☯☢☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯☢☯

Samedi 10 novembre 2007, Séries et intégrales à paramètres.

Exercice 1. *Calcul de l'intégrale de Cauchy* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

(1) *On considère l'application* $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}e^{-xt}dt$.

- ➪ *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.
- ➪ *En déduire une forme explicite de* f *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.
- ➪ *Montrer que* f *est continue à l'origine.*
- ➪ *En déduire que* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

(2) *On considère les applications* $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t+x}dt$, $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt$.

- ➪ *Montrer que* f *et* g *sont de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.
- ➪ *Montrer que* f *et* g *sont solutions de l'équation différentielle* $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- ➪ *Montrer que* $f - g$ *est* 2π*-périodique.*
- ➪ *Montrer que* f *et* g *sont équivalentes à* $\frac{1}{x}$ *en* $+\infty$ *puis que* $f = g$.
- ➪ *En déduire que* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

(3) *Si on admet que (voir la question précédente)*

$$\forall\, a > 0\ :\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x+a}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^2+1}dx,$$

monter que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2. *Calcul de l'intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(1) *On considère l'application* $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$.

- ➪ *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$.
- ➪ *En déduire que* f *est solution d'une équation différentielle.*
- ➪ *Montrer que* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(on pourra introduire la fonction auxilliaire* $g(t) = e^{-t}f(t)$*...).*

(2) *Montrer successivement :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt, \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt.$$

Et à l'aide de la formule de Wallis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \in [0,1]$: $g_n(x) = \sin(nx)$ *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers* 0 *sur* $[0,1]$.

Exercice 4. *(Un lemme de Cantor) Soient* $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ *deux suites de nombres réels telles que la suite de fonctions* $(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))_n$ *converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur* $\mathbb{R}$.

(1) *Montrer que* $\lim_{\infty} \alpha_n = \lim_{\infty} \beta_n = 0$. *(pour la seconde limite on pourra raisonner par l'absurde..)*

(2) *Montrer que la conclusion subsiste si on a la convergence simple seulement sur* $[a,b]$, $a < b$. *Pour cela en posant* $f_n(x) = \dfrac{(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ *et, raisonnant par l'absurde montrer que l'on peut extraire de* $(f_n)_n$ *une sous suite simplement convergente vers zéro sur* $[a,b]$...

Exercice 5. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue à support compact et* $\tilde{f}$ *la fonction définie par*

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt.$$

(1) *Montrer que* $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(2) *Montrer que* $\tilde{f}$ *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

(3) *Montrer que si* $\tilde{f}$ *est à support compact alors* $f \equiv 0$.

(4) *Montrer que si* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ *alors* $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6. *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* σ *vérifiant* $|\sigma| < 1$.

• *Montrer que* $f : t \in \mathbb{R}_+^\star \mapsto f(t) = \dfrac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}$, $f(0) = z$, *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *(et continue).*

• *Pour* $t > 0$ *développer* f *en série d'exponentielles et appliquer la convergence dominée a la suite des sommes partielles pour établir*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}dt = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

• *Sachant (exercice classique des séries de Fourier...) que pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *on a* $\pi co\tan(\pi z) = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ *en déduire que pour* $2z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}dt = \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

• *On rappelle que (d.s.e.) pour* $|z| < 1$ *et* $t > 0$: $f(t) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(zt)^{2n+1}}{(2n+1)!\sinh(t)}$,

montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}dt = 2\sum_{n\geq 0}(1 - 2^{-2n-2})\zeta(2n+2)z^{2n+1}.$$

où $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$. *En déduire que pour* $|z| < 1$

$$\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 2\sum_{n\geq 0}(1 - 2^{-2n-2})\zeta(2n+2)z^{2n+1}.$$

Exercice 7. *(autour de la fonction Gamma)*

(1) *Soit* $f\ :\ (x,t)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star\longmapsto f(x,t):=t^{x-1}e^{-t}$. *Montrer que pour tout* $x>0$ *la fonction* $f(x,\cdot)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^\star$. *On définit alors la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^\star.$$

(2) *Montrer que* $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ *et, pour tout* $k\in\mathbb{N}$ *:*

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^\infty\big(\log(t)\big)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(3) *Etablir successivement*

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x),\ \forall x>0\ ;\quad \Gamma(n+1)=n!,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ;\quad \Gamma(x)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}.$$

(4) *A l'aide de la formule* $e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ *et de la suite de fonctions de terme général* $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\chi_{]0,n]}(t),\ n\geq 1$, *montrer que* $\Gamma'(1)=-\gamma$ *(*γ *est la constante d'Euler). Aprés avoir établi pour* $x>0\quad :\ \dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\dfrac{1}{x}$ *montrer que*

$$\Gamma'(n+1)=n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right),\ n\geq 1.$$

(5) *Au moyen du changement de variables* $s=\frac{t-x}{\sqrt{x}}$, *établir pour* $x>0$ *:*

$$\Gamma(x+1)=\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{\varphi(x,s)}ds$$

où $\varphi(x,s):=x\log\left(1+\dfrac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}$

(6) *Montrer que*

$$\forall s\in]-\sqrt{x},0]\ :\ \varphi(x,s)\leq-\frac{s^2}{2}\qquad et\qquad \forall s\geq 0,\ x\geq 1\ :\ \varphi(x,s)\leq\varphi(1,s).$$

(7) *En déduire* $\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{\varphi(x,s)}ds=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$ *puis la formule de Stirling*

$$\Gamma(x+1)\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}.$$

(8) *Montrer que pour tout* $x>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt\ =\ \Gamma(x),$$

et en déduire la formule de Gauss

$$\forall\, x\in]0,+\infty[,\quad \Gamma(x)\ =\ \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Puis celle de Weierstrass

$$\forall\, x\in]0,+\infty[,\quad \Gamma(x)\ =\ xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}.$$

On note $\psi\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$*, l'application définie pour* $x>0$ *par* $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$*. Démontrer que pour tout* $x>0\ :\ \psi(x)=-\dfrac{1}{x}-\gamma+x\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x(x+n)}$*, et en déduire que* $\Gamma'(1)=-\gamma=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\log(x)dx$.

(9) *(Le théorème de Bohr-Mollerup) Montrer que* $\log\Gamma$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^\star$*. Réciproquement, soit* $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star\to\mathbb{R}_+^\star$ *une application log-convexe vérifiant*

$$f(1)=1\quad et\quad \forall\, x>0,\ f(x+1)=xf(x).$$

Montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que $f=\Gamma$

Exercice 8. *Soit* X_λ *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},p)$ *suivant une loi de Poisson de paramètre* $\lambda>0$*, i.e.*

$$p(X_\lambda=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\mathbb{N}.$$

(1) *Calculer sa fonction caractéristique* φ_{X_λ} *et montrer que*

$$I_k:=\frac{k^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{k(e^{i\theta}-1-i\theta)}d\theta,\quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

(2) *En déduire la formule Stirling*

$$k!\simeq\left(\frac{k}{e}\right)^k\cdot\sqrt{2\pi k}.$$

PETIT RESUMÉ DU COURS

Dans tout ce qui suit I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I (à valeurs réelles et complexes), enfin les fonctions de module intégrable sur I est noté $L^1(\mathbb{R})$ et si $f \in L^1(\mathbb{R})$ on dira que « f est intégrable[1] sur I »

1. Théorème de la convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction dans $\mathcal{C}_m(I)$ vérifiant :

1) *Il existe $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_m(I)$ telle que*
$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in I \quad \text{« hypothèse de domination »}$$
2) *La suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur I vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I)$.*

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et
$$\lim_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_n f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

2. Théorème de la convergence monotone

Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{C}_m(I) \cap L^1(\mathbb{R})$ une suite croissante simplement convergente vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I)$. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si la suite $\left(\int_I f_n(t)dt\right)_n$ est majorée. Dans ce cas
$$\lim_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_n f_n(t)dt = \sup_n \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

remarque : en d'autre termes, pourvu que la suite soit monotone et simplement convergente sur l'intervalle d'intégration, la limite « rentre » dans l'intégrale en admettant les valeurs $\pm\infty$ si jamais la fonction limite f n'est pas intégrable. Ce théorème est bien utile lorsqu'il est délicat voire impossible de vérifier l'hypothèse de domination dans le théorème de la convergence dominée.

3. Inversion des symboles $\sum$ et $\int$

Soit $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_m(I) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que

1) *La série de fonction $\sum_n f_n(t)$ est simplement convergente sur I vers $f \in \mathcal{C}_m(I)$.*
2) *La série numérique $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ converge.*

Alors

$\rightsquigarrow$ *f est intégrable sur I*
$\rightsquigarrow$ $\int_I |f(t)|dt \leq \sum_n \int_I |f_n(t)|dt.$
$\rightsquigarrow$ *La série $\sum_n \int_I f_n(t)dt$ converge et*
$$\sum_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \sum_n f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

remarque : c'est seulement une condition suffisante : la série $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ peut trés bien diverger, à ce moment pour justifier un éventuel échange $\sum \int = \int \sum$ ce théorème est inutilisable ; on peut parfois

[1] Attention ! $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ mais $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$...

s'en sortir en essayant d'appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite $(g_n)_n$ des sommes partielles ($g_n = \sum_{1\leq k\leq n} f_k$)

4. Intégrales dépendant d'un paramètre

4.1. continuité.

Soit $f\ \ \Omega\times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant les propriétés

1) *f est continue sur $\Omega\times I$.*
2) *Il existe une fonction g intégrable sur I telle que*

$$|f(x,t)| \leq g(t), \quad \forall\,(x,t)\in\Omega\times I.$$

Alors $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur Ω

remarque : encore une fois, une domination globale est souvent impossible à obtenir ; mais il est bien sûr suffisant de travailler localement i.e. de dominer localement au voisinage de tout point $a\in\Omega$.

4.2. dérivation.

Soit $f\ \ \Omega\times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. Si de plus f admet sur $\Omega\times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant elle aussi les hypothèses précédentes, alors $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt, \quad \forall\,x\in I.$$

6 novembre 2007 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: lassere@picard.ups-tlse.fr