Concours Mines-Ponts 2005

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

rédigé par Stéphane Legros (stephane.legros@free.fr), relu et corrigé par Philippe Patte

Remarque : comme l'énoncé le rappelle en avertissement, les intégrales impropres sont dites convergentes quand la fonction intégrée est sommable. Dans les preuves de sommabilité, remarquons une fois pour toutes que les fonctions intégrées sont toutes continues sur leur domaine d'intégration (sauf aux questions 26) et 27), où les fonctions intégrées ne sont même pas continues par morceaux).

I. Calculs préliminaires

1) $g\ :\ u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est continue et sommable sur $\mathbb{R}$, donc F_f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F_f'(x) = g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: F_f est donc un C^1- difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $F_f(\mathbb{R}) =]0, \sqrt{2\pi}[$, en remarquant que $F_f(x)$ tend vers 0 (resp. vers $\sqrt{2\pi}$) quand x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

2) On peut écrire l'égalité demandée sous la forme : $F_f \circ \varphi = F_1$. L'unique solution est donc $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$, qui est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) F_1 est un C^1- difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$, F_f^{-1} est un C^1- difféomorphisme croissant de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$, donc φ est un C^1- difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

4) Dérivons la relation définissant implicitement φ :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) f(\varphi(x))\,\mathrm{e}^{-\varphi(x)^2/2} = \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Comme $\varphi'(x) > 0$ et $f(\varphi(x)) > 0$, on peut prendre le ln :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln\, \varphi'(x) + \ln\, f(\varphi(x)) - \frac{1}{2}\,\varphi^2(x) = -x^2/2.$$

On a ensuite, pour x réel quelconque :

$$\ln (\varphi^{-1})'(x) = -\ln \varphi'(\varphi^{-1}(x)) = \ln f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) - \frac{1}{2}\left(\varphi(\varphi^{-1}(x))\right)^2 + \frac{1}{2}\,\varphi^{-1}(x)^2$$

d'où, pour tout réel x : $\ln (\varphi^{-1})'(x) - \ln\, f(\varphi(x)) - \dfrac{1}{2}\,\varphi^{-1}(x)^2 = -x^2/2$.

5) Soit $A > 0$. Par changement de variable ($v = \varphi(u)$), nous obtenons :

$$\int_{\varphi(-A)}^{\varphi(A)} f(u)|h(u)|\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \int_{-A}^{A} |h(\varphi(v))|\,\underbrace{f(\varphi(v))\varphi'(v)\,\mathrm{e}^{-\varphi(v)^2/2}}_{=\ \mathrm{e}^{-v^2/2}}\,\mathrm{d}v$$

Ceci prouve que la fonction $v \mapsto h(\varphi(v))\,\mathrm{e}^{-v^2/2}$ est sommmable sur $\mathbb{R}$ (puisque l'intégrale sur $[-A, A]$ de sa valeur absolue a une limite finie quand A tend vers l'infini). Nous pouvons ensuite supprimer la valeur absolue dans le calcul précédent et faire tendre A vers l'infini pour obtenir l'égalité demandée.

6) Soit $A = \max(0, \varphi^{-1}(0))$. φ est alors croissante et positive sur $[A, +\infty[$, donc, pour $x \geq A$:

$$\forall u \in [x, x+1], \ \begin{cases} \varphi^2(u) \geq \varphi^2(x) \\ \exp(-u^2/2) \geq \exp(-(x+1)^2/2) \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \geq \int_x^{x+1} \varphi^2(x)\,\mathrm{e}^{-(x+1)^2/2}\,\mathrm{d}u = \varphi^2(x)\,\mathrm{e}^{-(x+1)^2/2}.$$

7) Comme $f \in H_0$, il existe $\rho > 0$ tel que $0 \leq u^2 f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2} \leq \frac{1}{\rho} u^2\,\mathrm{e}^{-\rho u^2/2}$ pour tout u. Comme $\rho > 0$, cette fonction majorante est sommable sur $\mathbb{R}$: il est donc possible d'appliquer la question 5) à $h\ :\ u \mapsto u^2$. En particulier, la fonction $u \mapsto \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est sommable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale sur $[x, x+1]$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Il existe donc un réel $B_1 \geq A$ tel que $\displaystyle\int_x^{x+1} \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leq 1$ pour tout $x \geq B_1$. L'inégalité 6) donne donc :

$$\forall\, x \geq B_1,\ \varphi^2(x) \leq \mathrm{e}^{(x+1)^2/2} \int_x^{x+1} \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leq \mathrm{e}^{(x+1)^2/2} = \mathrm{e}^{(|x|+1)^2/2}.$$

Pour traiter le cas $x < 0$, il suffit de démontrer une inégalité semblable à celle du 6). Plus précisément, il existe $A_2 < 0$ telle que :

$$\int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \geq \varphi^2(x)\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2/2}$$

pour tout $x < A_2$ (même preuve qu'en 6) en faisant attention aux signes). Il existe ensuite $B_2 < A_2$ tel que $\displaystyle\int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leq 1$ pour tout $x \leq B_2$. Cela donne :

$$\forall\, x \geq B_2,\ \varphi^2(x) \leq \mathrm{e}^{(x-1)^2/2} \int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leq \mathrm{e}^{(1-x)^2/2} = \mathrm{e}^{(1+|x|)^2/2}.$$

Il suffit alors de poser $B = \max(B_1, -B_2)$ pour conclure.

8) $(u\varphi(u) - \varphi'(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\varphi(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right)$ et $(1-u^2)\,\mathrm{e}^{-u^2/2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right)$, donc $u \mapsto (u - \varphi(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est une primitive particulière de la fonction étudiée.

9) On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u &= (a - \varphi(a))\,\mathrm{e}^{-a^2/2} + (a + \varphi(-a))\,\mathrm{e}^{-a^2/2} \\ &\xrightarrow[a \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

en remarquant que, pour $|u|$ assez grand, $0 \leq |\varphi(u)|\,\mathrm{e}^{-u^2/2} \leq \mathrm{e}^{(|u|+1)^2/4 - |u|^2/2}$, et donc que $\varphi(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ tend vers 0 quand u tend vers $\pm\infty$.

Avant d'en conclure que $I = 0$, il reste à justifier la sommabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction intégrée. Quelques remarques seront encore nécessaires :

- comme $\varphi \in H_0$, on montre comme à la question 7) que $u \mapsto u\varphi(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est sommable sur $\mathbb{R}$;

- $u \mapsto (1-u^2)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est clairement sommable sur $\mathbb{R}$.
- la convergence démontrée plus haut prouve ensuite que $\displaystyle\int_{-a}^{a} \varphi'(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ a une limite finie quand a tend vers $+\infty$. Comme la fonction $u \mapsto \varphi'(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est de signe constant, ceci prouve qu'elle est sommable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est sommable sur $\mathbb{R}$ et $I = 0$.

II. Une inégalité intéressante

10) Commençons par majorer $\left|f(u)\ln f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right|$:

- si $f(u) \geq 1$, l'inégalité (A) nous donne :

$$\left|f(u)\ln f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right| \leq \frac{1}{\rho}(-\ln\rho + (1/2-\rho)u^2)\,\mathrm{e}^{-\rho u^2}.$$

- si $f(u) \leq 1$, une étude rapide de la fonction $x \mapsto x\ln x$ montre que :

$$\left|f(u)\ln f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{-\rho u^2}.$$

Nous avons donc pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\left|f(u)\ln f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\right| \leq \left(\frac{1}{\rho}\left|-\ln\rho + (1/2-\rho)u^2\right| + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\,\mathrm{e}^{-\rho u^2}.$$

Comme la fonction majorante est un $O(1/u^2)$ au voisinage de $\pm\infty$, l'intégrale $E(f)$ est convergente.

Comme vu à la question 7), $u \mapsto u^2 f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ et $u \mapsto \varphi(u)^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ sont sommables sur $\mathbb{R}$. D'autre part, l'inégalité du 7) donne, au voisinage de $\pm\infty$, $u\varphi(u)\mathrm{e}^{-u^2/2} = O(u\mathrm{e}^{-(u^2+2u+1)/4}) = O(1/u^2)$ donc l'application $u \mapsto u\varphi(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est également sommable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(f)$ est convergente.

11) Comme $E(f)$ converge, nous pouvons appliquer 5) à $h\ :\ u \mapsto \ln f(u)$ et obtenir l'égalité demandée.

12) C'est une application directe des questions 4) et 9) :

$$\begin{aligned}
E(f) - \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln(f(\varphi(u))) - \frac{u^2}{2} - \frac{\varphi(u)^2}{2} + u\varphi(u)\right)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-u^2 + u\varphi(u) - \ln(\varphi'(u))\Big)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \\
&= I + \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-\ln(\varphi'(u)) + \varphi'(u) - 1\Big)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))\Big)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

13) Comme $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (la fonction ln est concave, donc son graphe est sous la tangente à la courbe au point d'abscisse 1), on a $\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et donc $E(f) - \Phi(f) \geq 0$.

14) La fonction $F\ :\ u \mapsto \varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))$ étant continue et positive sur $\mathbb{R}$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle si et seulement F est identiquement nulle. On en déduit donc que $E(f) = \Phi(f)$ si et seulement si $\varphi'(u) = 1$ pour tout u (on a $x - 1 - \ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$).

Supposons que f soit telle que $\varphi' = 1$. Il existe alors une constante k telle que $\varphi(u) = u + k$ et 4) donne facilement $f(u) = \mathrm{e}^{ku-k^2/2}$ pour tout réel u.

Réciproquement, posons $f\ :\ u \mapsto \mathrm{e}^{ku-k^2/2}$ où k est un réel quelconque. f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et pour $\rho > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}(A) \quad &\iff \quad \forall\, u \in \mathbb{R},\ ku - k^2/2 \leq -\ln\rho + (1/2-\rho)u^2 \\ &\iff \quad \forall\, u \in \mathbb{R},\ (1/2-\rho)u^2 - ku + k^2/2 - \ln\rho \geq 0\end{aligned}$$

En choisissant $\rho < 1/2$, cette dernière condition sera vérifiée si le discriminant $\Delta(\rho) = 2\rho k^2 + 2\ln\rho - 4\rho\ln\rho$ est négatif ou nul. Comme Δ tend vers 0 quand ρ tend vers 0^+, il existe une valeur ρ_0 telle que $0 < \rho_0 < 1/2$ et $\Delta(\rho_0) \leq 0$: (A) est vérifiée pour cette valeur ρ_0.

Enfin, (A) prouve que $u \mapsto f(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est sommable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u-k)^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

f est donc élément de H_0.

Les applications f de H_0 vérifiant $E(f) = \Phi(f)$ sont donc les applications de la forme $u \mapsto \mathrm{e}^{-ku+k^2/2}$ pour k réel quelconque.

III. Extension aux fonctions positives

15) Bien que l'énoncé ne le demande pas, il semble nécessaire de démontrer que les f_n sont dans H_0.

- chaque f_n est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$;
- soit $\rho > 0$ associé à la fonction g et posons $\delta = \min(\rho, 1/2)$. Comme, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $r \mapsto \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{(1/2-r)u^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on peut écrire :

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\ \begin{cases} g(u) \leq \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{e}^{(1/2-\rho)u^2} \leq \dfrac{1}{\delta}\,\mathrm{e}^{(1/2-\delta)u^2} \\ 1 \leq 2 = \dfrac{1}{1/2}\,\mathrm{e}^{(1/2-1/2)u^2} \leq \dfrac{1}{\delta}\,\mathrm{e}^{(1/2-\delta)u^2} \end{cases}$$

  et donc par barycentre :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, u \in \mathbb{R},\ f_n(u) = \frac{n-1}{n}g(u) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\delta}\,\mathrm{e}^{(1/2-\delta)u^2}$$

  et les f_n sont des éléments de H.
- $\forall\, n \geq 1,\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \frac{n}{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$ donc $f_n \in H_0$.

Posons ensuite :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, u \in \mathbb{R},\ F_n(u) = \psi(f_n(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}, \\ \forall\, u \in \mathbb{R},\ F(u) = \psi(g(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}. \end{cases}$$

Alors :

- les F_n et F sont continues sur $\mathbb{R}$;
- la suite (F_n) converge simplement vers F sur $\mathbb{R}$;
- l'inégalité obtenue à la question 10 donne enfin :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |F_n(u)| \leq \left(\frac{1}{\delta}\left|-\ln\delta + (1/2-\delta)u^2\right| + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-\delta u^2}$$

  et l'application majorante est continue et sommable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$E(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\,\mathrm{d}u = E(g).$$

16) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\varphi_{\sigma(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi_i(x)$. On obtient alors l'égalité demandée en faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} f_{\sigma(n)}(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

En effet, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} f_{\sigma(n)}(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sigma(n)-1}{\sigma(n)}\int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\sigma(n)}\int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ et :

- $\displaystyle\frac{\sigma(n)-1}{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$;
- $\displaystyle\frac{1}{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{\psi_i(x)} g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{\psi_i(x)} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$

17) Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Comme $\varphi_n(x_1) \leq \varphi_n(x_2)$ pour tout n, nous avons également $\liminf_n \varphi_n(x_1) \leq \liminf_n \varphi_n(x_2)$ et $\limsup_n \varphi_n(x_1) \leq \limsup_n \varphi_n(x_2)$. Cette propriété est évidemment hors programme et même si elle se démontre facilement, elle n'est pas à la portée d'un élève normal de MP qui n'a jamais entendu parlé de limsup et de liminf.

Comme l'application ψ_i est croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet des limites (finies ou infinies) quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. Notons par exemple ℓ la limite de ψ_i en $-\infty$. Nous avons alors, dans le cas où ℓ est finie :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{-\infty}^{\psi_i(x)} g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u & \xrightarrow[x\to-\infty]{} & \displaystyle\int_{-\infty}^{\ell} g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \\
\| & & \\
\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u & \xrightarrow[x\to-\infty]{} & 0
\end{array}$$

Comme $u \mapsto g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est continue et positive sur $]-\infty,\ell]$, $g=0$ sur $]-\infty,\ell]$ et $\ell \leq a$.

Supposons maintenant que $\ell < a$ (avec ℓ finie ou infinie). Il existe alors un réel A tel que $\psi_i(x) \leq a$ pour $x \geq A$, et donc :

$$\forall\, x \leq A,\ \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_i(x)} g(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = 0$$

ce qui est absurde. On en déduit que $\ell = a$.

Une preuve identique montre que $\psi_i(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$.

Remarque : l'énoncé aurait dû à ce moment demander de démontrer que ψ_1 et ψ_2 sont à valeurs finies. En effet, si x est tel que $\psi_i(x) = -\infty$, alors l'égalité (2) donne :

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_i(x)} g(u)\mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = 0$$

ce qui est absurde. D'autre part, si $\psi_i(x) = +\infty$, la croissance de ψ_i prouve que $\psi_i(y) = \psi_i(x)$ pour tout $y \geq x$, et (2) donne alors :

$$\forall\, y \geq x,\ \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_i(y)} g(u)\mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_i(x)} g(u)\mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u,$$

ce qui est une nouvelle fois absurde.

18 et 19) La question 18) est mal posée, car elle ne permet de résoudre la question 19) que dans le cas où a et b sont finis. Au vu de la question 26), on comprend que le but des questions 18) et 19) est de démontrer que ψ_1 possède un nombre dénombrable de points de discontinuité dans tout intervalle de la forme $[-A, A]$. Pour remettre l'énoncé d'aplomb, on dispose de deux solutions raisonnables :

a) Pour tout $A > 0$, on note D_A l'ensemble des points de discontinuité de ψ_1 sur $[-A, A]$. On conserve alors la définition :

$$D_{A,\varepsilon} = \{x \in D_A,\ \psi_1(x^+) - \psi_1(x_-) > \varepsilon\}.$$

Pour N entier non nul, on montre alors que le cardinal de $D_{A,1/N}$ est inférieur à $N(\psi_1(A) - \psi_1(-A))$. La preuve est simple : si $x_1, x_2, \ldots, x_K$ sont K points distincts de $D_{A,1/N}$, avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_K$, alors :

$$\psi_1(-A) \leq \psi_1(x_1^-) < \psi_1(x_1^+) \leq \psi_1(x_2^-) < \psi_1(x_2^+) \leq \ldots \leq \psi_1(x_K^-) < \psi_1(x_K^+) \leq \psi_1(A)$$

et donc $\psi_1(A) - \psi_1(-A) \geq \big(\psi_1(x_1^+) - \psi_1(x_1^-)\big) + \cdots + \big(\psi_1(x_K^+) - \psi_1(x_K^-)\big) \geq \dfrac{K}{N}$.

À la question 19), on peut répondre que D_A est (au plus) dénombrable, puisque $D_A = \bigcup_{N\geq 1} D_{A,1/N}$ est une réunion dénombrable d'ensemble finis.

b) On note D l'ensemble des points de discontinuité de ψ_1 et on utilise l'argument "classique" : pour chaque point x de D, il existe un rationnel $\sigma(x)$ tel que $\psi_1(x^-) < \sigma(x) < \psi_1(x^+)$: l'application σ est alors une injection de D dans $\mathbb{Q}$: comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, D est au plus dénombrable.

Ces deux questions sont de toute façon hors programme : la notion d'ensemble dénombrable n'est plus au programme (c'est d'autant plus scandaleux ici que la question 19) est posée de manière très vague) et la manipulation des limites à droite et à gauche et des "sauts" faits par une application monotone en ses points de discontinuité est très éloignée de l'ordinaire de nos élèves !)

20) Si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$, l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_2(x)} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

prouve que g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ (l'intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle non réduit à un point est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur l'intervalle.

21) Si ψ_1 est discontinue en x, ou bien $\psi_1(x^-) < \psi_1(x)$, ou bien $\psi_1(x) < \psi_1(x^+)$. Dans le premier cas (le second se traite de la même façon), on peut écrire, pour tout $y < x$:

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(y)} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

ce qui donne, en faisant tendre y vers x^- :

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x^-)} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

On en déduit comme à la question 20) que g est nulle sur $[\psi(x^-), \psi(x)]$, et donc que $g(\psi(x)) = 0$.

22) Supposons que ψ_1 soit continue en x et que l'on ait $\psi_1(x) < \psi_2(x)$. Par continuité de ψ_1 en x, il existe $\eta > 0$ tel que $\psi_1(x) \leq \psi_1(x+\eta) \leq \psi_2(x)$. Comme g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ (question 20), on obtient enfin :

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\psi_1(x)+\eta} g(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x+\eta} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

ce qui est absurde. On en déduit que $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ dès que ψ_1 est continue en x.

23) K est compact, donc borné : il existe α et β tels que $K \subset [\alpha, \beta]$. Fixons ensuite $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ une subdivision de $[\psi_1(\alpha), \psi_1(\beta)]$ de pas inférieur à ε. Comme ψ_1 est croissante, nous avons :

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \psi^{-1}([a_i, a_{i+1}])$$

où $I = \{i_0, i_2, \ldots, i_q\}$ désigne l'ensemble des $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tels que $\psi^{-1}([a_i, a_{i+1}]) \cap K$ est non vide. Pour tout j compris entre 0 et q, $K_j = \psi^{-1}([a_{i_j}, a_{i_j+1}]) \cap K$ est une partie non vide de K. D'autre part, K_j est l'image réciproque du fermé $[a_{i_j}, a_{i_j+1}]$ par la restriction de ψ_1 à K, qui est continue : K_i est donc fermée dans K. On en déduit que K_i est un compact non vide, et nous pouvons définir :

$$\begin{cases} x_{2j} = \min\left(\psi^{-1}([a_{i_j}, a_{i_j+1}]) \cap K\right) \\ x_{2j+1} = \max\left(\psi^{-1}([a_{i_j}, a_{i_j+1}]) \cap K\right) \end{cases}$$

Nous avons alors :

- $K \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} \left(\psi^{-1}([a_i, a_{i+1}]) \cap K\right) \subset \bigcup_{j=0}^{q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$;
- pour $j \in \{0, \ldots, q\}$, $x_{2j}, x_{2j+1} \in K$ et $x_{2j} \leq x_{2j+1}$ (on ne peut pas imposer l'inégalité stricte, comme le demande l'énoncé : voir par exemple le cas où K est un singleton) ;
- pour $j \in \{0, \ldots, q\}$ et u, v tels que $x_{2j} \leq u \leq v \leq x_{2j+1}$, la croissance de ψ_1 donne :

$$\psi_1(v) - \psi_1(u) \leq \psi_1(x_{2j+1}) - \psi_1(x_{2j}) \leq a_{i_j+1} - a_{i_j} \leq \varepsilon.$$

24) Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{2q+1}$ choisis comme à la question précédente. Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, 2q+1\}$, on sait d'après 22) que $\psi_1(x_i) = \psi_2(x_i)$: la suite $(\varphi_n(x))_{n \geq 1}$ converge donc vers $\psi_1(x)$, et il existe un rang N_ε tel que :

$$\forall\, n \geq N_\varepsilon,\ \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, 2q+1\},\ |\varphi_n(x_i) - \psi_1(x_i)| \leq \varepsilon.$$

Si x est un élément quelconque de K et si $n \geq N_\varepsilon$, il existe ensuite j tel que $x \in [x_{2j}, x_{2j+1}]$ et la croissance de φ_n permet d'écrire :

$$\psi_1(x_{2j}) - \varepsilon \leq \varphi_n(x_{2j}) \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(x_{2j+1}) \leq \psi_1(x_{2j+1}) + \varepsilon$$

ce qui donne enfin :

$$-2\varepsilon \leq \psi_1(x_{2j}) - \psi_1(x) - \varepsilon \leq \varphi_n(x) - \psi_1(x) \leq \psi_1(x_{2j+1}) - \psi_1(x) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

La convergence uniforme de φ_n vers ψ_1 sur K est donc démontrée.

Remarque : tout ceci n'a de sens qu'une fois démontré que ψ_1 est à valeurs finies.

25) Il y a encore une erreur d'énoncé : il faut lire "pour tout $A \geq 0$" au lieu de "il existe A assez grand". Soit donc $A \geq 0$. Il existe [1] alors $n_1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\begin{cases} \forall\, m \geq n_1,\ \varphi_m(A) \leq \psi_2(A) + 1 \\ \forall\, m \geq n_2,\ \psi_2(-A) - 1 \leq \varphi_m(-A) \end{cases}.$$

En posant $n = \max(n_1, n_2)$, on a pour tout $u \in [-A, A]$ et pour tout $m \geq n$:

$$\psi_1(-A) - 1 \leq \varphi_m(-A) \leq \varphi_m(u) \leq \varphi_m(A) \leq \psi_2(A) + 1$$

puis $|\varphi_m(u)| \leq \max\left(|\psi_1(-A)| + 1, |\psi_2(A)| + 1\right) \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1$.

La notation de l'énoncé est maladroite, puisque l'on vient de définir un indice n qui dépend de A. En notant $K_0 = |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1$, nous avons :

- pour $m \geq n$ et $u \in [-A, A]$, $|u - \varphi_m(u)|^2 \leq (A + K_0)^2$;
- pour $m < n$, l'application $u \mapsto |u - \varphi_m(u)|^2$ est continue donc bornée sur $[-A, A]$ par une constante K_m.

ce qui donne :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [-A, A],\ |u - \varphi_m(u)|^2 \leq \max\left((A + K_0)^2, K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}\right)$$

et M est fini.

26) Les objets manipulés dans cette question n'ont pas grand sens pour un élève de prépa : on commence par intégrer sur $[-A, A]$ la fonction $u \mapsto |u - \psi_1(u)|^2 \mathrm{e}^{-u^2/2}$ qui n'est pas continue par morceaux (ψ_1 peut avoir une infinité dénombrable de points de discontinuité sur $[-A, A]$). Ensuite, on suggère d'intégrer sur K, où K est un fermé quelconque de $[-A, A]$, ainsi que sur le complémentaire de K : ces notions sont hors programme. Évidemment, les preuves se font facilement si l'on admet que les propriétés usuelles de l'intégrale sont encore vérifiées !

Soit $\varepsilon > 0$ et soit les λ_n, J_p et K définis comme dans l'énoncé (si ψ_1 n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité dans $[-A, A]$, il suffit de remplacer la réunion infinie par une réunion finie : les majorations utilisées ci-dessous restent valides). Pour simplifier l'écriture, notons :

- Ω l'ouvert $[-A, A] \setminus K$;
- F_n l'application $u \mapsto |u - \varphi_n(u)|^2\, \mathrm{e}^{-u^2/2}$;
- F l'application $u \mapsto |u - \psi_1(u)|^2\, \mathrm{e}^{-u^2/2}$.

[1] Il n'est pas évident pour un élève de penser à cette propriété classique des limites inf et sup !

Nous pouvons alors écrire, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_\Omega F_n(u)\,\mathrm{d}u \leq M \int_\Omega \mathrm{d}u \leq M \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{J_p} \mathrm{d}u = M \sum_{p=1}^{+\infty} 2 \times 2^{-p} \frac{\varepsilon}{M} = 2\varepsilon.$$

D'autre part, en considérant une sous-suite qui converge vers $\psi_1(u)$, l'inégalité obtenue en 25) donne :

$$\forall u \in [-A, A],\ |u - \psi_1(u)|^2 \leq M$$

et on obtient comme précédemment, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}u \leq 2\varepsilon.$$

La convergence uniforme de φ_n vers ψ_1 sur K donne ensuite la convergence uniforme de F_n vers F sur K :

$$\begin{aligned} |F_n(u) - F(u)| &= |\varphi_n(u) - \psi_1(u)| \times |2u - \varphi_n(u) - \psi_1(u)| \times \mathrm{e}^{-u^2/2} \\ &\leq |\varphi_n(u) - \psi_1(u)| \times (2A + 2|\psi_1(-A)| + 2|\psi_2(A)| + 1) \end{aligned}$$

et donc $\sup_{u\in K} |F_n(u) - F(u)| \leq (2A + 2|\psi_1(-A)| + 2|\psi_2(A)| + 1) \sup_{u \in K} |\varphi_n(u) - \psi_1(u)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit :

$$\int_K F_n(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_K F(u)\,\mathrm{d}u.$$

Il existe donc un rang N_ε tel que :

$$\left| \int_K F_n(u)\,\mathrm{d}u - \int_K F(u)\,\mathrm{d}u \right| \leq \varepsilon$$

pour $n \geq N_\varepsilon$. Cela donne, toujours pour $n \geq N_\varepsilon$:

$$\left| \int_{-A}^{A} F_n(u)\,\mathrm{d}u - \int_{-A}^{A} F(u) \right| \leq \left| \int_K F_n(u)\,\mathrm{d}u - \int_K F(u)\,\mathrm{d}u \right| + \int_\Omega F_n(u)\,\mathrm{d}u + \int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}u \leq 5\varepsilon$$

27) L'énoncé est une nouvelle fois très maladroit : la conclusion demandée est, comme expliqué au début de la partie III, l'inégalité $\Phi(g) \leq E(g)$ ... mais $\Phi(g)$ n'est pas défini ! Il faut sans doute comprendre que la bonne définition est : $\Phi(g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \psi_1(u)|^2 \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. En effet, le choix de ψ_1 pour "remplacer" φ est naturel, puisque φ_n converge presque partout [2] vers ψ_1, mais cette application semble dépendre de la suite approximante (f_n) choisie. Par contre, la relation (2) donne une légitimité au choix de ψ_1. Pour que tout cela soit cohérent, il faudrait sans doute démontrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi(x)} g(u)\,\mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ pour tout réel x, alors $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \psi_1(u)|^2 \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ (par exemple en démontrant que $\varphi = \psi_1$ presque partout).

Pour tout $A \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2} \int_{-A}^{A} |u - \varphi_n(u)|^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leq \Phi(f_n) \leq E(f_n)$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant les questions 15) et 26) :

$$\frac{1}{2} \int_{-A}^{A} |u - \psi_1(u)|^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leq E(g).$$

Comme la fonction $|u - \psi_1(u)|^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est positive, ceci prouve que $\Phi(g)$ est définie et que $\Phi(g) \leq E(g)$.

[2] Et même en dehors d'un ensemble dénombrable de points.