rapports aux deux axes et à la première bissectrice, il suffit d'établir qu'il existe un réel R tel que tel que l'on voit un arbre à une distance moindre que R dans toute direction comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

On va commencer par prouver qu'il existe un entier $N = N(r)$ tel que $\int_1^N u(x \cos \theta)u(x \sin \theta) dx > 0$ pour tout θ .

Supposons le contraire. Pour n entier, $n \geq 2$, notons $\varphi_n : \theta \mapsto \int_1^n u(x \cos \theta)u(x \sin \theta) dx$.

Alors $F_n = \left\{ \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ t.q. } \int_1^n u(x \cos \theta)u(x \sin \theta) dx \leq 0 \right\}$ est non vide. Or φ_n est continue (Cf précédemment) donc F_n est un fermé relatif de $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc un fermé. En outre la suite (F_n) est décroissante au sens de l'inclusion puisque la fonction u est positive ou nulle donc $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ d'où $F_{n+1} \subset F_n$.

Il en découle que $\bigcap_{n=2}^{+\infty} F_n$ est non vide.

Soit alors θ_0 appartenant à cette intersection. On a $\varphi_n(\theta_0) \leq 0$ pour tout n donc $\varphi_n(\theta_0) = 0$ pour tout n (puisque $\varphi_n \geq 0$ du fait que $u \geq 0$) donc $\frac{1}{n}\varphi_n(\theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Contradiction puisque par caractérisation séquentielle de la limite, on a $\frac{1}{n}\varphi_n(\theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell(\theta_0) > 0$ \square

Remarque : on pourrait prouver de la même façon qu'il existe un entier N' tel que, pour tout θ :

$\int_1^{N'} u(x \cos \theta)u(x \sin \theta) dx > 1$ (ou 2007 !) (sinon il existerait θ_0 tel que $\varphi_n(\theta_0) \leq 1$ pour tout n donc $\frac{1}{n}\varphi_n(\theta_0)$ tendrait vers 0) mais cela est inutile pour la suite.

Il en découle naturellement que, pour tout θ fixé dans $[0, \frac{\pi}{4}]$, il existe $x = x_\theta \in [1, N]$ tel que $u(x \cos \theta)u(x \sin \theta) > 0$.

Or comme $u(y) = \int_{y-r}^{y+r} h(t) dt$, on a $u(y) \neq 0$ si et seulement si l'intervalle $]y-r, y+r[$ rencontre un intervalle de la forme $]k-r, k+r[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc si et seulement la distance de y à \mathbb{Z} est strictement inférieure à $2r$.

Donc dire que $u(x \cos \theta)u(x \sin \theta) \neq 0$ c'est dire que le point de coordonnées polaires (x, θ) est à une distance strictement inférieure à $2r$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en munissant \mathbb{R}^2 de la norme $\|(a, b)\| = \max(|a|, |b|)$.

Ce qui signifie :

- soit que le point de coordonnées polaires (x, θ) appartient au carré centré en O de côté $4r$,
- soit qu'il appartient à un arbre de la forêt \mathcal{F}' des arbres de côté $4r$.

Or le premier cas est à exclure car, comme $x \geq 1$, on a : $x \cos \theta \geq \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} > 2r$.

Ainsi il existe un entier N tel que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, le segment joignant 0 au point de coordonnées polaires (N, θ) rencontre un arbre de la forêt \mathcal{F}' .

Alors en conservant la forêt \mathcal{F} mais en remplaçant r par $r' = \frac{r}{2}$ dans la définition de la fonction h (ce qui est bien possible puisque $0 < 2r' < 1/2$) on obtient une nouvelle fonction h' et une nouvelle fonction u' vérifiant les mêmes propriétés donc il existe un entier N' tel que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, le segment joignant 0 au point de coordonnées polaires (N, θ) rencontre un arbre de la forêt \mathcal{F} . \square

Question IV.B. Algorithmique.

À noter là encore la très grande légèreté (aimable euphémisme) de l'énoncé : l'emploi de r dans la description de I alors que r est fixé pour la définition de la forêt !

- Compte-tenu de ce qui précède I est non vide (car contient N).

Si $\rho \in I$ alors naturellement $[\rho, +\infty[\subset I$ donc I est un intervalle de la forme $(R_0, +\infty[$.

r n'appartient pas à I clairement donc $R_0 > 0$.

Pour $\theta \in [0, \pi/4]$, notons D_θ la droite d'angle polaire θ . Alors $\mathcal{F} \cap D_\theta$ est un fermé en tant qu'intersection de deux fermés. Soit r_θ la distance de O à ce fermé. Elle est atteinte. Donc $\alpha \in I$ si et seulement si $\alpha \geq r_\theta$ pour tout $\theta \in [0, \pi/4]$. Donc $I = \bigcap_{\theta \in [0, \pi/4]} [r_\theta, +\infty[$ ce qui prouve que I est un fermé donc $I = [R_0, +\infty[$. \square

- Pour l'algorithme tel qu'il est demandé, je ne vois pas !

Question IV.B. Arbres ronds.

Soit une forêt \mathcal{F} formée d'arbres ronds de rayon r avec $0 < 2r < 1/2$ dont les centres ont des coordonnées entières (O exclu).

Soit la forêt \mathcal{F}' d'arbres carrés de côtés $\sqrt{2}r$.

Il existe $R > 0$ tel que, dans toute direction, un observateur placé à l'origine voit un arbre de \mathcal{F}' à une distance moindre que R (car $\sqrt{2}r < 2r < 1/2$).

Donc a fortiori il voit un arbre de la forêt \mathcal{F} puisque chaque arbre de \mathcal{F}' est inclus dans un arbre de la forêt \mathcal{F} . \square

————— *FIN* —————