FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE
CONTINUITÉ, NOTES DE COURS

PATRICE LASSÈRE, 29 SEPTEMBRE 2011

1. $\mathbb{R}$, Ensembles, Applications.

1.1. Valeur absolue, Bornes supérieure, inférieure.

Définition 1. *On définit la* ***valeur absolue*** *d'un nombre réel x par*

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$ est la ***distance euclidienne*** *entre les deux réels x et y.*

Propriété 1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on a :*

(1) $|x| \geq 0$ *et* $\Big(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0\Big)$.
(2) $\forall\, \varepsilon > 0\ :\ (|x| < \varepsilon) \iff (-\varepsilon < x < \varepsilon)$.
(3) $|xy| = |x| \cdot |y|$.
(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
(5) $|x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$.
(6) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$.

Démonstration : Pour (1,2,3,4) voir votre cours de terminale ou exercice. Pour (6) si l'on écrit $x = (x - y) + y$ l'inégalité triangulaire (3) nous donne $|x| \leq |x - y| + |y|$ soit $|x| - |y| \leq |x - y|$; on échange alors les rôles de x et y pour obtenir l'autre inégalité. CQFD ■

Exercices : • Montrer par recurrence sur l'entier n que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
• Montrer pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|},\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|,\ \sqrt{|x + y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Définition 2. • *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un nombre réel. On dira que m est un* ***majorant*** *de X si*

$$\forall\, x \in X \ : \ x \leq m,$$

dans ce cas, on dira que X est ***majorée*** *; et si $\forall\, x \in X \ : \ x \geq m$ on dira que m est un* ***minorant*** *de X et X sera* ***minorée****. Toute partie à la fois majorée et minorée sera dite* ***bornée****.*
• *La* ***borne supérieure*** *d'une partie $X \subset \mathbb{R}$ est,* ***lorsqu'elle existe*** *le plus petit des majorants de X on la note $\sup X$; de même, la* ***borne inférieure*** *d'une partie $X \subset \mathbb{R}$ est, lorsqu'elle existe le plus grand des minorants de X, on la note $\inf X$.*

• *Si une partie non vide $X \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée, on écrira $\sup X = +\infty$, de même pour une partie non vide $X \subset \mathbb{R}$ non minorée on écrira $\inf X = -\infty$; avec la convention pour l'ensemble vide : $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.*

Remarques : • Soit m un majorant d'un ensemble X, si $m \in X$ on dira que m est le grand élément ou maximum de X, on le notera $\max(X)$. Attention à ne pas confondre borne supérieure et plus grand élément ou maximum. Par exemple $A = [0, 1[$ n'admet pas de plus grand élément mais une borne supérieure $\sup A = 1$. Même remarque entre l'inf et le minimum.
• $+\infty$ et $-\infty$ définis plus haut **ne sont pas** des nombres réels. Il est clair que si A n'est pas vide $\inf A \leq \sup A$.
• Voici les propriétés arithmétiques de $\pm\infty$: $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty - (-\infty) = \infty$, $\infty \pm c = \infty,\ c \in \mathbb{R}$, $-\infty \pm c = -\infty,\ c \in \mathbb{R}$, $(\pm\infty) \cdot c = \pm\infty,\ c > 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty(-\infty) = -\infty$. Et ne pas oublier que les opérations $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \infty/\infty,\ c/0$ ne sont pas définies.

Exercice : Soit $A \subset R$ un ensemble. Montrer que $\max A$ est défini de manière unique s'il existe. Montrer que $\max A$ existe si et seulement si $\sup A \in A$. Dans ce cas $\max A = \sup A$. On a une propriété analogue pour l'inf et le min.

Théorème 1. *Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.*

Remarques : Ce théorème est fondamental et loin d'être trivial ; observez bien qu'il peut être faux si l'on est pas dans $\mathbb{R}$. Par exemple dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x \leq \pi\}$ est majoré (4 est un des majorants) mais il **n'admet pas** (prouvez le ! exercice) de borne supérieure **dans** $\mathbb{Q}$.

Démonstration : Admise. ∎

Exercice : Si $A \subset \mathbb{R}$ est majorée, montrer que sa borne supérieure est unique.

Proposition 1. *(caractérisation de la borne supérieure). La borne supérieure b d'une partie X majorée de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :*

$$(\forall\, x \in X \ : \ x \leq b) \quad \text{et} \quad (\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in X \ : \ b - \varepsilon < x_\varepsilon)$$

Remarque : Comprendre cette proposition et sa démonstration est essentiel.

Démonstration : $\forall\, x \in X \ : \ x \leq b$ nous dit que X est majoré par b, la deuxième assertion signifie que tout réel strictement inférieur à b n'est pas un majorant de X : tout les majorant de X sont donc supérieur à b qui est donc bien la borne supérieure de X. ∎

En considérant l'ensemble $-X = \{-x,\ x \in X\}$ on a aussi des énoncés du même type pour la borne inférieure :

Proposition 2.

(1) *1) Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.*

(2) *2) (caractérisation de la borne inférieure). La borne inférieure b d'une partie X minorée de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :*

$$(\forall\, x \in X \ :\ x \geq b) \quad \textit{et} \quad (\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in X \ :\ b + \varepsilon > x_\varepsilon)$$

Terminons ce paragraphe par la liste des propriétés essentielles des bornes sup et inf. Il est essentiel pour toute la suite d'en maitriser parfaitement les démonstrations.

Proposition 3. *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, on pose $A + B := \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$, $cA := \{ca,\ a \in A\}, -A := \{-a,\ a \in A\}$. Alors*
- $A \subset B$ *implique que* $\sup A \leq \sup B$ *et* $\inf A \geq \inf B$ *(monotonie).*
- $\sup(-A) = -\inf A$ *et* $\inf(-A) = -\sup(A)$ *(réflexion).*
- $\sup(A + a) = a + \sup A,\ \inf(A + a) = a + \inf A,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ *(translation).*
- $\sup(cA) = c \cdot \sup A,\ \forall\, c \in \mathbb{R}_+^\star$ *(homogénéité).*
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A + B) = \inf A + \inf B$ *(additivité) à partir du moment où les sommes des sup ou des inf sont bien définies conformément à la remarque plus haut.*

Démonstration : Exercice obligatoire ! C'est le devoir 1. Par exemple montrons que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Si A est vide, il en est de même pour $A + B$ soit $\sup A + \sup B = -\infty + \sup B = -\infty = \sup(A + B)$ (souvenez vous que la somme des sup est est bien définie donc $\sup B \neq +\infty$) ; on procède de même si B est vide.

Si A et B sont non vides, alors $\sup A \geq a$ pour tout $a \in A$, et $\sup B \geq b$ pour tout $b \in B$. Donc $\sup A + \sup B \geq a + b$ pour tous $a \in A,\ b \in B$. $\sup A + \sup B$ est bonc un majorant de $A + B$ et par suite $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

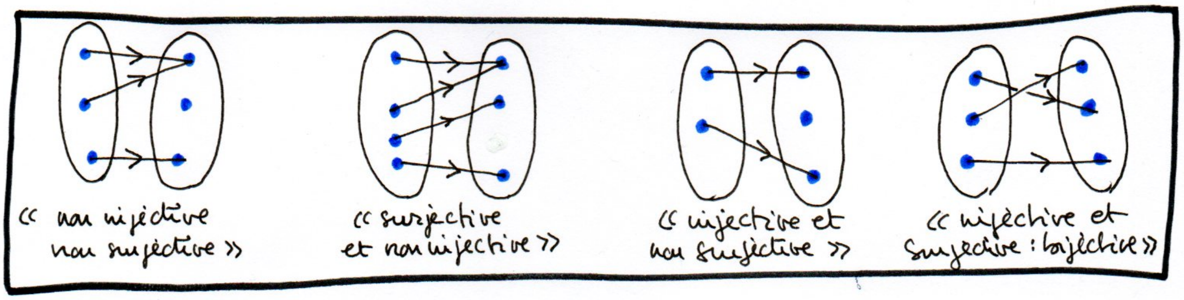
Pour l'inégalité inverse, observons dejà que si $\sup(A+B) = +\infty$ alors $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ implique $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Supposons donc $\sup(A + B) < +\infty$. Soient $a \in A, b \in B$, on a $a + b \leq \sup(A + B)$ et donc $a \leq \sup(A + B) - b$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$ on a donc $\sup A \leq \sup(A+B) - b$. En particulier $\sup A < +\infty$ et $b \leq \sup(A+B) - \sup(A)$ pour tout $b \in B$ qui implique $\sup B \leq \sup(A+B) - \sup(A)$ ou encore $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ ce qu'il fallait démontrer. CQFD. ∎

Exercices : • Soit $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.
• Montrer que $\max\{|x|\,|y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \max\{|x|\,|y|\}$ puis améliorer la seconde inégalité.
• Que dire d'une partie $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\sup \mathscr{A} = \inf \mathscr{A}$?

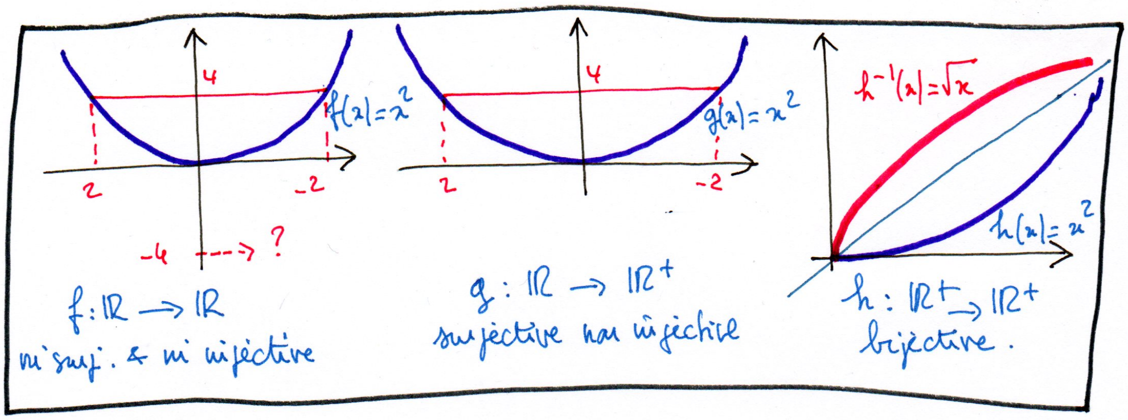
1.2. Applications - Rudiments de vocabulaire.

Définition 3. *Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*

- *On dira que f est **injective** si et seulement si :* $\forall\, x, x' \in E, (f(x) = f(x') \implies x = x'$.
- *On dira que f est **surjective** si et seulement si :* $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E\ :\ y = f(x)$.
- *On dira que f est **bijective** si elle est injective et surjective ; autrement dit, si et seulement si :* $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E\ :\ y = f(x)$.



Exemples-exercices : • La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$ est surjective mais pas injective, par contre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est ni surjective ni injective alors que la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = x^2$ est bijective et son application réciproque $h^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



• Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F, g : F \to G$. Si $g \circ f$ est injective montrer que f est injective. Si $g \circ f$ est surjective montrer que g est surjective.

• Montrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).

•

(1) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$.

(2) Déterminer une bijection de $\{1/n;\ n \geq 1\}$ dans $\{1/n;\ n \geq 2\}$.

(3) Déduire de la question précédente une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.

(4) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Corrigé :

(1) Posons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, définie par $f(n) = n + 1$. Remarquons f est bien à image dans $\mathbb{N}^*$. Il reste à prouver que f est bijective, ce qui est très facile avec la définition : si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(k) = n \iff k + 1 = n \iff k = n - 1$, l'équation $f(k) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{N}$, ce qui dit bien que f est bijective.

(2) Posons $g : \{1/n;\ n \geq 1\} \to \{1/n;\ n \geq 2\}$, définie par $g(1/n) = 1/(n + 1)$. Remarquons là aussi que l'ensemble d'arrivée est bien cohérent avec l'ensemble de départ. D'autre part, g est bijective.

(3) C'est plus compliqué ! ! ! Ecrivons $[0, 1] = \{1/n;\ n \geq 1\} \cup A$, où A est le complémentaire de $\{1/n;\ n \geq 1\}$ dans $[0, 1]$. On définit h de la façon suivante :
   - Si $x = 1/n$, alors $h(x) = 1/(n + 1)$.
   - Sinon, c'est-à-dire si $x \in A$, $h(x) = x$.

   Alors h est bijective ! Prouvons d'abord qu'elle est injective : si $h(x) = h(x')$, on distingue 3 cas :
   - Si $x \in A$ et $x' \in A$, alors $h(x) = x$ et $h(x') = x'$ ce qui entraîne $x = x'$.
   - Si $x \in A$ et $x' \notin A$, écrivant $x' = 1/k$, on a $x = h(x) = h(x') = 1/(k + 1)$, ce qui implique $x \notin A$, ce qui est impossible.
   - Si $x \notin A$ et $x' \notin A$, écrivant $x = 1/k$ et $x' = 1/n$, on a $1/(k + 1) = h(x) = h(x') = 1/(n + 1)$ ce qui entraîne $k + 1 = n + 1$ et par suite $x = x'$.

   Dans tous les cas possibles, on trouve $x = x'$, et h est injective. Prouvons maintenant que h est surjective, et choisissons $y \in [0, 1[$. Si $y \in A$, en particulier $y \neq 1$, et on a $h(y) = y$. Si $y \notin A$, $y = 1/n$, où n est entier strictement plus grand que 1 puisque $y \neq 1$. On a alors $h(1/(n - 1)) = y$. Dans tous les cas, y possède un antécédent, ce qui prouve que h est surjective.

(4) Rappelons que tout entier peut s'écrire $2k$ s'il est pair, et $2k + 1$ s'il est impair. Posons $f(2k) = k$, et $f(2k + 1) = -k$. Reste à vérifier que f est bijective, ce qui est laissé au lecteur ! ■

Propriété 2. *Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*

• *f est **injective** si et seulement si : « $\forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \implies x = x'$ » si et seulement si « tout élément de F admet au plus un antécédent dans E » si et seulement si « pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution ».*

• *f est **surjective** si et seulement si : « $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$ » si et seulement si « tout élément de F admet au moins un antécédent dans E » si et seulement si « pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution ».*

• *f est **bijective** si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$ si et seulement si « tout élément de F admet un et un seul antécédent dans E » si et seulement si « pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution ».*

• *Si $f : E \to F$ est bijective, il existe alors une unique application notée $f^{-1} : F \to E$ vérifiant $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$ c'est la l'**application réciproque** de f. $f^{-1} : F \to E$ est alors aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

• *Soient $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications. Vérifiant $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Alors, elles sont toutes deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.*

Démonstration : Exercice. ■

Exemple : On dira qu'un ensemble A est **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection $f : A \to \mathbb{N}$. Il est important d'observer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : pour cela on va construire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dénombrable (exercice : montrer que tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable, autrement dit, fini ou dénombrable). Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui nous intéresse est $M =]0,1]$, supposons, par l'absurde que M soit dénombrable et soit $M = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ une énumération de M. Ecrivons le développement décimal de chacun de ces réels, de telle sorte qu'il ne se termine pas par une infinité de 0 (i.e. on écrira par exemple 0.5 sous la forme 0.4999999...), ce développement est alors unique et on a

$$r_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots, \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

où $a_{ni} \in \{0, 1, 2 \dots, 9\}$ pour tous $n, i \in \mathbb{N}^\star$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots \\ r_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{33}\dots a_{2n}\dots \\ \vdots &= \quad \vdots \\ r_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots \\ \vdots &= \quad \vdots \end{aligned}$$

On choisit alors pour tout entier n, un nouvel entier $b_n \in \{1, 2 \dots, 8\}$ différente de a_{nn}. Alors le réel $b = 0.b_1b_2b_3\dots$ est dans M, donc $b = r_k$ pour un certain entier k, mais ceci est absurde car par construction b_k, la k-ième décimale de b est différente de a_{kk}, celle de r_k. Contradiction. CQFD. ■

Définition 4. ***Image directe, image réciproque*** *Soient $f : E \to F$ une application, A un partie de E et B un partie de F. On appelle* ***image directe*** *de A par f l'ensemble $f(A) := \{y \in F \ : \ \exists x \in A \ : \ f(x) = y\}$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble $f^{-1}(B) := \{x \in E \ : \ f(x) \in B\}$.*

Exemples-exercices : • ¡ Attention ! il faut être très attentif car la notation f^{-1} peut donc représenter deux objets : l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ de f lorsqu'elle existe, (i.e. lorsque f est bijective) et l'application réciproque $f^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$ de f qui existe toujours et ne suppose en rien que f soit bijective. Lorsque f est bijective, $f^{-1}(B)$ représente aussi bien l'image directe de B par l'application f^{-1} que l'image réciproque de B par f (vérification facile par double inclusion).

• f désigne une application de E dans F. A est un sous-ensemble non vide de E et B un sous-ensemble non-vide de F. Justifier les inclusions

(1) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
(2) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(3) A-t-on égalité en général ?

Solution :

(1) Prenons $x \in f(f^{-1}(B))$. Alors, il existe y élément de $f^{-1}(B)$ tel que $x = f(y)$. Puisque y est dans $f^{-1}(B)$, on sait que $f(y)$ est élément de B. Donc x est élément de B ce qui prouve l'inclusion.
(2) Prenons x élément de A. Alors $f(x)$ est élément de $f(A)$, ce qui signifie exactement que x est élément de $f^{-1}(f(A))$.

(3) Prenons $f : \{1,2\} \to \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$ et $2 \mapsto 1$ et $B = \{1,2\}$. Alors $f^{-1}(B) = \{1,2\}$ et $f(f^{-1}(B)) = \{1\}$ qui est différent de B.
Pour l'autre exemple, prenons $A = \{1\}$. Alors $f(A) = \{1\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1,2\}$ qui est différent de A.

Définition 5. *1) Soit $A \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine (i.e. $x \in A \implies -x \in A$ ou encore $A = -A$), on dira que $f : A \to \mathbb{R}$ est **paire** si $f(x) = f(-x)$, $\forall\, x \in A$. Si $f(x) = -f(-x)$, $\forall\, x \in A$ on dira que f est **impaire**.*
*2) On dira qu'un réel T est une **période** de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $f(x) = f(x+T)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Si f admet une période T non nulle on dira que f est T-périodique.*

Exemples-exercices : • Si f est impaire et $0 \in A$ montrer que $f(0) = 0$.
• Montrer que toute fonction $f : A \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique sous la forme $f = g + h$ avec g paire et h impaire.
• Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut-elle être injective ? surjective ?

Définition 6. *S'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in X : f(x) \le m$ on dira que f est **majorée** sur X (on définit de la même manière la notion de fonction **minorée** sur X). Toute fonction f à la fois majorée et minorée sur X sera dire **bornée** sur X.*
*Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. on dira que f présente point $a \in X$ un **maximum** si $\forall\, x \in X : f(x) \le f(a)$; elle présente au point a un maximum local si $\exists\, h > 0 : \forall\, x \in X \cap]a-h, a+h[: f(x) \le f(a)$; on le nomme aussi $\max_{x \in X} f(x)$. On définit de la même manière les notions de **minimum** et de **minimum local**.*

Exercices : • Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, admet-elle un maximum ? Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$, admet-elle un minimum ?
• ...

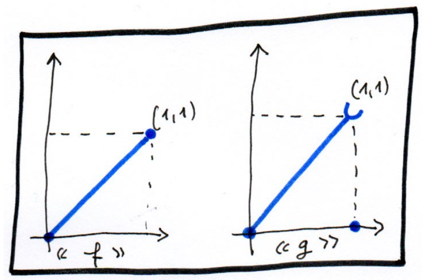
2. Limites.

2.1. Définitions, exemples.

Définition 7. *Soient $a < b$ deux nombres réels, $f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ une application. Pour $c\in]a,b[$ on dira que f admet pour* ***limite*** *$l\in\mathbb{R}$ lorsque x tends vers c et on écrira $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si et seulement si :*

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\eta(\varepsilon)>0\ :\ 0<|x-c|<\eta(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Commentaires : • Bien remarquer que $0 < |x-c| < \eta(\varepsilon)$ i.e. $x\in]c-\eta_\varepsilon, c[\cup]c, c+\eta_\varepsilon[$: x ne peut donc être égal à c. La valeur de la fonction au point c est sans importance pour sa limite, la limite traduit le comportement de la fonction lorsque x « tends » vers le point c. Par exemple les fonctions définies sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x$ si $x\neq 1$, $f(1) = 0$ admettent toutes les deux 1 comme limite en $x = 1$.



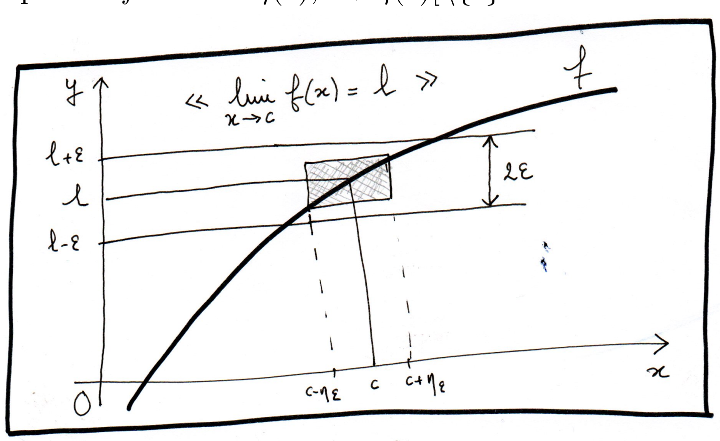
• Avec la définition de la valeur absolue

$$(\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\eta(\varepsilon)>0\ :\ 0<|x-c|<\eta(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad |f(x)-l|<\varepsilon)$$

équivaut à

$$(\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\eta(\varepsilon)>0\ :\ c-\eta(\varepsilon)<x<c+\eta(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon)$$

Autrement dit, au voisinage de c et pour tout $\varepsilon>0$ (c'est l'erreur) aussi petit qu'on le désire, le graphe de f sera à une distance inférieure à ε de l (c'est $|f(x)-l|<\varepsilon$) pourvu que x soit proche de c (i.e. pourvu que $0<|x-c|<\eta(\varepsilon)$). De manière imagée, $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si et seulement si pour tout bande horizontale centrée en l et d'épaisseur 2ε (voir la figure ci-dessous) il existe $\eta(\varepsilon)>0$ tel que le graphe de f sur $c-\eta(\varepsilon), c+\eta(\varepsilon)[\setminus\{c\}$ est tout entier inclu dans la bande.



• Si f n'admet pas l comme limite au point c, il faut donc trouver un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x_\eta \in]c-\eta, c+\eta[\setminus\{c\}$ vérifiant $|f(x_\eta) - l| \geq \varepsilon_0$.

• Il est parfois utile (ou plus agréable) de se ramener à une limite en zéro par un changement de variables i.e. $\lim_{x\to c} f(x) = l \iff \lim_{h\to 0} f(c+h) = l$. Par exemple calculer la limite au point a de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ par $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$. Faire de même pour $f(x) = \frac{x^n-a^n}{x-a}$, $n \geq 2$.

On définit de même les limites « à droite » et « à gauche » en un point :

Définition 8. (1) *Soient $a < b$ deux nombres réels, $f\ :\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ une application. On dira que f admet pour* ***limite à droite*** *$l \in \mathbb{R}$ lorsque x tends vers a et on écrira $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a,\ x>a} f(x) = l$ si et seulement si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta(\varepsilon) > 0\ :\ a < |x < a + \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

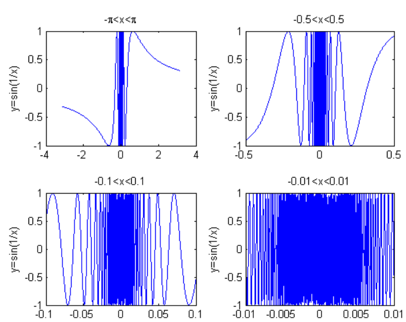
(2) *De même, on dira que f admet pour* ***limite à gauche*** *$l \in \mathbb{R}$ lorsque x tends vers b et on écrira $\lim_{x\to b_-} f(x) = \lim_{x\to b,\ x<b} f(x) = l$ si et seulement si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta(\varepsilon) > 0\ :\ b - \eta(\varepsilon) < x < b \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(3) *Enfin, pour $c \in]a;b[$ on dira que f admet pour* ***limite à gauche*** *$l \in \mathbb{R}$ lorsque x tends vers c par valeurs inférieures si la restriction $f\ :\ ]a,c[\to \mathbb{R}$ de f au segment $]a,c[$ admet l comme limite à gauche au sens précédent. On définit de même la* ***limite à droite*** *au point c.*

Exemples - Exercices : • Montrer (avec les ε et les δ) que $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

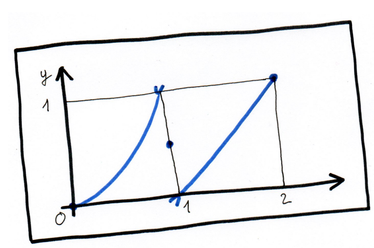
• La fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \sin(1/x)$ n'admet pas de limite en zéro.



• La fonction $f\ :\ [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ x-1 & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

admet 1 comme limite à gauche en $x = 1$ et zéro comme limite à droite en $x = 1$, elle admet aussi 0 comme limite à droite en $x = 0$ et 1 comme limite à gauche en $x = 1$.



Définition 9. *(limites en $\pm\infty$ et limites infinies).*

(1) *Soient* $f\ :\ ]a,+\infty[\to\mathbb{R}$ *une application. On dira que* f *admet pour limite* $l\in\mathbb{R}$ *lorsque* x *tends vers* $+\infty$ *et on écrira* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ *si et seulement si :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,A(\varepsilon)>0\ :\ x>A(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-l|<\varepsilon.$$

De même, on dira que $f\ :\ ]-\infty,b[\to\mathbb{R}$ *admet pour limite* $l\in\mathbb{R}$ *lorsque* x *tends vers* $-\infty$ *et on écrira* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=l$ *si et seulement si :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,A(\varepsilon)>0\ :\ x<A(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-l|<\varepsilon.$$

(2) *Soient* $f\ :\ ]a,+\infty[\to\mathbb{R}$ *une application. On dira que* f *admet pour limite* $+\infty$ *lorsque* x *tends vers* $+\infty$ *et on écrira* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall\,A>0,\exists\,B(A)>0\ :\ x>B(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad f(x)>A.$$

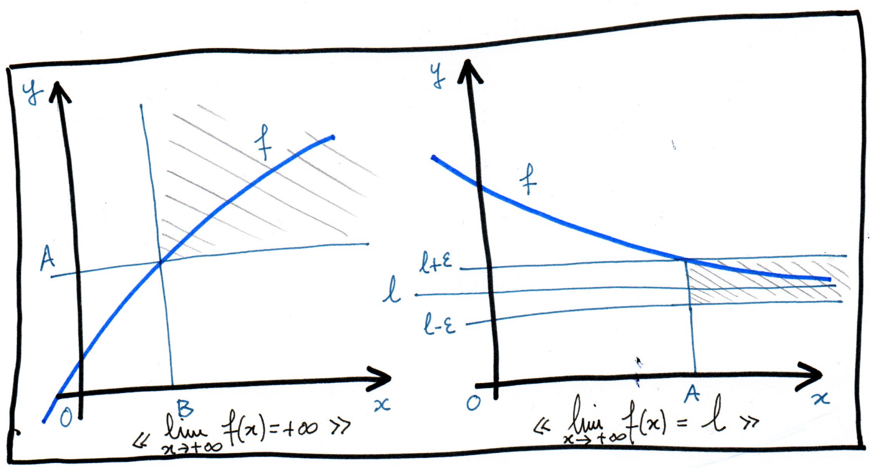
De même on dira que admet f *admet pour limite* $-\infty$ *lorsque* x *tends vers* $+\infty$ *et on écrira* $\lim_{x\to++\infty}f(x)=-\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall\,A<0,\exists\,B(A)>0\ :\ x>B(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad f(x)<A.$$

(3) *Pour* $f\ :\ ]-\infty,b[\to\mathbb{R}$ *on définit de la même manière les limites* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty$ *(exercice).*

Précisions : • Si $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ le graphe de f « tends » vers la droite $y=l$ lorque x tends vers $+\infty$; autrement dit le graphe de f sera dans le tube $l-\varepsilon<y<l+\varepsilon$ pourvu que x soit assez grand i.e. pourvu que $x>A$ c'est très exactement ce que veut dire « $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,A(\varepsilon)>0\ :\ x>A(\varepsilon)\implies|f(x)-l|<\varepsilon$ ».
• De même, dire que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ c'est dire que le graphe de f sera au dessus de toute droite horizontale $y=A$ pourvu que x soit suffisamment grand, i.e. pourvu que $x>B$; autrement dit : « $\forall\,A>0,\exists\,B(A)>0\ :\ x>B(\varepsilon)\implies f(x)>A$ ».

Ces deux situations sont illustrées sur les figures ci-dessous :



Exercices : • Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
• Etudier l'existence de limite à l'origine des fonctions suivante : $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{si } x\in\mathbb{R}^\star,\\ 1, & \text{si } x=0.\end{cases}$,
$g(x)=\begin{cases}|x|, & \text{si } x\le 0,\\ |x|+1, & \text{si } x>0.\end{cases}$ et $h(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$.
• Soient $f(x)=x^2, g(x)=\sin(x),\ x\in\mathbb{R}$, montrer soigneusement que pour tout $c\in\mathbb{R}$: $\lim_{x\to c}f(x)=c^2$ et $\lim_{x\to c}g(x)=\sin(c)$.

- Montrer que $\lim_{x\to\pi/2_-} \tan(x) = +\infty$.
- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$.

2.2. **Propriétés.**

Proposition 4. *(unicité de la limite) Si $f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ admet une limite en $c\in]a,b[$, elle est unique.*

Exercice : Faire de même pour les limite à gauche, à droite, en l'infini.

Démonstration : Supposons que f admette deux limites $l_1\neq l_2$ au point c et posons $\delta := |l_1-l_2|$. Alors vu les hypothèses nous pouvons écrire

$$\left(\lim_{x\to c} f(x)=l_1\right) \iff (\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\eta_1(\varepsilon)>0\ :\ 0<|x-c|<\eta_1(\varepsilon)\implies |f(x)-l_1|<\varepsilon)$$

$$\left(\lim_{x\to c} f(x)=l_2\right) \iff (\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\eta_2(\varepsilon)>0\ :\ 0<|x-c|<\eta_2(\varepsilon)\implies |f(x)-l_2|<\varepsilon).$$

$\varepsilon>0$ étant arbitraire choisissons $\varepsilon=\delta/3$; alors pour tout $x\in]a,b[$ vérifiant $|x-c|<\eta_3(\varepsilon):=\min\{\eta_1(\varepsilon),\eta_2(\varepsilon)\}$ nous aurons

$$\delta=|l_1-l_2|\leq|f(x)-l_1|+|l_2-f(x)|<\delta/3+\delta/3=2\delta/3$$

ce qui est absurde ! CQFD. ■

Proposition 5. *$f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ admet une limite l au point $c\in]a,b[$ si et seulement si $\lim_{x\to c_+} f(x)=l=\lim_{x\to c_-} f(x)$.*

Démonstration : Exercice, cela résulte des définitions. ■

Le résultat qui suit est fondamental : il permet de traduire en termes de suite la notion de limite ce qui rend souvent les choses plus faciles à manipuler.

Théorème 2. *$f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ admet une limite $l\in\mathbb{R}$ au point $c\in]a,b[$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n\subset]a,b[\setminus\{c\}$: $\lim_n x_n=c\implies\lim_n f(x_n)=l$.*

Remarque : Ce théorème reste valable si $a=\pm\infty$ ou $l=\pm\infty$... par exemple $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ tendant vers $+\infty$ la suite $(f(x_n))_n$ tends vers 4.

Démonstration : • (condition nécessaire ($\Rightarrow$)). Par hypothèse $\lim_{x\to c} f(x)=l$ autrement dit

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\eta(\varepsilon)>0\ :\ |x-c|<\eta_\varepsilon\implies|f(x)-l|<\varepsilon. \tag{1}$$

Considérons maintenant une suite $(x_n)_n$ convergente vers c, nous avons donc :

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N(\varepsilon)>0\ :\ n\geq N(\varepsilon)\implies|x_n-c|<\varepsilon. \tag{2}$$

$\varepsilon>0$ étant fixé, choisissons $N(\varepsilon)$ tel que $n\geq N(\varepsilon)$ implique $|x_n-c|<\eta(\varepsilon)$ (un tel choix est possible vu (2)...) ; alors $|x_n-c|<\eta(\varepsilon)$ implique vu (1) que $|f(x_n)-l|<\varepsilon$. Résumons nous : nous avons montré que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ vérifiant $n\geq N(\varepsilon)\implies|f(x_n)-l|<\varepsilon$: ce n'est rien d'autre que la définition de $\lim_n f(x_n)=l$. CQFD.

• (condition suffisante ($\Leftarrow$)). On procède par contraposée[1] : si f ne tends pas vers l au point c, alors il existe[2] $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x_\eta \in]a, b[\setminus\{c\}$ vérifiant simultanément $0 < |x_\eta - c| < \eta$ et $|f(x_\eta) - l| \geq \varepsilon_0$. η étant arbitraire, on choisit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\eta = 1/n$: il existe alors $x_n \in]a, b[\setminus\{c\}$ vérifiant $0 < |x_n - c| < 1/n$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$. $0 < |x_n - c| < 1/n$ pour tout $n \geq 1$ implique que $\lim_n x_n = c$; mais $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \geq 1$ nous assure que la suite $(f(x_n))_n$ ne peut converger vers l ; on a donc bien non(1) : CQFD. ■

Remarque : Cette caractérisation de la limite est bien utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point : par exemple s'il existe une suite $(x_n)_n$ convergente vers c telle que $(f(x_n))_n$ diverge alors f n'admet pas de limite au point c ; aussi s'il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ toutes deux convergentes vers c mais telles que les suites $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ convergent vers des limites différentes alors encore une fois f n'admet pas de limite au point c.

Exercices : • Montrer avec les suites que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
• La fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \sin(x^{-1})$ admet-t-elle une limite en $x = 0$?

Proposition 6. *(propriétes usuelles des limites) Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et $f, g\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ admettant en un point $c \in]a, b[$ une limite : $\lim_{x\to c} f(x) = l_1, \lim_{x\to c} g(x) = l_2$. Alors :*

(1) *f est bornée sur un voisinage de c.*
(2) *Si f est bornée au voisinage de c et si $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$ alors $\lim_{x\to c} |f(x) \cdot g(x)| = 0$.*
(3) $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$.
(4) $\lim_{x\to c} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot l_1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
(5) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$.
(6) *Si $l_2 \neq 0$:* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.
(7) $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l_1|$.[3]
(8) $(f \geq 0$ *et* $\lim_{x\to c} f(x) = l_1) \implies l_1 \geq 0$.
(9) $(f \geq g,\ \lim_{x\to c} f(x) = l_1$ *et* $\lim_{x\to c} g(x) = l_2) \implies l_1 \geq l_2$.
(10) *(th. des gendarmes)* $(f \geq g \geq h,$ *et* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l) \implies \lim_{x\to c} g(x) = l$.

Démonstration : On pourrait bien sûr invoquer le cours sur les suites mais cela est peu sportif : il faut manipuler les ε et η. Par exemple pour (4) : soit $x \in]a, b[$ on peut écrire :

$$|f(x)g(x) - l_1 l_2| = |f(x)\{g(x) - l_2\} + l_2\{f(x) - l_1\}| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - l_2| + |l_2| \cdot |f(x) - l_1|$$

et comme f admet une limite en c elle est bornée au voisinage de c (c'est (1)) donc $|f(x)| \cdot |g(x) - l_2|$ tends vers 0 lorsque x tends vers c (c'est (2)) ; de même $|l_2| \cdot |f(x) - l_1|$ tends vers 0 en c et le résultat suit... Pour le reste, exercice. ■

1. Contraposée : pour montrer une implication (1) $\implies$ (2) il est équivalent de montrer non(2) $\implies$ non(1), c'est le raisonnement par contraposée ; bien remarquer qu'il est différent du raisonnement par l'absurde qui consiste à supposer simultanément (1) et non(2) pour en déduire une contradiction.
2. C'est la négation de « $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0\ :\ |x - c| < \varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon$ »...
3. Il est essentiel de bien connaitre la double inégalité $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

3. Continuité

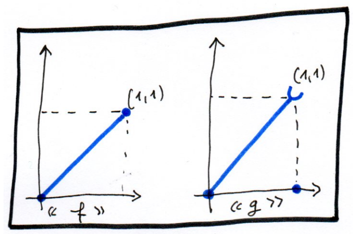
3.1. Définitions, propriétés générales.

Définition 10. *Soit $f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ et $c\in]a,b[$, on dira que f est* ***continue*** *au point c si et seulement si f admet une limite l en c et $l=f(c)$. autrement dit :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\eta(\varepsilon,c)>0\ :\ |x-c|<\eta(\varepsilon,c)\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

On dira que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en chaque point de $]a,b[$.

Remarque : Pour la continuité il faut donc deux choses : l'existence de la limite l et l'égalité $l=f(c)$. Si l'on reprend l'exemple du début (figure 1) ou les deux fonctions admettent 1 comme limite en $x=1$; seule f est continue :



Propriété 3.

(1) *Une fonction f sera continue au point c si, et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers c la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(c)$.*

(2) *Si f est définie sur $]a,b[\setminus\{c\}$ mais admet une limite l au point c, alors si on pose $\tilde{f}(c)=l$, $\tilde{f}=f$ sur $]a,b[\setminus\{c\}$, la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue au point c : c'est le* ***prolongement par continuité*** *de f au point c.*

(3) *Si $f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ n'admet pas de limite l au point $c\in]a,b[$, alors deux cas peuvent se produire : ou bien f admet des limites à droite et à gauche au point c distinctes : on dira alors que f présente au point c une* ***discontinuité de première espèce****; ou bien au moins une des deux limites (à gauche et à droite) n'existe pas : on dira alors que f présente au point c une* ***discontinuité de seconde espèce****.*

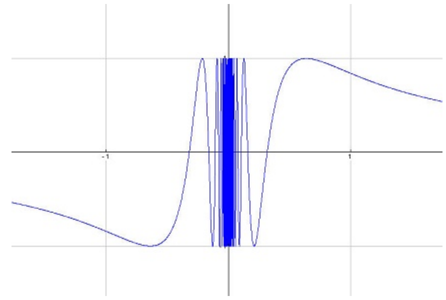
Démonstration : Ce sont des conséquences immédiates de la définition de la continuité et de la notion de limite. ■

Exemples-exercices : • La fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{si } x\in\mathbb{R}^\star,\\ 1, & \text{si } x=0.\end{cases}$ que nous avons vu au paragraphe précédent admet la limite $0\neq f(0)=1$ en 0 : elle n'est donc pas continue à l'origine, quel type de discontinuité avons nous ?

• Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}2, & \text{si } x\geq 0,\\ 1, & \text{si } x<0,\end{cases}$ n'est pas continue en $x=0$ de deux manières différentes : par la définition et avec les suites, quel type de discontinuité avons nous ?

• Mêmes questions avec

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x^{-1}), & \text{si } x\in\mathbb{R}^\star,\\ 1, & \text{si } x=0.\end{cases}$$



Propriété 4. *Soient $f,g\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ et $c\in]a,b[$, si f et g sont continues au point c alors :*

(1) *$f+g$ est continue au point c.*
(2) *λf est continue au point c pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.*
(3) *$f\cdot g$ est continue au point c*
(4) *Si $g(c)\neq 0$ alors f/g est continue au point c.*
(5) *$|f|$ est continue au point c.*
(6) *Soit J un intervalle contenant $f(]a,b[)$ et $h\ :\ J\to\mathbb{R}$ une application continue en $f(c)$, alors $g\circ f$ est continue au point c.*

Démonstration : Exercice. ■

Applications : On en déduit « facilement » la continuité des fonctions usuelles sur leur domaines de définition (polynômes, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques, log, exp...) ainsi que toutes celles que l'on peut déduire des précédentes par combinaison linéaire, multiplication, composition... sur leur domaines de définition.

3.2. Les théorèmes fondamentaux.

Théorème 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ I\to\mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b)\leq 0$ alors il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$.*

Démonstration : Supposons par exemple que $a\leq b$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a)\leq 0\leq f(b)$. On construit alors deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par récurrence de la manière suivante :
0n commence par poser $a_0=a$ et $b_0=b$, on a donc $f(a_0)\leq 0\leq f(b_0)$. Supposons maintenant a_n et b_n construits tels que $a_n\leq b_n$ et $f(a_n)\leq 0\leq f(b_n)$; posons $c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$ alors :
– si $f(c_n)\leq 0$ on pose $a_{n+1}=c_n$ et $b_{n+1}=b_n$.
– si $f(c_n)>0$ on pose $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=c_n$.
Dans les deux cas on a $a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$ et $f(a_{n+1})\leq f(b_{n+1})$. La suite $(a_n)_n$ est donc croissante, $(b_n)_n$ est décroissante et $a_n\leq b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. En outre, par construction nous avons

$$b_n-a_n=\frac{b_n}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N},$$

soit $\lim_n(a_n-b_n)=0$: les suites sont donc adjacentes, elle convergent vers la même limite $c\in[a,b]$ et comme par construction $f(a_n)\leq 0\leq f(b_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$ en passant à la limite, la continuité de f au point c nous donne $f(c)=0$. CQFD. ■

Remarques : • On peut énoncer ce résultat en disant que sur un intervalle, une fonction continue qui ne s'annule pas doit garder un signe constant.
• La méthode précédente donne un algorithme simple pour trouver la valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$: c'est la méthode de résolution par dichotomie, on s'arrête lorsque $(b-a)/2^n$ est inférieur ou égal à la précision demandée (pourquoi ?).
• Ce théorème est trivialement en général faux si f n'est pas continue, par exemple considérer $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ -1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ il est aussi faux si I n'est pas un intervalle, par exemple l'application continue définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$ prends les valeurs 1 et -1 mais ne s'annule jamais.

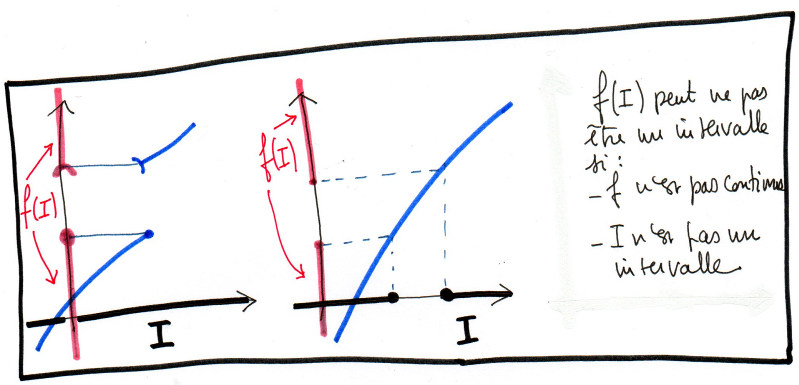
Théorème des valeurs intermédiaires : *Toute application f continue sur un intervalle $[a, b]$ f prends toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Démonstration : Si d est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, appliquer les théorème précédent à la fonction $x \mapsto f(x) - d$. ■

Corollaire : *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration : Exercice ($f(I)$ sera un intervalle ssi $y_1, y_2 \in f(I) \implies [y_1, y_2] \subset f(I)$... pour cela appliquer convenablement le théorème des valeurs intermédiaires). ■

Remarques : • L'intervalle peut être réduit à un point si f est constante : $I = \mathbb{R}$, $f \equiv 12$, alors $f(I) = \{12\}$.
• L'intervalle $f([a, b])$ n'admet pas forcément $f(a)$ et $f(b)$ comme extrémités. Par exemple, pour $f(x) = x^2$, on a $f([-2, 2]) = [0, 4] = [f(0), f(2)]$.

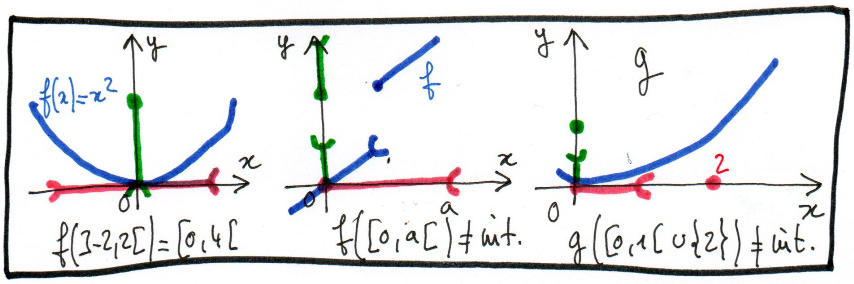


• Si f n'est pas continue, tout ceci n'a plus de sens : par exemple l'image $f(\mathbb{R})$ pour la fonction $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ -12, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ est $\{-12\} \cup \mathbb{R}_+^\star$ qui n'est pas un intervalle.
• Si I n'est pas un intervalle, le résultat ne subsiste pas non plus : considérez par exemple la fonction continue sur $\mathbb{R}^\star$ et définie par $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0, \\ -2, & \text{si } x < 0, \end{cases}$ alors $f(\mathbb{R}^\star) = \{-2, 2\}$ qui n'est pas un intervalle.

Théorème 4. *L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue f est encore un intervalle (éventuellement réduit à un point)* ***fermé borné*** *$[m, M]$. En particulier, toute fonction f continue sur un intervalle* ***fermé borné*** *$[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration : • Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Si $M < +\infty$, on choisit (définition du sup) pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ un réel $x_n \in [a,b]$ vérifiant $f(x_n) > M - 1/n$. Si $M = +\infty$, on choisit (re-définition du sup) alors $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. Dans les deux cas, $\lim_n f(x_n) = M$. Par construction $(x_n)_n \subset [a,b]$: bornée, la suite $(x_n)_n$ admet donc[4] une une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente vers $c \in [a,b]$. f étant continue au point c, on a forcément $\lim_k f(x_{n_k}) = f(c)$ i.e. $M = f(c)$. Donc $f(c) = M < \infty$: f est donc majorée et atteint sa borne supérieure.
• Pour la borne inf, on se ramène f à la situation précédente en remplacant f par $-f$. ■

Remarques : • Tout comme le théorème des valeurs intermédiaires ce dernier résultat est dans la pratique fondamental et il est essentiel de bien savoir l'utiliser.
• Le fait que l'intervalle doit être fermé borné est essentiel : par exemple la fonction continue définie sur $[0,1[$ par $f(x) = x$ est bornée mais n'atteint pas sa borne supérieure qui est 1 ; de même la fonction continue sur $[0,1[$ et définie par $g(x) = 1/(x-1)$ n'est cette fois pas majorée ; enfin la fonction définie sur l'intervalle fermé non borné $[0,+\infty[$ définie par $f(x) = e^{-x}$ est bornée minorée par 0 mais n'atteint pas sa borne inférieure.



• L'image par une fonction continue d'intervalle est un intervalle, l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné ; mais attention l'image d'un intervalle ouvert n'est pas nécessairement ouverte : l'image de l'intervalle ouvert $]-2,2[$ par $h(x) = x^2$ est l'intervalle non ouvert $[0,4[$. L'image peut même est un intervalle fermé borné (considérer une fonction constante ou périodique...).

4. Continuité uniforme.

Définition 11. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, on dira que f est* ***uniformément continue*** *sur I si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ |x - x_0| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \ \forall x_0 \in I.$$

Remarques : Voici ci-dessous les définitions de la continuité sur I et celle de la continuité uniforme :

$$\forall x_0 \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0 \ : \ |x - x_0| < \eta(\varepsilon, x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ |x - x_0| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \ \forall x_0 \in I.$$

La différence est que dans la définition de la continuité uniforme le η marche pour **tous** les x_0, il est **uniforme** en x_0.

Théorème 5. *Toute fonction f continue sur un intervalle* ***fermé borné*** *$[a,b]$ est uniformément continue.*

4. C'est le théorème fondamental du cours sur les suites.

Démonstration : Admise. ■

Remarques-mode d'emploi : • Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I, on dispose (ormi la définition) de deux conditions suffisantes : la première est que I soit un intervalle fermé borné (voir théorème plus haut) où, un peut plus généralement que f admette une limite finie aux points frontières de I (voir l'exercice 3 de la feuille 6) ; la seconde est que f soit α-Lipschitzienne sur I, i.e. qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$, $C > 0$ telles que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$, $\forall x, y \in I$ (par exemple pour assurer la continuité uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de $f(x) = \sin\sqrt{x}$... voir feuille 6).
• Pour montrer qu'une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur I on cherche en général (voir de multiples exemples en TD) dans I deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ vérifiant $\lim_n |x_n - y_n| = 0$ et $\exists C > 0 : |f(x_n) - f(y_n)| \geq C$, $\forall n \geq n_0$ (ces deux suites convergent vers lune extrémité I là où l'uniforme continuité se perd....).

3.3. Applications réciproques.

Théorème 6.

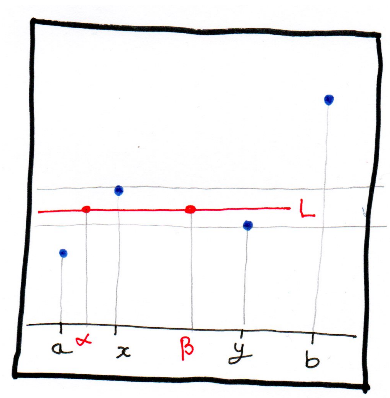
(1) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone sur un intervalle I, si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I. En particulier, si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone elle est donc injective et induit une application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ qui est continue.*

(2) *La réciproque est vraie : toute fonction f continue et injective sur I est strictement monotone sur I.*

En résumé : Une fonction continue f sur un intervalle I est injective si et seulement si elle est strictement monotone sur cet intervalle. Dans ce cas, $J := f(I)$ est un intervalle sur lequel l'inverse $f^{(-1)}$ $J = f(I) \to I$ est définie et continue.

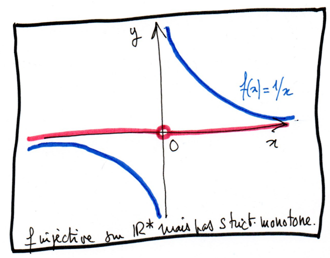
Démonstration : • On suppose par exemple f croissante. Soit $a \in I$ qui n'est pas la borne "sup" de I (ie si par exemple $I =]2, 3]$ alors $a \in]2, 3[$...). f étant croissante elle admet en a une limite à droite $l \geq f(a)$ (penser aux suites). Supposons que $l > f(a)$ alors $x > a \implies f(x) \geq l$ et $x \leq a \implies f(x) \leq f(a)$. La fonction f ne prends donc aucune valeur entre $f(a)$ et l mais puisque a n'est pas le plus grand élément de I il existe $b \in I : b > a$ qui assure $f(a) < l \leq f(b)$ et tout ceci est absurde car $f(I)$ est un intervalle et donc $[f(a), f(b)] \subset f(I)$. Ainsi $l = f(a)$: f est donc bien continue à droite sur $I \setminus \sup(I)$; on montre de même que f est continue à gauche sur $I \setminus \inf(I)$: f est bien continue sur I.
Pour l'application : si f est continue sur l'intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle (c'est le TVI...) et étant strictement monotone elle réalise une bijection $f^{-1} : f(I) \to I$ qui sera aussi strictement monotone (l'écrire...) la première partie du théorème assure alors la continuité de f^{-1} sur $f(I)$.

• On suppose f continue et injective sur $[a, b]$ et, sans perdre de généralité $f(a) < f(b)$, montrons qu'alors



f est strictement croissante sur $[a, b]$. Pour cela, supposons le contraire et soient $a \leq x < y \leq b$ avec $f(x) > f(y)$. Il y a deux possibilités : ou bien $f(a) < f(x)$ ou bien $f(a) \geq f(x)$. Dans le premier cas on choisit $L \in]f(a), f(x)[\cap]f(y), f(x)[$. Par le TVI il existe $a < \alpha < x < \beta < y$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) = L$. Mais f est injective et ceci ne peut se produire. Donc $f(a) \geq f(x)$ soit (injectivité) $f(a) > f(x)$ et ce cas se traite comme le précédent. f est bien strictement monotone. ■

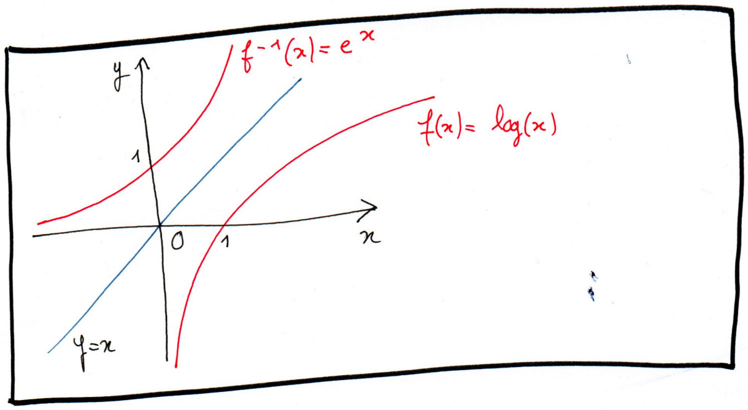
Remarque : • Le théorème est faux si I n'est plus un intervalle : par exemple la fonction $f(x) = 1/x$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^\star$ où elle n'est pas strictement monotone.



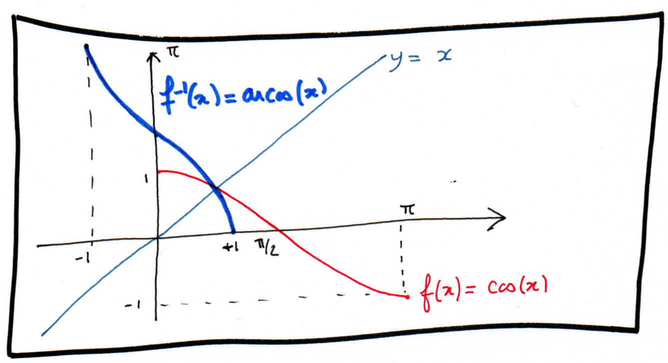
Il en résulte la continuité des applications réciproques de fonctions usuelles décrites dans la paragraphe suivant.

Bestiaire des fonctions réciproques usuelles :

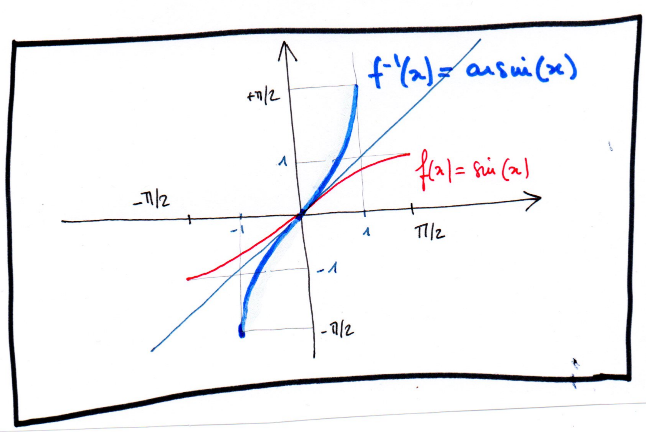
• L'application $\log\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante : elle admet donc une application réciproque continue : $\exp\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$.



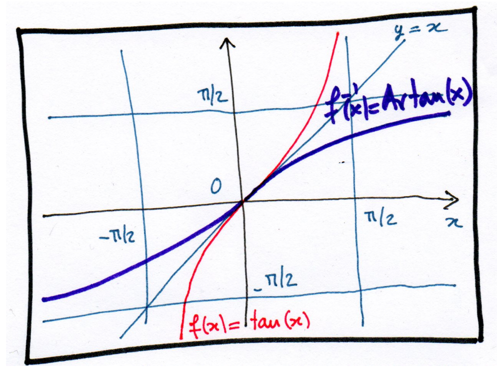
• L'application $\cos\ :\ [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue et strictement décroissante : elle admet donc une application réciproque continue : $\mathrm{arcos}\ :\ [-1,1] \to [0,\pi]$.



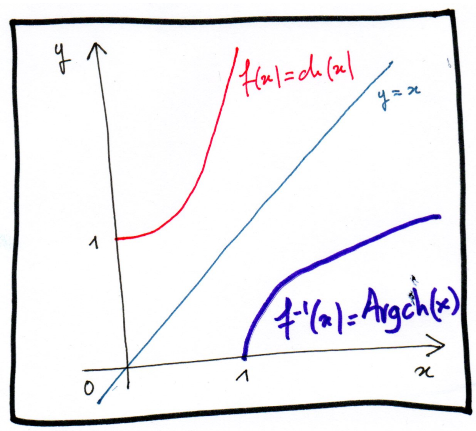
• L'application $\sin\ :\ [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ est continue et strictement croissante : elle admet donc une application réciproque continue : $\arcsin\ :\ [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$.



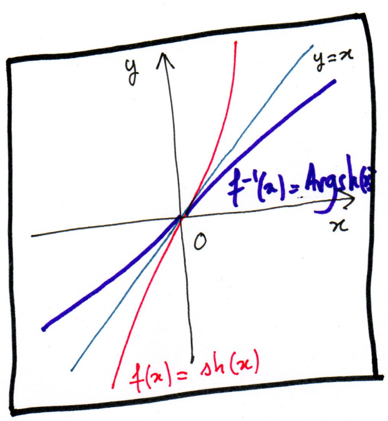
• L'application $\tan\ :\ ]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante : elle admet donc une application réciproque continue : $\arctan\ :\ \mathbb{R} \to]-\pi/2,\pi/2[$.



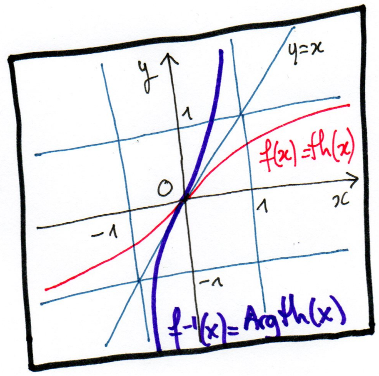
• L'application ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ est continue, sa restriction à $\mathbb{R}_+$ strictement croissante à valeurs dans $[1, +\infty[$: elle admet donc une application réciproque continue : argch : $[1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$.



• L'application sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ est continue strictement croissante à valeurs dans : elle admet donc une application réciproque continue : argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



• L'application th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1, 1[$: elle admet donc une application réciproque continue : argth : $]-1, 1[\to \mathbb{R}$.



Références

[1] , « Bibmath.net pour plein d'exos... ».

[2] C.Deschamps & A.Warusfel , « Mathématiques, première année », Dunod (1999).

[3] J.Dixmier , « Cours de Mathématiques, première année », Gaulthier-Villars (1976).

29 septembre 2011Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr