Université Paul Sabatier **Octobre 2011**

☯ M1 MEI Analyse – Feuille d'Exercices Semaine 8/9. ☯

Exercice 1. (1) *Soit* $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$ *continue par morceaux, décroissante et intégrable. Etudier* $\lim_{x\to 0} xf(x)$.

(2) *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *continue par morceaux, décroissante et intégrable. Etudier* $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$.

Exercice 2. (1) *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *peut-on dire quelque chose sur les limites de* f *en* $\pm\infty$ *?*

(2) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *est de plus uniformément continue sur* $\mathbb{R}$, *montrer que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(3) *On suppose que* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *et* $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) *Montrer qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{1/2}$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) *En déduire que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(4) *On suppose ici* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *telle que* $f + f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) *Montrer que* $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(b) *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 3. *Soit* Ω *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel qu'il existe* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux et telle que* f *et* $1/f$ *appartiennent à* $L^1(\Omega)$. *Montrer que* $\lambda(\Omega) < \infty$.

Exercice 4. *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de longueur* $\lambda(E) < \infty$ *finie et soient* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Montrer que* $L^q(E) \subset L^p(E)$ *et plus précisément*

$$\|f\|_p \leq \lambda(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad \forall\, f \in L^q(E).$$

En déduire que l'injection canonique $L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$ *est aussi continue.*

Exercice 5. *Soient* $1 \leq p, q < +\infty$, $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ *et* $r > 0$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Montrer la forme généralisée de l'inégalité de Hölder vue en cours :* $fg \in L^r(\Omega)$ *et* $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Exercice 6. ***(une inégalité de Hardy).*** *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R})$*. On pose pour* $x > 0$ *:* $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$*.*

(1) *Montrer que* g *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *et se prolonge continument en* $x = 0$*.*

(2) *Soient* $0 < a < b$*, montrer que*

$$\int_a^b g^2(t)dt = ag^2(a) + 2\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt \int_a^b f^2(t)dt}.$$

(3) *Montrer que* $\int_0^b g^2(t)dt \leq 4\int_0^b f^2(t)dt$*.*

(4) *En déduire que* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *et que* $\int_{\mathbb{R}_+} g^2(t)dt \leq 4\int_{\mathbb{R}_+} f^2(t)dt$*.*

(5) *A l'aide des fonctions* $f_n(t) = 1$ *pour* $0 \leq t \leq 1$*,* $= 1/\sqrt{t}$ *pour* $1 \leq t \leq n$ *et* $= \sqrt{n}/x$ *pour* $x \geq n$*, montrer que la constante* 4 *est optimale.*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr