PROBLEME N°1

Pendant plusieurs siècles, on a utilisé et enseigné la règle de fausse position. L'encadré ci-dessous propose un extrait d'un ouvrage édité en 1784, consultable aujourd'hui sur le site de la Bibliothèque Nationale de France, expliquant cette règle.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne ; Professeur de Mathématiques au Collège Mazarin.

265. *La regle de fauſſe poſition* ſert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre ſuppoſé. Soit propoſé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme faſſent 456. Je ſuppoſe que ce nombre eſt 20. Mais il eſt clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne ſont que 19. Ma ſuppoſition eſt donc fauſſe. Elle n'en ſervira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puiſque deux quantités ſont toujours entre elles comme leurs parties ſemblables (242), on peut les regarder l'une comme la ſomme des antécédents d'une ſuite de termes proportionels, l'autre comme la ſomme des conſéquents. Or ces deux ſommes ſont entre elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents, & réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquieme de 20, ſont à la moitié, plus au quart, plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même eſt au nombre cherché. J'ai donc, 19 : 456 :: 20 : x = 480.	Retranscription du texte original en utilisant la typographie actuelle : Proposition 265. La règle de fausse position sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456 Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart et le cinquième de 20 ne font que 19. Ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connaître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables (Proposition 242), on peut les regarder l'une comme la somme des antécédents d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquents. Or ces deux sommes sont entre elles (Proposition 241), comme un nombre quelconque d'antécédents est au même nombre de conséquents et réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquième de 20 sont à la moitié plus le quart, plus au cinquième du nombre que je cherche, comme le nombre 20 est lui même au nombre cherché. J'ai donc $\frac{19}{456}=\frac{20}{x}$ et donc $x=480$.

1) Résoudre le problème posé : « trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456 ».
2) Le nombre 20 a-t-il été choisi au hasard ? Le résultat trouvé dépend-il de ce choix ?
3) L'auteur fait référence à deux propriétés établies auparavant (numérotées 242 et 241). La première citée (242) :« Deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables » peut se traduire aujourd'hui par l'égalité $\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$. Quelle propriété des tableaux de proportionnalité peut traduire la seconde ?
4) En appliquant cette méthode, trouver la solution du problème posé par Fancès Pellos gentilhomme niçois de la fin du XVe siècle : « Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long ? ».

PROBLEME N°2

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2), on considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = \frac{5}{2}z + \left(\frac{3}{2} + 2i\right)\bar{z} + 2i$. On désigne par A, B, C les points d'affixes $z_A = 1$, $z_B = -1+2i$, $z_C = -1-i$.

1° a) Placer les points A, B et C sur une figure.

b) Donner les affixes des points A', B', C' images respectives des points de A, B, C par f. Placer ces points sur la figure.

c) Montrer que les points A', B', C' sont alignés. On note Δ la droite (A'B').

2° Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}i$ et de rapport 5.

a) Donner l'écriture complexe de h.
b) Caractériser h^{-1} et donner son écriture complexe.
c) Déterminer les affixes des points A_1, B_1 et C_1 images respectives des points A', B', C' par h^{-1} et compléter la figure.
d) On note D l'image de la droite Δ par h^{-1}, vérifier que D est la droite passant par O et de vecteur directeur $\bar{u}$ d'affixe 2 + i.

3° On désigne par p l'application $p = h^{-1} \circ f$.

a) Vérifier que l'écriture complexe de p est : $z' = \frac{1}{2}z + \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i\right)\bar{z}$.
b) Montrer que p est un projecteur c'est à dire que $p \circ p = p$.
c) Pour tout point M du plan complexe $\mathcal{P}$ on note $M_1 = h^{-1}(M') = p(M)$ et z_1 l'affixe de M_1.

Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\frac{z_1}{2+i}$ est un nombre réel.

Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\frac{z - z_1}{2+i}$ est un nombre imaginaire pur.
d) Caractériser la projection p.
e) En déduire une construction de l'image M' par f pour un point quelconque M de $\mathcal{P}$.

PROBLEME 3

Ce problème comporte deux parties. La partie I permet de retrouver des résultats classiques de géométrie du triangle. La partie II aborde des questions relatives à la droite. Ces deux parties sont indépendantes l'une de l'autre, à l'exception de la question II.5. qui utilise des résultats de la partie I.

Dans tout le problème on se place dans le plan affine euclidien. On rappelle que, dans un triangle, le pied de la hauteur passant par un sommet est l'intersection de cette hauteur avec le côté opposé à ce sommet. D'autre part, z étant un nombre complexe, on désigne par $\bar{z}$ son conjugué et par $|z|$ son module.

Partie I

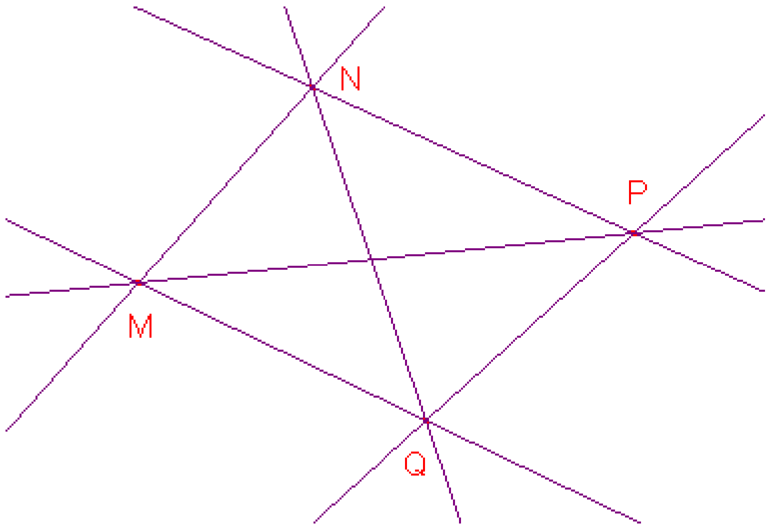
Dans tout le problème, on se place dans le plan affine euclidien.

On rappelle que, dans un triangle, le pied de la hauteur passant par un sommet est l'intersection de cette hauteur avec le côté opposé à ce sommet.

D'autre part, z étant un nombre complexe, on désigne par $\bar{z}$ son conjugué et par $|z|$ son module.

0. *Question préliminaire.*

*Définition 1.*On appelle *quadrangle* toute figure du plan formée par six droites joignant deux à deux quatre points non alignés trois à trois.



La figure ci-dessus représente le quadrangle (MNPQ). Les points M,N,P,Q sont les *sommets* de ce quadrangle et les segments [MN], [NP], [PQ], [QM], [PM], [QN] sont les *côtés*.

Définition 2. On dit qu'un quadrangle est *orthocentrique* si, et seulement si, chacun de ses sommets est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets.

0.1 Démontrer qu'un quadrangle (MNPQ) est orthocentrique si, et seulement si, le point M est l'orthocentre du triangle NPQ.

On se place désormais dans le plan complexe rapporté au repère cartésien orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$*, et on appelle* Γ *le cercle de centre O et de rayon 1.Soient A, B, C trois points distincts de* Γ *tels que le triangle ABC ne soit pas rectangle. On note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.*

Le point M d'affixe m sera parfois noté M(m).

0.2. Tracer une figure soignée représentant l'ensemble des situations étudiées. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions qui seront traitées.

1. *Construction d'un quadrangle orthocentrique.*

1.1. Soit C' l'image du point O dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB). Démontrer que C' est distinct de O, puis déterminer la nature du quadrilatèr AOBC'. Démontrer que l'affixe de C' est a+b.

1.2. On considère le point D tel que OC'DC soit un parallélogramme (éventuellement aplati).

a. A quelle condition portant sur le triangle ABC, les points O, C', D, C sont ils alignés ?

b. Montrer que (CD) est une hauteur du triangle ABC.

1.3. Démontrer que l'affixe d du point D est :

$$d = a+b+c$$

En déduire que (AD) et (BD) sont des hauteurs du triangle ABC.

1.4. Démontrer que le quadrangle (ABCD) est orthocentrique.

2. ***Le cercle et la droite d'Euler d'un triangle.***

2.1. On considère le milieu commun C_1 des segments [AB] et [OC'], et le milieu commun Ω des segments [OD] et [CC'] et, enfin, le milieu C_2 du segment [CD]. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{C_1\Omega}$ et $\overrightarrow{\Omega C_2}$.

2.2. En déduire que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en Ω passe par les milieux respectifs A_1, B_1, C_1 des côtés [BC], [CA], [AB] du triangle ABC, par les milieux respectifs A_2, B_2, C_2 des segments [AD], [BD], [CD] et par les points A_3, B_3, C_3, pieds des hauteurs du triangle ABC passant respectivement par A, B, C.

Le cercle précédent est appelé *cercle d'Euler du triangle ABC.*

2.3. Montrer que l'homothétie *h* de centre D et de rapport 2 transforme le cercle d'Euler du triangle ABC en le cercle circonscrit au triangle ABC.

2.4. A l'aide de ce qui précède, donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. Etant donné un quadrangle orthocentrique (ABCD), les quatre triangles déterminés par ses sommets pris trois à trois ont le même cercle d'Euler. Celui-ci passe par neuf points : les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs des triangles.

2.5. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer l'affixe de G ; en déduire que les points O, Ω, D et G sont alignés. Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, la droite passant par les quatre points précédents est appelée *droite d'Euler du triangle ABC.* Préciser la position des points Ω et G sur le segment [OD]. Que se passe-t-il si le triangle ABC est équilatéral ?

3. ***Cercle d'Euler associé à un quadrangle orthocentrique.***

On ajoute aux points A, B, C, D, C' introduits précédemment le point A'(b+c) et le point B'(c+a).

3.1. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle A'B'C' est centré en D et de rayon 1 et que le quadrangle (A'B'C'O) est orthocentrique (on pourra, en le justifiant, utiliser le fait que le triangle A'B'C' est l'image de ABC par une isométrie que l'on précisera).

3.2. Compléter l'énoncé suivant :

Théorème 2. Soit un quadrangle orthocentrique (ABCD). […]. Les huit triangles […] ont le même cercle d'Euler ; ce cercle passe par les douze points […] rattachés au quadrangle.

3.3. On s'intéresse maintenant aux droites d'Euler.

a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, on a $a+b+c = 0$.

b. Dans le cas ou le triangle ABC n'est pas équilatéral, que peut-on dire des droites d'Euler des triangles ABC et A'B'C'.

4. ***Un peu d'histoire des mathématiques.***

Comme on le sait, l'œuvre de Leonhard Euler (1707-1783) est colossale et touche à tous les champs des mathématiques ; mais Euler est plus connu pour ses travaux en analyse qu'en géométrie ; ses études dans cette branche étaient souvent prétextes à revenir à l'analyse qu'il affectionnait. Toujours épris d'un profond désir de clarté, il fut amené à préciser nombre de notations toujours en vigueur à l'heure actuelle.

Pouvez-vous, parmi vos connaissances personnelles des programmes du secondaire, choisir un point précis (notion de mathématiques ou notation) qui soit un apport de ce mathématicien et le situer comme tel dans une courte présentation d'une dizaine de lignes accessible à des élèves de lycée ? Le cercle d'Euler et la droite d'Euler ne peuvent être retenus ici.

Partie II

Dans cette partie, le plan complexe est toujours rapporté à un repère cartésien orthonormal direct d'origine O. On désigne toujours par Γle cercle de centre O et de rayon1 et on note, comme précédemment a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D. On conseille vivement de réaliser plusieurs figures séparées.

1. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. Démontrer que les angles orientés de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ sont égaux. En déduire $ab = cd$.

2. ***Equation complexe d'une droite du plan complexe.***

2.1. Soit I le milieu d'une corde $[AB]$ du cercle Γ. Soient $Z(z)$ un point, $S(s)$ l'image de Z dans la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$ et $T(t)$ le symétrique de S par rapport à I.

a. Lorsque le point Z est différent du point O, montrer que $\frac{s\ \ z}{|s||z|}=ab$, puis exprimer t en fonction de a,b,z. Le résultat obtenu est il toujours valable quand Z coïncide avec O ?

b. Démontrer que le point Z appartient à la droite (AB) si et seulement si $Z=T$.

c. En déduire que la relation :

$$(1)\ z + ab\,\overline{z} = a+b$$

Caractérise les points de la droite (AB).

d. Soit [PQ] un diamètre de Γ. On note p l'affixe du point P ; démontrer que les points de la droite (PQ) sont caractérisés par $z - p^2\,\overline{z} = 0$.

2.2. Soit Δ une droite quelconque du plan passant par le point $Z_0(z_0)$ et parallèle à (PQ). Montrer que la relation :

$$(2)\ z + ab\,\overline{z} = z_0 + ab\,\overline{z_0}$$

Caractérise les points de la droite Δ (on pourra noter que le point $Z(z)$ appartient à la droite Δ si et seulement si son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{Z_0O}$ appartient à la droite (PQ)).

On appelle la relation (2) une équation dans le plan complexe de la droite Δ. Le nombre $-p^2$ s'appelle le coefficient directeur complexe de toute droite parallèle à la droite (PQ).

2.3. Quel est le coefficient directeur de la droite (AB) définie au **2.1.** de cette deuxième partie ?

3. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. La droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par D recoupe le cercle Γ en $D'(d')$ (les points D et D' peuvent éventuellement être confondus). Démontrer que $d' = -c$, puis que $d' = -\frac{ab}{d}$.

4. ***Droite de Simson.***

Soient A, B, C, D quatre points distincts deux à deux du cercle Γ. On note $U(u)$, $V(v)$, $W(w)$ les projetés orthogonaux respectifs du point D sur les droites (AB), (BC), (CA). On se propose de démontrer que les trois points U,V,W sont alignés.

4.1. Démontrer ce résultat lorsque le la corde $[CD]$ est un diamètre du cercle Γ.

4.2. On se place dans le cas où la corde $[CD]$ n'est pas un diamètre du cercle Γ et n'est pas perpendiculaire à la corde $[AB]$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par D recoupe le cercle Γ en P.

a. Démontrer que les angles orientés de droites $((CA),(CP))$ et $((WA),(WU))$ sont égaux.

b. Déterminer le coefficient directeur complexe de la droite (*UW*) et en déduire que les trois points *U*, *V*, *W* sont alignés.

4.3. Démontrer que les trois points *U, V, W* sont encore alignés dans le cas où la corde [*CD*] n'est pas un diamètre du cercle Γ et est perpendiculaire à la corde [*AB*] (on pourra utiliser la tangente τ au cercle Γ en *C*).

La droite passant par les points *U*, *V*, *W* est appelée droite de Simpson du point D relativement au triangle *ABC*.

5. Cette question utilise des résultats obtenus dans la première partie. On y démontre le :

Théorème 3. Dans un quadrilatère inscrit dans un cercle, on considère pour chaque sommet la droite de Simpson relative au triangle formé par les trois autres sommets. Les quatre droites ainsi définies sont concourantes en un point appartenant aux cercles d'Euler des quatre triangles.

5.1. Soit *H* l'orthocentre du triangle *ABC*. Quelle est l'affixe de *H* ?

5.2. Déterminer une équation complexe des droites (*DU*) et (*AB*). En déduire la valeur de *u* en fonction de *a*, *b*, *d*.

5.3. Montrer alors que la droite de Simson du point *D* relativement au triangle *ABC* admet pour équation complexe :

$$(3)\ z - \frac{abc}{d}\overline{z} = \left[\frac{1}{2}(a+b+c+d) - \frac{abc}{d}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d})\right].$$

5.4. Montrer que le point *L* d'affixe $l = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ vérifie la conclusion du théorème 3.