Exercice 1. *Montrer que les deux séries suivantes convergent et calculer leur somme.*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{(n-1)!}.$$

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : f est 2π-périodique, paire et pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = x^2$.*

(1) *Déterminer les coefficients de Fourier de f. Est-elle développable en série de Fourier ?*

(2) *Calculer avec soin les sommes $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ en rappelant si nécessaire les théorèmes utilisés.*

Le Problème :

Dans tout ce problème $\mathbb{R}$ sera muni de sa norme naturelle, la valeur absolue et toutes les fonctions considérées seront à valeur dans $\mathbb{R}$. Si h est k fois dérivable, $h^{(k)}$ désignera la dérivée k-ième de h avec la convention $h^{(0)} = h$. Enfin, si h est bornée sur $\mathbb{R}$ on notera $\|h\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ sera dite **nulle à l'infini** si ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont nulles.

Le **support** d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I est un intervalle), noté $\operatorname{supp}(f)$ est l'adhérence des points où elle ne s'annule pas i.e. $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \neq 0\}}$. Une fonction sera dite à **support compact** si son support est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et on appellera **fonction test**, toute fonction à support compact et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On désignera par $\mathscr{T}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions test, il est facile de vérifier que c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.

L'objectif du problème est de découvrir les fonctions test dans la première partie et d'en voir deux applications : l'approximation uniforme de fonctions dans la seconde partie et un théorème de Whitney dans la troisième. Les seconde et troisième parties sont indépendantes et utilisent les résultats de la première. Ce problème est tiré de l'épreuve 1-CCP-MP (2006).

(1) **Découverte des fonctions test**

(a) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est bornée si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est compacte dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(c) On désigne par u la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4 - x^2$ si $x \in [0, 2]$ et $u(x) = 0$ si $x > 2$. Représenter u et déterminer son support. Est-elle à support compact ? une fonction test ? La fonction sinus est-elle une fonction test ?

(d) *Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ si $x \leq 0$.*

(i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_k, dont on précisera le degré, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $h^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x}$. En déduire que $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) h est-elle une fonction test ? Est-elle développable en série entière au voisinage de l'origine ?

(e) *On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = h\left(-(x+1)(x-1)\right)$.*

(i) Déterminer le support de φ puis justifier que $\varphi \in \mathscr{T}(\mathbb{R})$. Déterminer les variations de φ et tracer l'allure de sa courbe.

(ii) Déterminer une fonction test donc le support est $[3, 8]$ puis une dont le support soit $[1, 2] \cup [5, 6]$.

(f) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à support compact.

(g) *Construction d'une suite régularisante.*

(i) Montrer que la fonction φ construite dans la question (1-d) est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt > 0$. En déduire l'expression d'une fonction test ρ positive, de support $[-1, 1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt = 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction ρ_n sur $\mathbb{R}$ par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. La suite de fonctions $(\rho_n)_n$ est appelée **suite régularisante**. Calculer pour tout entier n le support de ρ_n et $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt$.

(2) **Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions test**

(a) Soit $(Q_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $\|Q_n - Q_N\|_\infty \leq 1$. En déduire que f est un polynôme.

(b) Enoncer le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass. Que déduire de la question précédente ?

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction paire e_n par $e_n(x) = 1$ si $x \in [0, n]$, $e_n(x) = -x + n + 1$ pour $x \in [n, n+1]$ et $e_n(x) = 0$ pour $x \geq n + 1$.*

(i) Représenter graphiquement la fonction e_n et montrer la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(e_n)_n$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

(ii) Montrer que toute fonction $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et nulle à l'infini est bornée sur $\mathbb{R}$.

(iii) Etudier la suite réelle $(\alpha_n := \sup_{|x| \geq n} |g(x)|)_n$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n = e_n \cdot g$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|g_n - g\|_\infty \leq C\alpha_n$.

(v) Qu'avez vous démontré ?

Dans les trois prochaines questions, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g une fonction continue à support compact supp$(g) \subset [-R, R]$.

(d) *Convolution.*

(i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto g(t)f(x-t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. On définit alors sur $\mathbb{R}$ l'application $x \mapsto g \star f(x) := \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt$. C'est le **produit de convolution** de g par f (étudié dans un cadre plus général au premier semestre).

(ii) Montrer que $f \star g$ est bien défini et le comparer à $g \star f$.

(iii) On suppose dans cette question f aussi à support compact avec supp$(f) \subset [-S, S]$. Que vaut $f \star g(x)$ si $x > S + R$? En déduire que $f \star g$ est aussi à support compact.

(iv) Montrer que si f n'est pas à support compact alors $f\star g$ n'est pas nécessairement à support compact.

(v) Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-a, a]$ on a $f \star g(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x-t)dt$.

(vi) Si $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, montrer qu'alors il est de même pour $f \star g$ et écrire plus simplement ses dérivées $(f \star g)^{(k)}$ à l'aide de produits de convolution.

(e) *Application à l'approximation.*

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si ρ_n désigne la fonction test introduite précédemment, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f \star \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| \cdot \rho_n(t)dt$.

(ii) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que que $(f \star \rho_n)_n$ est une suite de fonctions dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

(iii) En déduire que toute fonction continue à support compact est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions test.

(3) *L'objectif dans cette dernière partie est de démontrer le résultat suivant :* ***Théorème de Whitney :*** *Si F est une partie fermée dans $\mathbb{R}$, alors il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $F = \mathscr{Z}(f) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$.*

(a) La réciproque du théorème de Whitney est-elle vraie ?

(b) Pour toute partie fermée F de $\mathbb{R}$ et tout réel x, on pose $d_F(x) := \inf_{y \in F} |x - y|$. Déterminer $\mathscr{Z} d_F)$ et représenter graphiquement d_F dans le cas particulier où $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

(c) Avons nous démontré le théorème de Whitney ?

(d) Démontrer le théorème de Whitney dans les cas suivants :

(i) F est le complémentaire d'un intervalle ouvert $]a, b[$.

(ii) F est le complémentaire de la réunion de deux intervalles ouverts disjoints.

(e) Démontrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

(f) Démontrer le théorème de Whitney dans le cas général.

Fin de l'énoncé

4 juin 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

LE CORRIGÉ

Solution de l'exercice 1 : • Si $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ alors $u_n > 0$, et $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ terme général du série de Riemann convergente. Donc, par le théorème de comparaison notre série converge. Comme $u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2})$, on a par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Et par suite : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

• Le développement en série entière $e^x = \sum \frac{1}{n!}x^n$ est valable sur tout $\mathbb{R}$, on a donc $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ et $x = 2$ donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2$. ■

Solution de l'exercice 2 : f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux : par le théorème de Dirichlet, elle est développable en série de Fourier et la convergence est normale sur $\mathbb{R}$. On tire facilement $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 2\pi^2/3$ et $a_n = 4(-1)^n/n^2$ $(n \geq 1)$ aprés deux intégrations par parties. Ainsi $f(x) = \frac{\pi}{3}^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx),\ x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$ ce développement donne $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n^2 = -\pi^2/12$ et $x = \pi$: $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$, on tire alors facilement $\sum_{n\geq 1} 1/(2n+1)^2 = \pi^2/8$. Enfin le théorème de Parseval donne $\frac{\pi^2}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{90}$. ■

Corrigé du problème :

(1) **Découverte des fonctions test**

(a) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Il existe $R > 0$ tel que $A \subset [-R, R]$ et par définition de l'adhérence, on aura alors aussi $\overline{A} \subset [-R, R]$ i.e. $\overline{A}$ est bornée. C'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$, elle est bien compacte. Réciproquement, si $\overline{A}$ est compacte, alors elle est bornée et comme on a toujours $A \subset \overline{A}$, A sera aussi bornée.

(b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini et soit $\varepsilon > 0$. Comme f est nulle à l'infini, il existe $C > 0$ tel que $|x| > C$ implique $|f(x)| < \varepsilon/2$, par conséquent pour tous $x, y \in [C, +\infty[$ (ou $x, y \in]-\infty, -C]$) on aura $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Maintenant sur $[-C, C]$ compact, f continue sera uniformément continue : il existe donc $\delta > 0$ pour tous $x, y \in [-C, C]$ vérifiant $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ces deux propriétés assurent que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. f est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(c) u est clairement continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, mais ce n'est pas une fonction test car elle n'est pas dérivable en les points 2 et -2 (par exemple $u'_g(2) = -4 \neq 0 = u'_d(2)$).

La fonction sinus n'est pas une fonction test car elle n'est pas à support compact (par exemple la suite $(2n\pi + \pi/2)_n$ est incluse dans le support qui, de ce fait n'est pas borné.

(d) (i) Soit $k \in \mathbb{N}$ et désignons par $(\mathscr{P}_k)$ la propriété « il existe un polynôme P_k de degré $2k$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $h^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x}$ ». $(\mathscr{P}_0)$ est vraie et supposons $(\mathscr{P}_k)$ vraie jusqu'au rang n. Alors pour $x > 0$:

$$h^{(n+1)}(x) = \left(h^{(n)}(x)\right)' = \left(P_n(1/x)e^{-1/x}\right)' = \frac{P_n(x) - P_n'(1/x)}{x^2}e^{-1/x} = P_{n+1}(1/x)e^{-1/x},$$

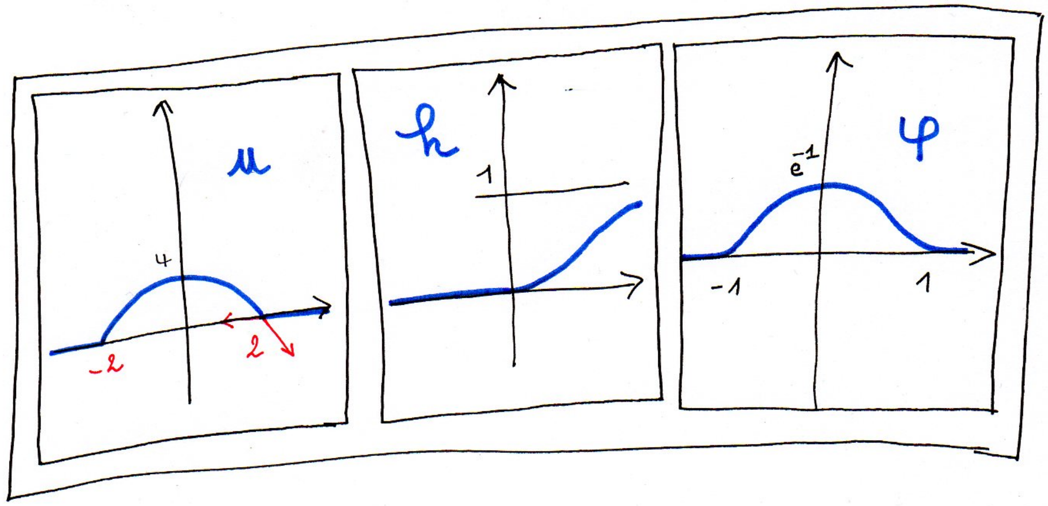
où P_{n+1} est clairement de degré $2 + 2n = 2(n+1)$ puisque $P_n - P_n'$ est de degré $2n$. $(\mathscr{P}_{n+1})$ est donc vraie : par récurrence sur n la propriété est bien démontrée.

Pour montrer que h est C^∞ il reste bien entendu a montrer quelle est indéfiniment dérivable à l'origine, la continuité y est évidente de même que la dérivabilité par croissance comparée, avec $h'(0) = 0$. Supposons h n fois dérivable à l'origine avec $h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(n)}(0) = 0$. Avec la formule précédemment établie

$$\frac{h^{(n+1)}(x) - h^{(n+1)}(0)}{x} = \frac{h^{(n+1)}(x)}{x} = \frac{P_{n+1}(x)}{x} \cdot e^{-1/x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

à nouveau par croissance comparée. Par récurrence sur n, h est indéfiniment dérivable à l'origine (et donc sur $\mathbb{R}$) avec $h^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) h n'est pas une une fonction test car son support est $\mathbb{R}_+$ qui est non borné. Elle n'est pas non plus développable en série entière car série de Taylor à l'origine $\sum_{n\geq 0} \frac{h^{(n)}(0)x^n}{n!}$ est (vu la question précédente) la fonction identiquement nulle et ne coïncide donc pas avec h.



(e) *On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = h(-(x+1)(x-1))$.*

(i) Le support de h étant $\mathbb{R}_+$, x sera dans le support de φ si et seulement si $1-x^2 \geq 0$, donc $\mathrm{suup}(\varphi) = [-1,1]$. Comme nous avons vu que $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, φ l'est également par compostition : c'est bien une fonction test.

Pour les variations de φ : elle est paire, nulle sur $[1,+\infty[$ et comme $h'(x) = -2xh'(1-x^2) \leq 0$ elle décroit sur $[0,1]$. L'allure de son graphe est immédiate.

(ii) Soient $-\infty << a < b < +\infty$ et $\varphi_{a,b}\ :\ \mathbb{R} \ni\mapsto \varphi_{a,b}(x) = h(-(x-a)(x-b))$. Vu l'exemple précédent c'est aussi une fonctions test de support cette fois $[a,b]$. Et si $[a,b]\cap[c,d] = \emptyset$ alors $\varphi_{a,b}+\varphi_{c,d}$ sera une fonction test de support $[a,b]\cup[c,d]$.

(f) Une telle fonction étant nulle en dehors d'un compact, ses limites en $\pm\infty$ sont donc nulles.

(g) *Construction d'une suite régularisante.*

(i) φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable, étant aussi à support compact $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. φ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ donc $C := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt > 0$ et par conséquent la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\rho(x) = \varphi(x)/C$ est une fonction test de support $[-1,1]$ positive et d'intégrale 1.

(ii) Il résulte immédiatement de la question précédente que $\rho_n(x) := n\rho(nx)$ est aussi une fonction test, positive de support $[-1/n, 1/n]$ et d'intégrale 1 (faire le calcul trivial). La suite de fonctions $(\rho_n)_n$ vérifie : $(\rho_n)_n \subset \mathscr{T}(\mathbb{R})$, les fonctions sont positives, de support $[-1/n,1/n]$ et d'intégrale 1. C'est ce que l'on appelle une suite régularisante.

(2) **Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions test**

(a) C'est un exercice classique qui doit être connu. Si $(Q_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, elle vérifie en particulier le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon = 1$ ce critère s'écrit $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $k,l \geq N$ impliquent $\|Q_k - Q_l\|_\infty \leq 1$. Or, tout polynôme borné sur $\mathbb{R}$ étant constant on aura $P_k - P_N \equiv \lambda_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \geq N$. En particulier, si $x = 0$ la convergence simple en ce point implique que $\lim_k \lambda_k = f(0) - P_N(0) := \lambda$ et alors en faisant tendre k vers l'infini dans $P_k(x) = P_N(x) + \lambda_k$ on tire $f(x) = P_n(x) + \lambda \in \mathbb{R}[X]$. CQFD.

(b) Le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass dit que $\mathbb{R}[X]$ est un sous espace dense de $\mathscr{C}([a,b])$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[a,b]$ et ceci pour tout $-\infty < a < b < +\infty$. La question précédente nous montre donc que l'on ne peut pas remplacer le compact $[a,b]$ par $\mathbb{R}$ (ou tout autre partie bornée de $\mathbb{R}$) dans le théorème de Weierstrass.

(c) (i) La simple convergence sur $\mathbb{R}$ vers $e \equiv 1$ est claire, par contre la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car par exemple $\|e_n - e\|_\infty \geq |e_n(n+2) - e(n+2)| = 1$. Observez tout de même que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(ii) Il suffit de reprendre la preuve de la question (1-b) où on observe qu'une telle fonction est bornée sur $|x| \geq A$; sur $[-A,A]$ c'est évident puisque c'est un compact et que g y est continue.

(iii) La suite $(\alpha_n := \sup_{|x|\geq n} |g(x)|)_n$ est décroissante minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $l \geq 0$. En reprenant encore une fois la preuve du (1-b), il est évident que l ne peut être strictement positif.

(iv) Pour $|x| \leq n$ on a $g_n(x) = g(x)$, donc $|g_n(x) - g(x)| = 0 \leq \alpha_n$. Pour $|x| \geq n+1$ alors $g_n(x) = 0$ et $|g_n(x) - g(x)| = |g(x)| \leq \alpha_n$ vu la définition de α_n. Enfin, si $n \leq |x| \leq n+1$: $g_n(x) = (n+1-|x|)g(x)$ et $|g_n(x) - g(x)| = |g(x)(|x| - n) \leq (n+1-n)|g(x)| = |g(x)| \leq \alpha_n$. En conséquence, on a bien $\|g_n - g\|_\infty \leq \alpha_n$.

(v) (2-C-iii) et (2-C-iv) impliquent $\lim_n \|g_n - g\|_\infty = 0$. La suite $(g_n)_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers g. On a donc démontré que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues à support compact (attention ! g étant seulement continue, $e_n g$ est à support compact mais n'a aucune raison d'être dérivable : ce n'est donc pas une fonction test).

Dans les trois prochaines questions, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g une fonction continue à support compact $supp(g) \subset [-R, R]$.

(d) (i) Comme g est une fonction continue à support compact, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on aura $|g(t)f(x-t)| \leq \|g\|_\infty \cdot |f(x-t)| \in L^1(\mathbb{R})$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$ implique que $\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|dt \underset{u=x-t}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(u)|du < +\infty$. Plus simplement on pourrait observer que g étant à support compact $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est aussi à support compact ; étant continue elle est dans $L^1(\mathbb{R})$.

(ii) $f \star g$ est bien définie pour des mêmes raisons et le changement de variables $u = x - t$ assure que $f \star g = g \star f$.

(iii) Si $x > S + R$ alors pour tout $t \in [-R, R]$, $x - t > (R + S) - R = S$ et donc $f(x-t) = 0$. Donc $f \star g(x) = g \star f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt = \int_{-R}^{R} g(t)f(x-t)dt = 0$. De même, $f \star g(x) = 0$ pour $x < -R - S$. Le produit de convolution de deux fonctions continues à support compact est à support compact.

(iv) Si $f \equiv 1$ et g est la fonction u à support compact définie en (1-c) alors $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t)dt = 32/16$ pour tout réel x. La convolution d'une fonction continue avec une fonction à support compact n'est donc pas forcément à support compact.

(v) Soit $a > 0$ et $x \in [-a, a]$. Si $t > a+R$ alors $x-t < a-(a+R) = -R$ et donc $g(x-t) = 0$. Si $t < -a-R$ alors $x - t > a - (-a - R) = 2a + R > R$. Ainsi $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x-t)dt$ pour tout $x \in [-a, a]$.

(vi) Soit $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $a > 0$, avec la question précédente nous avons $f \star g(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x-t)dt$ pour tout $x \in [-a, a]$, f étant continue on vérifie sans peine que les hypothèses de domination du théorème de dérivation des intégrales à paramètres sont vérifiées sur $[-a, a]$. donc $f \star g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $(f \star g)' = f \star g'$. En réitérant ce raisonnement on déduit que $f \star g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec $(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}$.

(e) *Application à l'approximation.*

(i) Comme $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt = 1$ on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_n(t)dt = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. 0n peut donc écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \in \mathbb{R}$: $|f \star \rho_n(x) - f(x)| = |\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x-t))\rho_n(t)dt| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x-t)|\rho_n(t)dt = \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| \cdot \rho_n(t)dt$ (car ρ_n est à valeurs positives et à support compact dans $[-1/n, 1/n]$).

(ii) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η_ε tel que $|u - v| \leq \eta_\varepsilon$ implique $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $2/n \leq \eta_\varepsilon$; pour un tel choix $|f(x-t) - f(t)|\varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [-1/n, 1/n]$ (car $x - t$ et x sont dans $[x - 1/n, x + 1/n]$...). Il en résulte immédiatement via la question (2-e-i) que pour tout réel x : $|f \star \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| \cdot \rho_n(t)dt \leq \int_{-1/n}^{1/n} \varepsilon\rho_n(t)dt = \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $n \geq N$: $\|f \star \rho_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$: la suite $(f \star \rho_n)_n$ est bien uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers f. Et les fonctions $f \star \rho_n$ sont bien dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ par la question (2-d-vi).

(iii) Si f est continue à support compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (1-b), donc d'aprés la question précédente, elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite d'une suite $(f \star \rho_n)_n$ de fonction C^∞ qui seront de plus à support compact si f l'est (2-d-iii) : ce sont donc bien des fonctions test.

(3) *L'objectif dans cette dernière partie est de démontrer le résultat suivant :* ***Théorème de Whitney :*** *Si F est une partie fermée dans $\mathbb{R}$, alors il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $F = \mathscr{Z}(f) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$.*

(a) L'image réciproque du singleton $\{0\}$ par la fonction continue f est fermée, donc $\mathscr{Z}(f)$ est fermé et la réciproque du théorème de Whitney est bien vraie.

(b) Pour toute partie fermée F de $\mathbb{R}$ et tout réel x, on pose $d_F(x) := \inf_{y \in F} |x - y|$. $x \in \mathscr{Z}(d_F)$ équivaut à $\inf_{y \in F} |x - y| = d(x, F) = 0$ ce qui équivaut classiquement (écrire la définition de l'inf) à $x \in \overline{F}$, F étant fermé $\mathscr{Z}(d_F) \subset F$. Réciproquement, d_F est continue car elle est lipschitzienne : soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, par définition de l'inf, il existe $u \in F$ vérifiant $|x - u| \leq d(x, F) + \varepsilon$. Alors $d(y, F) \leq |y - u| \leq |y - x| + |x - u| \leq |x - y| + d(x, F) + \varepsilon$ soit $d_F(y) - d_F(x) \leq |x - y| + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers zéro (observez bien que x et

y ne dépendent pas de ε !) il reste $d_F(y) - d_F(x) \leq |x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Si on échange les rôles de x et y on tire $|d_F(x) - d_F(y)| \leq |x-y|$ et d_F est bien lipschitzienne.
Dans le cas où $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, on trouve la fonction paire définie par $d_F(x) = 1 - x$ si $x \in [0, 1]$ et $d_F(x) = 0$ pour $x \geq 1$. Cette fonction continue sur $\mathbb{R}$ n'est pas C^∞ car elle n'est pas dérivable en les points ± 1 et 0.

(c) On viens de montrer que tout fermé F de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros de la fonctions continue sur $\mathbb{R}$ d_F, comme $d_F \notin \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ le théorème de Whitney n'est pas démontré.

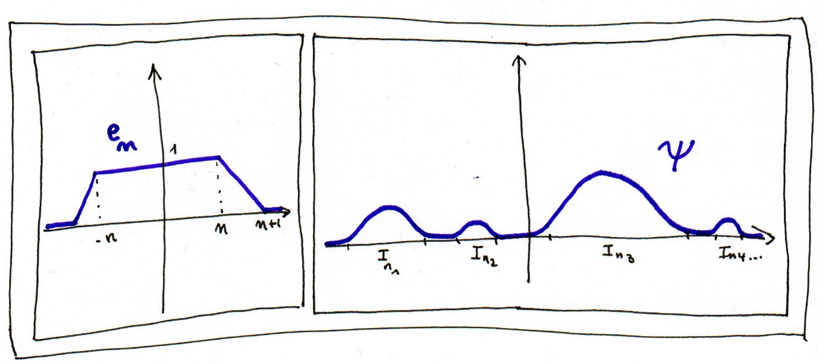
(d) Démontrer le théorème de Whitney dans les cas suivants :

(i) Si $-\infty < a < b < +\infty$ alors $\mathbb{R} \setminus [a, b] = \mathscr{Z}(g)$ où $g = \varphi_{a,b}$ est définie dans la question (1-e-ii).
Si $-\infty < a < b = +\infty$ alors $[a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, a[= \mathscr{Z}(g)$ où $g(x) = h(x-a)$ et h est définie dans la question (1-d).
Si $-\infty = a < b < +\infty$ alors $]-\infty, b] = \mathbb{R} \setminus]b, +\infty[= \mathscr{Z}(g)$ où $g(x) = h(b-x)$ et h est définie dans la question (1-d).
Donc le théorème de Whitney est vérifié pour F complémentaire d'un intervalle ouvert I , borné ou non ($F = \mathscr{Z}(g_I)$).

(ii) Si F est le complémentaire de la réunion d'un nombre fini intervalles ouverts disjoints $I_1, I_2, \dots, I_N$ alors $g := g_{I_1} + g_{I_2} + \dots + g_{I_N}$, où les g_I sont définies dans la question précédente, répond à la question.

(e) Soit $O \subset \mathbb{R}$, un ouvert, $O = \cup_n C_n$ la réunion de ses composantes connexes qui sont au plus dénombrables (car $\mathbb{R}$ admet une base dénombrable de voisinages (par exemple les intervalles d'extrémités rationnelles)). Il ne reste qu'à invoquer la caractérisation des parties connexes ouvertes de $\mathbb{R}$: ce sont les intervalles pour achever les démonstration.

(f) Il reste donc à traiter le cas où F est le complémentaire d'une réunion dénombrable d'intervalles ouverts $\cup_{n\geq 0} I_n$ deux à deux disjoints avec éventuellement un ou deux intervalles non bornés.. Notons $g_n = g_{I_n}$.
• Si I_n est borné alors g_n est une fonction test, donc à support compact ; toutes ses dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on posera $M_{n,k} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n^{(k)}(x)|$.
Si I_n n'est pas borné, par exemple $I_n =]a, +\infty[$, alors $g_n(x) = h(x-a)$. D'après la question (1-d-i), $h^{(k)}$ et donc $g_n^{(k)}$ tendent vers 0 en ∞ et 0, leur support étant $[a, +\infty[$ elles restent bornées sur $\mathbb{R}$ et on peut donc continuer à considérer $M_{n,k} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n^{(k)}(x)|$.
On choisit alors α_n tel que $0 < 1/\alpha_n \leq n^2 \max_{0\leq k\leq n} M_{n,k}$. Par conséquent, $\alpha_n |g_n^{(k)}(x)| \leq 1/n^2$ pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $0 \leq k \leq n$.
On pose alors $\psi = \sum_{n\geq 0} \alpha_n g_n$. Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées car $\alpha_n \|g_n^{(k)}\|_\infty \leq 1/n^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$. Par le théorème de Weierstrass, ψ est C^∞. Enfin, comme $\alpha_n g_n^{(k)} \geq 0$ et strictement positive si et seulement si $x \in I_n$ on aura $\psi(x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus (\cup_n I_n) = F$ i.e. $\mathscr{Z}(\psi) = F$: Le théorème de Whitney est démontré.
• Je crois qu'on peut faire cela bien plus simplement en observant que $\psi = \sum_{n\geq 0} g_n$ convient aussi car vu les propriétés des fonctions test g_{I_n} et le fait que les intervalles soient deux à deux disjoints nous sommes assurés que cette somme est localement soit identiquement nulle, soit réduite à un seul terme.



■

4 juin 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr