AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES, Vendredi 21 Septembre 2007.
Continuité, Dérivation : Exercices.

Exercice 1. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} q^{-1} & \text{si } \ x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^\star, \ p \wedge q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *et discontinue sur* $\mathbb{Q}$.

Exercice 2. *Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in \mathbb{Q}, \\ e^{-x^{-2}} & \text{sinon.} \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in \mathbb{Q}, \\ xe^{-x^{-2}} & \text{sinon.} \end{cases},$$

Exercice 3. *Soit* $f \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application monotone vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur* $[a,b]$ *; montrer que* f *est continue.*

Exercice 4. *1) Soit* $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application continue et injective, montrer que* f *est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.
2) Une application $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $(f \circ f)(x) = -x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ *peut-elle être continue ?*

Exercice 5. *Soient* I, J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *et* $g \ : \ I \to J, \ f \ : \ J \to \mathbb{R}$ *deux applications. Si* g *et* $f \circ g$ *sont continues sur* I *montrer que* f *est continue sur* $g(I)$.

Exercice 6. *Soit* $f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ *une application dérivable telle que*

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(0) = 0, \\ &(2) \quad \exists\, C > 0 \ : \ \forall\, x \in [0,1], \ |f'(x)| \leq C|f(x)|. \end{aligned}$$

Montrer que f *est identiquement nulle.*

Exercice 7. *Soit* $f \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application dérivable, montrer que* $f'(a)$ *est valeur d'adhérence de* $f'(]a,b[)$.

Exercice 8. *Utilisez la théorème des accroissement finis sur une fonction convenable pour établir la divergence de la série harmonique* $\sum_n \frac{1}{n}$.

Exercice 9. *Montrer que*

$$x^y + y^x > 1, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Exercice 10. *Montrer que*

$$x - \frac{x^2}{3} < \sin(x) < \frac{11x}{10} - \frac{x^2}{4}, \quad \forall\, x \in]0, \pi].$$

Exercice 11. *Soit* $f \ :]0,1] \to \mathbb{R}$ *une application dérivable. Si* f' *est bornée sur* $]0,1]$ *montrer que la suite de terme général* $u_n = f(n^{-1})$ *est convergente.*

Exercice 12. *On se fixe un point* P *sur la parabole* $y = x^2$ *(distinct de l'origine). La normale à* $(\mathscr{P})$ *passant par* P *recoupe la parabole en un point* Q *; déterminer* P *pour que l'arc de parabole reliant* P *et* Q *soit de longueur minimale.*

Exercice 13. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & \text{si } \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable à l'origine à dérivée discontinue en ce point.

Exercice 14. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) & \text{si } \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable à dérivée non bornée sur le compact $[-1,1]$.

Exercice 15. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(x^{-1}) & si \;\; x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}$$

est dérivable à l'origine, que $f'(0) > 0$ *mais que* f *n'est monotone sur aucun voisinage de l'origine.*

Exercice 16. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left[2 + \sin(x^{-1})\right] & si \;\; x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $[-1, 1]$*, présente à l'origine un minimum global, toutefois* f' *ne garde pas un signe constant sur tout voisinage de* 0*.*

Exercice 17. *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \exp(-x^2/4) \sin(8x^{-3}) & si \;\; x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}$$

est dérivable à l'origine, à dérivée bornée sur tout intervalle fermé borné mais qui n'atteint jamais ses bornes sur tout voisinage de l'origine.

21 septembre 2007 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`