

Exercice 1. Autour de la fonction Gamma : Soit $f : (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x, t) := t^{x-1}e^{-t}$. Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction $f(x, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . On définit alors la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

- (1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N} : \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\log(t))^k t^{x-1}e^{-t} dt$.
- (2) Etablir successivement $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0 ; \Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
- (3) A l'aide de la formule $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{n})^n$ et de la suite de fonctions de terme général $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \chi_{]0, n[}(t), n \geq 1$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$ (γ est la constante d'Euler).
- (4) Après avoir établi pour $x > 0 \quad : \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$ montrer que $\Gamma'(n+1) = n! (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma), n \geq 1$.
- (5) Au moyen du changement de variables $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$, établir pour $x > 0 : \Gamma(x+1) = (\frac{x}{e})^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds$ où $\varphi(x, s) := x \log(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}) - s\sqrt{x}$
- (6) Montrer que $\forall s \in]-\sqrt{x}, 0[: \varphi(x, s) \leq -\frac{s^2}{2}$ et $\forall s \geq 0, x \geq 1 : \varphi(x, s) \leq \varphi(1, s)$.
- (7) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ puis la formule de Stirling

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

- (8) Montrer que pour tout $x > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$, et en déduire la formule de Gauss : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
- (9) Puis celle de Weierstrass : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x)^{-1} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}}$.
- (10) On note $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie pour $x > 0$ par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Démontrer que pour tout $x > 0 : \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x(x+n)}$, et en déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \log(x) dx$.
- (11) (Le théorème de Bohr-Mollerup) Montrer que $\log \Gamma$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* . Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application log-convexe vérifiant $f(1) = 1$ et $\forall x > 0, f(x+1) = x f(x)$.; montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que $f = \Gamma$

Exercice 2. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, 1] : g_n(x) = \sin(nx)$ Montrer que la suite $(g_n)_n$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers 0 sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

- (1) En remarquant que $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n} dt$.
- (2) A l'aide de la fonction $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 4. (1) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $e^{-x^2/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$.

- (2) Etude et équivalents en aux bornes du domaine de $f(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 5. Convergence et montrer que de $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 6. Convergence et calcul de $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1-t^2} dt$.