



Exercice 1. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ on pose $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt$. Après avoir justifié la définition de a_n , montrer que la suite a_n converge et préciser sa limite.

Exercice 2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^n} dt$. Après avoir justifié la définition de a_n , montrer que la suite a_n converge, préciser sa limite et donner un équivalent de a_n .

Exercice 3. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^n}$.

(1) Montrer que l'intégrale impropre $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t) dt$ converge si et seulement si $n \geq 2$.

(2) Montrer que la suite $(I_n)_2^\infty$ converge et préciser sa limite.

Exercice 4. Soit $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2xt) dt$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ de réels telle que $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}(1+x/n)^n}$.

(1) Montrer que l'intégrale impropre $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t) dt$ converge si et seulement si $n \geq 2$.

(2) Montrer que pour tout $x \geq 1$ et $n \geq 2$: $|f_n(x)| \leq 4/x^2$.

(3) Montrer que la suite $(I_n)_2^\infty$ converge et préciser sa limite.

Exercice 6. (1) Montrer que : $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = \int_0^1 x^x dx$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx$.

(2) Montrer que : $\sum_{n=0}^\infty \frac{2}{n^3} = \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1} dx$.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x$.

(4) Montrer que pour tout $a > 0$: $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{na+1}$.

(5) Si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ croît vers $+\infty$, montrer que $\int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 0} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Exercice 7. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$ en considérant la fonction $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ (montrer successivement que f est définie et continue sur $] -1, 1[$, égale à $\arctan(x)$ sur $] -1, 1[$ et continue sur $[0, 1]$...)

Exercice 8. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \int_0^\infty \frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

(1) Justifier la convergence des intégrales impropres.

(2) Par convergence dominée déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$.

(3) Montrer que $a_n - l = -\frac{\log(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{\pi} + \frac{J}{\sqrt{n}}$ où J sera donné sous la forme d'une intégrale.

Exercice 9. Soit $f(x) = \int_0^\infty e^{-u} \frac{\sin(xu)}{u} du$.

(1) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.

(2) Montrer que sur $] -1, 1[$ on a un développement sous la forme $f(x) = \sum_n a_n x^n$.

(3) En déduire f sur $] -1, 1[$. Montrer que cette expression subsiste sur tout \mathbb{R} .

Exercice 10. $\mathcal{E}([a, b])$ est l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} nulles en dehors de $[a, b]$.

(1) Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$, montrer l'existence de $\nu(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$.

(2) Montrer qu'il existe deux constantes α, β ne dépendant que des réels a et b telles que $|\nu(f)| \leq \alpha \|f\| + \beta \|f'\|_\infty$ pour toute fonction $f \in \mathcal{E}([a, b])$.

(3) Peut-on choisir $\beta = 0$?

Exercice 11. Soit $P(x) = 6 + 4x + 3x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 \in \mathbb{R}[x]$, on pose pour $x \in [0, 5[$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)} dt.$$

En quels point de $[0, 5[$, g atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?

Exercice 12. Domaine de définition, puis calcul de $F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

Exercice 13. Montrer que $\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch}(x)} dx = 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 14. Convergence et calcul de $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1-t^2} dt$.

Exercice 15. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

(1) Déterminer la limite l de la suite $(a_n)_n$.

(2) Déterminer un équivalent de $a_n - l$.

(3) Montrer que $u_n = l + \frac{a}{n} + \frac{J}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où l'on exprimera J sous forme d'une intégrale.

Exercice 16. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t+t^x}$, limites aux bornes du domaine.

Exercice 17. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}} dt$. Préciser les équivalents et limites de f aux bornes du domaine.

Exercice 18. Etudier sur son domaine de définition la fonction définie par $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} \log(t) dt$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f . En déduire la forme explicite de f .

Devoir 3, à rendre en TD le vendredi 27 janvier.

Exercice 19. (calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(u)}{u} du = \pi/2$). On pose pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$C(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx.$$

(1) Montrer l'absolue convergence de l'intégrale pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Montrer que $C \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

(3) Montrer que $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

(4) Montrer que $C \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ et $C''(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$, $t > 0$.

(5) Montrer que $\lim_{+\infty} C(t) = \lim_{+\infty} C'(t) = 0$.

(6) En déduire C' puis C sur \mathbb{R}_+^* .

(7) En déduire la valeur de l'intégrale de Cauchy $I = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(u)}{u} du$.