AGRÉGATION INTERNE **ÉTÉ 2005**

PROBLÈME DE VACANCES

Quelques notations : dans tout ce problème $R \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$, et pour $R > 0$ on pose

$D_R := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$, $\overline{D_R} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq R\}$, $C_R := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = R\}$ et $D_\infty := \mathbb{C}$.

$\mathcal{O}_R$ désigne l'ensemble des séries entières $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R. Une fonction $f \in \mathcal{O}_\infty$ sera dite entière. Enfin, pour $0 < r < R$ et $f \in \mathcal{O}_R$ on posera $M_r(f) = \sup\limits_{z\in C_r} |f(z)|$.

1 Polynômes vérifiant $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ et polynômes de Hilbert

Désignons par T l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$\begin{array}{cccccc} T & : & \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ & & P & \longmapsto & T(P) = P(X+1) \end{array}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur T_n, restriction de T à $\mathbb{C}_n[X]$. On considère enfin la suite $(H_n)_{n\geq 0}$ (**polynômes de Hilbert**) définie par

$$H_0(X) = 1, \quad H_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k), \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

1. Écrire la matrice $M_n \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ de T_n dans la base $\{1, X, \ldots, X^n\}$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que M_n est inversible et expliciter M_n^{-1}.
3. Montrer que la famille $\{H_j\}_{0\leq j\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Pour $j \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}^\star$, donner une expression simple de $H_i(j)$ [*Indic. : distinguer les trois cas : $j < 0$, $0 \leq j \leq i-1$ et $j \geq i$*] et vérifier que $H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
5. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, soit $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$ sa décomposition dans la base $(H_j)_0^n$.
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $\quad a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$.
   (c) Si $i \geq n+1$ que vaut $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$?
   (d) Montrer que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de polynômes de Hilbert.

6. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   - ➪ Il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $u_j = P(j),\ \forall\, j \in \mathbb{N}$.
   - ➪ $\exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ i \geq n+1 \implies \displaystyle\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j u_j = 0.$

2 Un théorème de Pólya

1. **Quelques propriétés des séries entières :** On se fixe R dans $\mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$. Soient $f \in \mathcal{O}_R,\ w \in D_R$ et $|w| < r < R$
   (a) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}\ :\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = 2\pi a_n r^n.$
   (b) En déduire que $\quad \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,r)^+} \dfrac{f(z)dz}{z^{k+1}}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$, *(Cauchy)*.
   (c) Justifier que $\quad M_r(f) < +\infty$.
   (d) Montrer que $\quad |a_n|r^n \leq M_r(f), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, *(Cauchy)*.
   (e) En déduire que toute fonction entière bornée est constante *(Liouville)*.
   (f) Montrer que $\quad f(w) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{re^{it}}{re^{it}-w} f(re^{it})dt.$
   (g) Montrer que $\quad |f(w)| \leq \dfrac{r}{r-|w|}M_r(f).$
   (h) En considérant pour tout entier $p \geq 1$, f^p à la place de f en déduire que $|f(w)| \leq M_r(f)$.
   (i) Montrer que $r \mapsto M_r(f)$ est croissante sur $]0, R[$ et que $M_r(f) = \sup_{|z|\leq r}|f(z)|$.
   (j) Les zéros d'un élément de $\mathcal{O}_R$
      i. Soit $f \in \mathcal{O}_R$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que f n'est pas identiquement nulle si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $a_0 = \cdots = a_{N-1} = 0$ et $a_N \neq 0$.
      ii. Soit $f \in \mathcal{O}_R$ telle que $f(0) = 0$ et $f \not\equiv 0$. Montrer que les zéros de f sont isolés dans $D(O, R)$.
2. **Minoration de $M_r(f)$ par les zéros de f.** Dans cette seconde partie w, r et R sont **comme** dans la question précédente.
   (a) Montrer pour $j \in \mathbb{N}$ la convergence de la série $\sum_{n\geq j+1} a_n w^{n-1-j}$, on note b_j sa somme.
   (b) Montrer que $b_j = o(\dfrac{1}{r^{j+1}})$ lorsque j tends vers $+\infty$.
   (c) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j\geq 0} b_j z^j$ est supérieur ou égal à R.
   (d) On pose alors pour $z \in D_R\ :\ g(z) = \sum_{j\geq 0} b_j z^j$. Vérifier que
   $$\forall z \in D_R\ :\ (z-w)g(z) = f(z) - f(w).$$

   On suppose que f s'annule en $p \in \mathbb{N}^\star$ points $z_1, \ldots, z_p$ deux à deux distincts dans $\overline{D_R} \setminus \{0\}$.

(e) Montrer qu'il existe $F \in \mathcal{O}_R$ vérifiant pour tout $z \in D_R$:

$$F(z) \prod_{j=1}^{p} (z - z_j) = f(z) \prod_{j=1}^{p} (r^2 - \overline{z_j} z).$$

(f) Pour $1 \leq j \leq p$ et $z \in C_r \setminus \{z_j\}_{j=1}^{p}$ que vaut $\left| \dfrac{r^2 - \overline{z_j} z}{z - z_j} \right|$?

(g) Montrer que $M_r(f) \left| \prod_{j=1}^{p} z_j \right| \geq |f(0)| r^p$.

(h) On suppose que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$M_r(f) \left| \prod_{j=1}^{p} z_j \right| \geq \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k}.$$

3. **Étude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb{N}$.**
Soit $f \in \mathcal{O}_\infty$. Si f est nulle sur $\mathbb{N}$ et s'il existe $0 < c < e$ tel que $M_r(f) = O(c^r)$ lorsque r tends vers $+\infty$ montrer que $f \equiv 0$. [*Indic. : On pourra par exemple si $f \not\equiv 0$ appliquer ce qui précède avec $k := \min\{i \in \mathbb{N} \ : \ f^{(i)}(0) \neq 0\}$, $r = p$, $z_1 = 1, \ldots, z_p = p$ puis faire tendre p vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$...).*]

4. Soient $f \in \mathcal{O}_\infty$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et un réel $r > n$.

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R_n(X) = \dfrac{n!}{X(X-1)\ldots(X-n)}$.

(b) Montrer que $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)\ldots(re^{it}-n)} dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k)$.

(c) En déduire $\left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right| \leq \dfrac{n! M_r(f)}{(r-1)\ldots(r-n)}$.

5. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant :
Soit $f \in \mathcal{O}_\infty$ vérifiant $\begin{cases} f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}, \\ M_r(f) = o(\frac{2^r}{\sqrt{r}}) \quad (r \to \infty) \end{cases}$ ***, alors $f \in \mathbb{C}[z]$ (G. Pólya, 1915).***

(a) En choisissant $r = 2n+1$ dans le paragraphe précédent, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geq N \ : \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) = 0.$$

(b) Conclure.

(c) Montrer que les applications $f(z) = 2^z, g(z) = e^{i\pi z}, h(z) = \sin(\pi z)$ sont entières et en déduire que la condition asymptotique $M_r(f) = o(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}})$ n'est pas loin d'être optimale.

3 Un théorème de H.Bohr

L'objectif de ce dernier paragraphe est d'établir le résultat suivant du au mathématicien Harald Bohr :

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ***une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à*** 1 ***(i.e.*** $f \in \mathcal{O}_1$***) telle que*** $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$ ***(i.e.*** $\left|\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right| < 1,\ \forall z \in D(0,1)$***), alors***

$$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| < 1, \qquad \forall z \in D(0,1/3),$$

et la constante $1/3$ ***est optimale. (H. Bohr, 1914)***

1. **Les inégalités de Carathéodory.** Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}_1$.
   (a) Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})}\right) e^{-in\theta} d\theta,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, r \in]0,1[$.
   (b) En déduire que si $\Re e(f(z)) > 0,\ z \in D(0,1)$ alors $|a_n| \leq 2\Re e(a_0),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star$.

   Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}_1$ *vérifiant* $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$*. Montrons le théorème.*

2. Montrer que l'on peut sans perdre de généralité, supposer $f(0) = a_0 > 0$.
3. En considérant $g(z) := 1 - f(z)$, montrer que $|a_n| \leq 2(1 - a_0),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| < 1, \quad \forall z \in D(0,1/3)$.
5. **La constante** $1/3$ **est optimale.** Pour $0 < a < 1$ considérons $f_a(z) = \dfrac{z-a}{1-az}$.
   (a) Montrer que f_a est développable en série entière à l'origine, préciser ce développement et son rayon de convergence.
   (b) Montrer que f_a réalise une bijection du disque unité sur lui même.
   (c) Montrer que
   $$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| = 1 \Longleftrightarrow |z| = \frac{1}{2a+1}.$$
   (d) Conclure.

CORRIGÉ

4 Première partie

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Avec la formule du binôme $T(X^j) = (1+X)^j = \sum_{k=0}^{j} C_j^k X^k$. La matrice de T_n dans la base canonique $\{1, X, \ldots, X^n\}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ est donc

$$M_n = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \ldots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \ldots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \ldots & C_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}.$$

2. La matrice diagonale supérieure M_n à ses éléments diagonaux tous égaux à 1 : T_n est donc inversible. Pour calculer M_n^{-1} inutile de manipuler M_n, il suffit de remarquer que T_n^{-1} est définie par $T_n^{-1}(P) = P(X-1)$; ainsi pour $j \in \mathbb{N}$: $T_n^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} C_j^k X^k$, et par conséquent

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} C_0^0 & -C_1^0 & C_2^0 & -C_3^0 & \ldots & (-1)^n C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & -C_2^1 & C_3^1 & \ldots & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & -C_3^2 & \ldots & (-1)^{n-2} C_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & C_{n-1}^{n-1} & -C_n^{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}.$$

3. Quelque soit $j \in \mathbb{N}$, le polynôme H_j est de degré j, la famille $(H_j)_0^n$ est donc libre dans $\mathbb{C}_n[X]$ espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est donc une base.
4. Pour $0 \leq j \leq i-1$, $H_i(j) = 0$ et pour $j \geq i$: $H_i(j) = C_j^i$. Enfin pour $j < 0$ en écrivant $j = -k$, $(k \in \mathbb{N}^\star)$:

$$H_i(j) = H_i(-k) = \frac{1}{i!} \prod_{l=0}^{i-1} (-k-l) = \frac{(-1)^i}{i!} \prod_{l=0}^{i-1} (k+l) = \frac{(-1)^i (k+i-1)!}{i!(k-1)!} = (-1)^i C_{k+i-1}^i = (-1)^i C_{-j+i-1}^i.$$

On peut remarquer que $H_i(j) \in \mathbb{Z}$, $\forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

5. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i \in \mathbb{C}_n[X]$.
   (a) Pour $0 \leq j \leq n$, nous avons $P(j) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(j) = \sum_{i=0}^{j} a_i C_j^i$ et

$${}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 C_0^0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{j} a_i C_j^i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} a_i C_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(j) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

   (b) ${}^t M_n$ est inversible et on a $({}^t M_n)^{-1} = {}^t(M_n^{-1})$ soit

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t(M_n^{-1}) \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

   connaissant M_n^{-1} (question 1-b) il ne reste plus qu'à remplacer pour trouver les formules désirées :

$$(1) \qquad a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j), \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

(c) Soit $i \geq n+1$, le coefficient de H_i dans la décomposition de P dans la base canonique $\{H_0, H_1, \ldots, H_i\}$ de $\mathbb{C}_i[X]$ est clairement nul et avec (1) il vaut $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j P(j)$ soit

$$(2) \qquad \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j P(j) = 0 \quad \forall i \geq n+1,\ P \in \mathbb{C}_n[X].$$

(d) Toujours avec (1), tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$ qui envoie $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ vérifie $a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i$. La réciproque est immédiate puisque (question 1-4) $H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

6. Pour la condition nécéssaire ($\Rightarrow$) il suffit d'appliquer (2). Réciproquement, si $(u_i)_i$ est une suite de complexes vérifiant $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j u_j = 0,\ \forall\, i \geq n+1$, considérons la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \quad a_i = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}C_i^k u_k.$$

Vu les hypothèses, cette suite est nulle à partir du rang $n+1$. On peut donc considérer le polynôme

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i,$$

et tout revient à vérifier que

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad P(j) = u_j.$$

Or :

$$\begin{aligned}
P(j) &= \sum_{i\geq 0} a_i H_i(j) = \sum_{i=0}^{j} a_i H_i(j) && \text{question (1-4)}\\
&= \sum_{i=0}^{j} a_i C_j^i && \text{question (1-4)}\\
&= \sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}C_i^k u_k\right)C_j^i\\
&= \sum_{k=0}^{i}\left(\sum_{i=k}^{j}(-1)^{i-k}C_i^k C_j^i\right)u_k
\end{aligned}$$

mais (question (1-5-b)) $\displaystyle\sum_{i=k}^{j}(-1)^{i-k}C_i^k C_j^i$ n'est rien d'autre, si $k \leq j$, que le $(k-j)$-ième coefficient de la matrice $M_n.M_n^{-1} = I_{n+1}$, si bien que

$$\sum_{i=k}^{j}(-1)^{i-k}C_i^k C_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit finalement $P(j) = u_j$.

5 Seconde partie

1. (a) Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\geq 0} a_k r^k e^{i(k-n)t}dt$$

mais $\sup_{-\pi\le t\le\pi} |a_k r^k e^{i(k-n)t}| = |a_k| r^k$ est le terme général d'une série convergente, notre série converge donc normalement sur $[-\pi,\pi]$, il est légitime d'inverser les signes $\sum$ et $\int$ soit

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = \sum_{k\ge 0} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = a_n r^n 2\pi.$$

(b) Le cercle $C(0,r)$ parcouru dans le sens direct est paramétrisé par $z = re^{i\theta}$ où θ varie de $-\pi$ à π sachant que $a_n = \frac{f^n(0)}{k!}$ et $dz = ire^{i\theta}d\theta$ le résultat est immédiat vu la formule précédente.

(c) Il est bien connu que toute fonction $f \in \mathcal{O}_R$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque $D(0,R)$ donc continue, donc bornée sur tout cercle $C(0,r),\ 0 < r < R$ d'où le résultat.

(d) Vu (1-a) nous avons

$$|a_n|r^n \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M_r(f)d\theta = M_r(f).$$

(e) Soit f une fonction entière et bornée (disons par $C > 0$) sur $\mathbb{C}$, vu (1-c) nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $r > 0$: $|a_n|r^n \le C$ soit, en faisant tendre r vers l'infini $a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n = a_0$ est constante.

(f) Pour $|w| < r < R$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-w} f(re^{it})dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-\dfrac{we^{-it}}{r}} f(re^{it})dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\sum_{n\ge 0}\frac{w^n e^{-int}}{r^n}dt \qquad \text{car } \left|\frac{w}{r}\right| < 1.\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\ge 0}\frac{w^n e^{-int} f(re^{int})}{r^n}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\ge 0}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{w^n e^{-int} f(re^{int})}{r^n}dt
\end{aligned}$$

ici, l'échange $\int\sum = \sum\int$ est justifié à nouveau par normale convergence de la série sur l'intervalle d'intégration $[-\pi,\pi]$: en effet $f \in \mathcal{O}_R$ elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$, et en particulier continue sur le compact $C(0,R)$ donc bornée sur ce compact, soit

$$\sup_{-\pi\le t\le\pi}\left|\frac{w^n e^{-int} f(re^{int})}{r^n}\right| = \frac{|w|^n}{r^n}\sup_{-\pi\le t\le\pi}|f(re^{it})| = \frac{|w|^n}{r^n}\sup_{z\in C(0,r)}|f(z)| = M_r(f)\frac{|w|^n}{r^n}$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $\frac{|w|}{r} < 1$. Finalement

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-int}dt &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\ge 0}\frac{w^n}{r^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(re^{int})dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\ge 0}\frac{w^n}{r^n}2\pi a_n r^n \qquad \text{avec } (2-1-a)\\
&= \sum_{n\ge 0} a_n w^n = f(w).
\end{aligned}$$

(g) Avec la question précédente nous avons pour tout $|w| < r < R$

$$|f(w)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{re^{it}}{re^{it}-w}f(re^{it})\right|dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r}{r-|w|}M_r(f)dt = \frac{r}{r-|w|}M_r(f).$$

(h) Il est bien connu que $f \in \mathcal{O}_R \implies f^p \in \mathcal{O}_R,\ \forall p \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité précédente à f^p

$$(4) \qquad |f^p(w)| \leq \frac{r}{r-|w|} M_r(f^p),$$

il est facile de vérifier que $M_r(f^p) \leq M_r(f)^p$ (si $\zeta \in C(0,r)$ est tel que $|f^p(\zeta)| = M_r(f^p)$ alors $M_r(f^p) = |f^p(\zeta)| \leq M_r(f)^p$...), donc :

$$\forall\, w \in D(0,r) \quad : \quad |f^p(w)| \leq \frac{r}{r-|w|} M_r(f)^p$$

il ne reste plus qu'à prendre la racine p-ième

$$\forall\, w \in D(0,r) \quad : \quad |f(w)| \leq \left(\frac{r}{r-|w|}\right)^{1/p} M_r(f)$$

et faire tendre p vers $+\infty$

$$\forall\, w \in D(0,r) \quad : \quad |f(w)| \leq M_r(f).$$

(i) Soient $0 < r' < r < R$, par continuité de f sur le compact $C(0,r')$ il existe $z_{r'} \in C(0,r')$ tel que $M_{r'}(f) = |f(z_{r'})| \leq M_r(f)$ vu (2-1-h).

(j) La première assertion est claire puisque $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z_n$ (attention toutefois vous devez savoir que ce résultat est archi-faux pour une fonction seulement $\mathcal{C}^\infty$...). Pour la seconde, soit $f(z) = \sum_{n\geq N} a_n z_n$ une telle fonction. nous avons donc pour $|z| < R$: $f(z) = z^N(a_N + \sum_{n>N} a_n z^{n-N}) := z^N g(z)$ où la fonction $g \in \mathcal{O}_R$ vérifie $g(0) = a_N \neq 0$. Par continuité de g à l'origine g est non nulle au voisinage de $z = 0$, il en est donc de même pour f et le zéro $z = 0$ est bien isolé. Ce résultat se transporte immédiatement sur un zéro quelconque $a \in D(0,r)$ de f : en effet, il suffit pour cela de se souvenir que f est DSE en a sur au moins $D(a, r-|a|)$ et de transposer le raisonnement ci-dessus au point a, où bien de faire un translation (considérer $h(z) = f(z-a)$...).

2. (a) $w \in D(0,R)$ série $\sum_n a_n w^n$ converge (et même absolument), il en donc de même de la série $\frac{1}{w^{j+1}} \sum_{n\geq j+1} a_n w_n$.

(b) On a :

$$|b_j| r^{j+1} \leq \frac{1}{|w|^{j+1}} \sum_{n\geq j+1} |a_n| \left(\frac{|w|}{r}\right)^n r^{n+j+1} \leq \frac{1}{|w|^{j+1}} \sum_{n\geq j+1} |a_n| \left(\frac{|w|}{r}\right)^{j+1} r^{n+j+1} \leq \sum_{n\geq j+1} |a_n| r^n$$

qui tends vers zéro avec j comme reste d'une série convergente.

(c) Pour tout $0 < r < R$ nous avons $b_j = o(\frac{1}{r^{j+1}})$, la suite $(b_j r^j)_j$ est donc bornée ; un résultat classique sur les séries entières assure alors que que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j\geq 0} b_j z^j$ est supérieur ou égal à R.

(d) La fonction $g(z) := \sum_{j\geq 0} b_j z^j \in \mathcal{O}_R$, pour $z, w \in D(0,R)$.

$$\begin{aligned}
(z-w)g(z) = zg(z) - wg(z) &= \sum_{j\geq 0} b_j z^{j+1} - \sum_{j\geq 0} w b_j z^j \\
&= -wb_0 + \sum_{j\geq 0} b_j z^{j+1} - \sum_{j\geq 0} w b_{j+1} z^{j+1} \\
&= -wb_0 + \sum_{j\geq 0} (b_j - w b_{j+1}) z^{j+1} \\
&= -wb_0 + \sum_{j\geq 0} \left(\sum_{n\geq j+1} a_n w^{n-1-j} - \sum_{n\geq j+2} a_n w^{n-1-j} \right) z^{j+1} \\
&= -wb_0 - a_0 + \sum_{j\geq 0} a_j z^j \\
&= -f(w) + f(z)
\end{aligned}$$

(e) La fonction $G(z) := f(z)\prod_{j=1}^{p}(r^2 - \overline{z_j}z)$ est dans $\mathcal{O}_R$ et s'annule en $z_1, z_2, \dots, z_p$. D'aprés la question précédente avec $w = z_1$ on peut écrire $G(z) = g_1(z)(z - z_1)$ avec $g_1 \in \mathcal{O}_R$; il n'y a plus qu'à réitérer le processus sur g_1 avec $w = z_2$. De proche en proche, à la p-ième étape, on obtient la décomposition désirée.

(f) Soient $1 \leq j \leq p$, $z \in C_r \setminus \{z_j\}_{j=1}^{p}$. Comme $r^2 = z\overline{z}$ nous pouvons écrire

$$\left|\frac{r^2 - \overline{z_j}z}{z - z_j}\right| = \left|\frac{z\overline{z} - \overline{z_j}z}{z - z_j}\right| = |z|.\left|\frac{\overline{z - z_j}}{z - z_j}\right| = r.$$

(g) Avec la question (2-1-h) nous avons

$$|F(0)| \leq M_r(F). \tag{3}$$

Les questions (2-2-e) et (2-2-f) combinées nous donnent

$$\forall\, z \in C_r \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \ : \quad |F(z)| = r^p|f(z)|.$$

Par continuité cette inégalité si prolonge au points $z_1, \dots, z_p$ et entraine

$$M_r(F) = r^p M_r(f) \tag{4}$$

Enfin, la question (2-2-e) au point $z = 0$

$$|F(0)|\prod_{j=1}^{p}|z_j| = |f(0)|r^{2p} \tag{5}$$

En combinant (3),(4) et (5) on tire

$$M_r(f)\prod_{j=1}^{p}|z_j| \geq |f(0)|r^p$$

soit, l'inégalité demandée.

(h) Considérons la fonction $\tilde{f}(z) = \sum_{n\geq k} a_n z^{n-k} \in \mathcal{O}_R$. Elle vérifie $z^k\tilde{f}(z) = f(z)$ et admet encore $z_1, \dots, z_p$ comme zéros de sorte que l'on peut (comme pour f) lui appliquer (2-2-g) :

$$M_r(\tilde{f})\Big|\prod_{j=1}^{p} z_j\Big| \geq r^p|\tilde{f}(0)|,$$

la conclusion est alors immédiate si l'on remarque que $M_r(\tilde{f}) = r^{-k}M_r(f)$ et $\tilde{f}(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

3. Puisque f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \neq 0\}$ est non vide, il admet donc (2-1-j-i) un plus petit élément $k = \min E$. On applique (2-2-h) à f avec $r = p$, $z_j = j$, $1 \leq j \leq p$:

$$p!M_f(p) \geq p^{p+k}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|$$

soit avec Stirling

$$M_p(f) \geq \frac{p^{p+k}}{p!}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \sim \frac{p^{k-1/2}}{\sqrt{\pi}}e^p\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \quad (p \to \infty)$$

et l'hypothèse $M_r(f) = O(c^r)$ entraine

$$p^{k-1/2}e^p = O(c^p) \quad (p \to \infty)$$

formule absurde, puisque $0 < c < e$, d'où le résultat.

4. (a) La fraction rationnelle est à pôles simples, elle se décompose donc sous la forme

$$R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X-k}$$

et par les méthodes classiques de substitution on trouve facilement

$$a_k = (-1)^{n-k} C_n^k, \quad \text{soit} \quad R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{X-k}.$$

(b) Avec la question précédente nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)\dots(re^{it}-n)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{it} f(re^{it}) F_n(re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{re^{it}-k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \quad \text{(d'aprés (2-1-f))} \end{aligned}$$

(c) Puisque $t \in [-\pi, \pi]$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $|re^{it} - k| \geq r - k$, donc :

$$\left| \frac{n! f(re^{it})}{\prod_{k=1}^{n} (re^{it} - k)} \right| \leq \frac{n! M_r(f)}{\prod_{k=1}^{n} (r-k)}$$

qui avec la question précédente repond à la question.

5. Soit $f \in \mathcal{O}_\infty$ une telle fonction.

(a) Comme $2n+1 > n$ il est légitime d'appliquer (3-4-c) avec $r = 2n+1$, et comme $\prod_{k=1}^{n} (2n+1-k) = \frac{(2n)!}{n!}$ on obtient pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right| \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} M_{2n+1}(f), \tag{8}$$

avec Stirling nous avons

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}, \quad (n \to \infty) \tag{9}$$

et vu l'hypothèse de croissance sur f

$$M_{2n+1}(f) = o\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}} \right). \tag{10}$$

(9) et (10) donnent

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} M_{2n+1}(f) = 0, \tag{11}$$

et enfin (9) et (11)

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right| = 0$$

en d'autres termes, puisque $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ la suite d'entiers relatifs $\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right)_n$ converge vers 0 : elle est donc nulle à partir d'un certain rang. D'où le résultat.

(b) Avec (1-6) la question précédente assure de l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad : \quad f(j) = P(j).$$

(c) Considérons alors la fonction entière $g = f - P$: elle est nulle sur $\mathbb{N}$ et vérifie bien sûr $M_r(f) = o\left(\frac{2^r}{\sqrt{r}} \right) = o(2^r)$. Puisque $0 < 2 < e$ la question (2-3) implique que $g \equiv 0$, i.e. $f = P$: le théorème de Polya est démontré.

6 Troisième partie.

1. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}_1$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star, r \in]0,1[$

$$\begin{aligned} a_n r^n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \qquad \text{(c'est 2-1-a)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})}\right) e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\Re e\left(f(re^{i\theta})\right) e^{-in\theta}d\theta \end{aligned}$$

   où la seconde inégalité (valable uniquement si $n \geq 1$ sauf si $a_0 \in \mathbb{R}$...) résulte de la normale convergence en $r \in [-\pi,\pi]$ de la série $f(re^{i\theta}) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}$ combinée avec l'orthogonalité de la famille $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2([-\pi,\pi])$.

   (b) f étant de partie réelle positive sur $D(0,1)$ on peut alors écrire pour $r \in]0,1[$

$$\begin{aligned} |a_n r^n| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|2\Re e f(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\Re e f(re^{i\theta})d\theta \\ &= 2\Re e\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})d\theta\right) \\ &= 2\Re e(a_0) \end{aligned}$$

2. Il suffit de considérer $e^{-i\theta}f$ à la place de f avec $\theta =$ argument de $f(0)$.
3. $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$ implique que $g(z) := 1 - f(z)$ est développable en série entière sur le disque unité et vérifie

$$\Re e(g(z)) > 0 \quad \text{sur} \quad D(0,1),$$

   on peut donc lui appliquer les inégalités de Carathéodory

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad |a_n| \leq 2(1 - a_0).$$

4. Avec la question précédente nous avons aussitot pour $|z| < 1/3$:

$$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| < a_0 + \sum_{n\geq 1} 2(1-a_0)\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

5. (a) Puisque $|z| < 1$ et $0 < a < 1$ on a : $a|z| < 1$ si bien que

$$f_a(z) = \frac{z-a}{1-az} = (z-a)\sum_{n\geq 0} a^n z^n = -a + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{a} - 1\right) a^n z^n := \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

   le rayon de convergence est clairement $a^{-1} > 1$.

   (b) Pour $|z| = 1$:

$$|f_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-az}\right| = \left|\frac{z-a}{z\overline{z} - az}\right| = \frac{1}{|z|}\left|\frac{z-a}{\overline{z} - a}\right| = 1$$

   si bien que $f_a(C(0,1)) \subset C(0,1)$ i.e. $M_1(f_a) = 1$; comme $f_a(a) = 0$, f_a n'est pas constante donc, vu (2-1-i), $f_a(D(0,1)) \subset D(0,1)$ et ceci pour tout $-1 < a < 1$. En outre, on vérifie sans peine que pour $|z| < a^{-1}$

$$w = f_a(z) \Longleftrightarrow z = f_{-a}(w).$$

   Ces deux faits assurent que f_a réalise une bijection du disque unité sur lui-même de bijection réciproque f_{-a}.

(c) On a pour $|z| < 1$:

$$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| = a + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{a} - 1\right) (a|z|)^n = a + \frac{1-a^2}{a} \frac{a|z|}{1-a|z|},$$

si bien que

$$1 = \sum_{n\geq 0} |a_n z^n| \Longleftrightarrow |z| = \frac{1}{2a+1}.$$

(d) La dernière formule étant réalisée pour tout $0 < a < 1$, il ne reste plus qu'à faire tendre a vers 1 par valeurs inférieures pour conclure.

21 septembre 2005, lassere@picard.ups-tlse.fr & lassere@wanadoo.fr