,

☯ ☢ SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS. ☢ ☯

PATRICE LASSÈRE.
I.N.P. 16 JANVIER 2010

1. SUITES DE FONCTIONS

1.1. Définitions, propriétés élémentaires. Dans tout ce chapitre X est une partie de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(f_n)_n$ et f désignent respectivement une suite de fonctions et une fonction de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : Soit $A \subset X$, on dira que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge simplement sur** A vers f, si pour tout $a \in A$ la suite de scalaires $(f_n(a))_n$ converge vers $f(a)$. Autrement dit :

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_{\varepsilon,a}\ :\ n \geq N_{\varepsilon,a} \implies |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

On dit alors parfois que f est la **limite simple** sur A de la suite $(f_n)_n$.

Remarques-exemples : • La phrase seule « la suite $(f_n)_n$ converge simplement » n'a **aucun sens** : il est absolument indispensable de préciser sur quoi et d'écrire : « la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur A... ».
• La suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ est clairement simplement convergente sur $]-1,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$; observez bien que toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $]-1,1]$ alors que f n'y est même pas continue (en $x = 1$)...
• L'unicité de la limite usuelle dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ nous assure de l'unicité de la limite f d'une suite de fonctions...
• Grace au critère de Cauchy pour les suites numériques, on peut comme toujours établir la simple convergence sur A d'une suite $(f_n)_n$ sans pour autant connaitre la limite f potentielle : $(f_n)_n$ est simplement convergente sur A, si et seulement si : $\forall\, a \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_{\varepsilon,a}\ :\ n \geq N_{\varepsilon,a}\ \&\ p \in \mathbb{N} \implies |f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$

Définition : Soit $A \subset X$, on dira que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** A vers f, si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon\ :\ n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon,\ \forall\, a \in A.$$

On dit alors parfois que f est la **limite uniforme** sur A de la suite $(f_n)_n$.

Quelques observations : • Comme le veut la tradition on désignera $\sup_{a\in A} |f_n(a) - f(a)|$ en général par $\|f_n - f\|_{A,\infty}$ ou même $\|f_n - f\|_A$ s'il n'y a pas de risques de confusion.
• Si on note $\alpha_n := \sup_{a\in A} |f_n(a) - f(a)| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la convergence uniforme sur A de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f est équivalente à la convergence vers zéro de la suite de réels $(\alpha_n)_n$.
• Déterminer un « sup » est parfois délicat mais par comparaison, pour prouver la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur A vers f, il est bien entendu suffisant de trouver une suite de réels $(\varepsilon_n)_n$ convergente vers 0 et vérifiant pour tout $x \in A$ et $n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_A \leq \varepsilon_n$.

• Par conséquent, pour montrer qu'une suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformémement vers f sur A il sera suffisant de trouver une suite $(x_n)_n$ dans A telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne tende pas vers zéro (car on aura $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \alpha_n ...$).
Par exemple, nous avons vu plus haut la suite de fonctions $(f_n(x) = x^n)_n$ qui est simplement convergente sur $]-1,1]$ vers $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$. La convergence n'est toutefois pas uniforme sur $]-1,1]$, pour s'en persuader considérons (nous verons plus loin d'autre raisons) la suite $x_n = 1 - n^{-1}$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ nous avons $f(x_n) - f(x_n) = (1 - n^{-1})^n - 0$ qui converge vers $e^{-1} > 0$. Par contre, observez bien qu'il y aura bien uniforme convergence sur $[-r, r]$ pour tout $0 < r < 1$ ce qui résulte de l'inégalité $\|f_n - f\|_{[-r,r]} \leq r^n ...$
• Si une suite $(f_n)_n$ converge uniformémement sur A elle est aussi uniformément convergente sur toute partie $B \subset A$.
• Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ converge uniformémement sur A vers f alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ le graphe de f_n est inclu dans la partie du plan définie par $\{\,(x, y) \ : \ x \in A \quad \text{et } y \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\,\}$, (faire une petite figure).

En comparant les deux définitions il est immédiat que [1]

Proposition : Une suite de fonctions $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers f est simplement convergente sur A vers f.

Théorème : (critère de Cauchy uniforme) Une suite de fonctions $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A si et seulement si elle satisfait au critère de Cauchy uniforme sur A, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ (\forall n, m \geq N) \implies (\|f_n - f_m\|_A \leq \varepsilon)\,,$$

que l'on peut assi énoncer sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ (\forall n \geq N, p \in \mathbb{N}) \implies (\|f_{n+p} - f_n\|_A \leq \varepsilon)\,.$$

Démonstration : Supposons que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur f et soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies \forall x \in A \ : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Soient alors p et q deux entiers vérifiant $p \geq N$ et $q \geq N$, on a :

$$\forall x \in A \ : \ |f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ : p, q \geq N \implies \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon,$$

$(f_n)_n$ satisfait bien critère de Cauchy uniforme sur A.
Réciproquement si la suite $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A alors en particulier pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet donc convergente, notons $f(x)$ sa limite : la suite $(f_n)_n$ est donc simplement convergente vers f sur A. Montrons que la convergence est uniforme sur A : soit $\varepsilon > 0$, du critère de Cauchy uniforme sur A il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N$ impliquent $\|f_p - f_q\|_A \leq \varepsilon$. Soit $p \geq N$ fixé, nous avons

$$\forall x \in A, \ q \geq N \implies |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon,$$

on peut donc faire tendre q vers $+\infty$ ce qui, par convergence simple donne :

$$\forall x \in A, \implies |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

1. Toutefois, si A est fini convergence simple et uniforme sur A coïncident... pourquoi ?

soit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ : p \geq N \implies \|f_p - f\|_A \leq \varepsilon,$$

et la convergence est bien uniforme sur A, C.Q.F.D. ■

1.2. **Conservation de propriétés par convergence uniforme.** La grande majorité des problèmes

Théorème : (convergence uniforme et continuité) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$ et a un point de A. Si :
– Toutes les fonctions f_n sont continues au point a
– la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A,
alors, f est continue au point a.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ n \geq N \implies \forall\, x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3,$$

f_{N_ε} est continue au point a, donc :

$$\exists\, \eta(\varepsilon) > 0\ :\ (\, x \in A \text{ et } |x - a| < \eta(\varepsilon)\,) \implies |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| < \varepsilon/3,$$

Soit alors $x \in A$ tel que $|x - a| < \eta(\varepsilon)$, on a vu ce qui précède :

$$|f(x) - f(a)| < |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

$f\ :\ A \to \mathbb{R}$ est donc bien continue au point a. ■

Remarques : • Parfois il n'y a pas convergence uniforme sur A mais seulement convergence uniforme dans un voisinage de chaque point de A, on dit alors qu'il y a convergence uniforme locale sur A ; le théorème précédent peut tout de même s'appliquer sur chacun de ces voisinages pour en déduire la continuité de f sur A.
• On en déduit le corollaire immédiat : « si chacune des fonctions f_n est continue sur A et si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur A, alors f est continue sur A ».
• La suite de terme général $f_n(x) = x^n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1[$ vers la fonction (continue) identiquement nulle : la condition suffisante du théorème n'est pas nécessaire.
• Sous sa forme négative, ce théorème est aussi un outil efficace pour justifier la non convergence uniforme sur une partie de $\mathbb{K}$: par exemple la suite de fonctions continues sur $[0, 1]$: $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$, f est visiblement discontinue en $x = 1$ donc sur $[0, 1]$ et il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[01]$.
• Il est aussi important de remarquer dans les exemples ci-dessus que la suite de terme général $f_n(x) = x^n$ converge uniformement sur tout intervalle $[0, 1 - l^{-1}]$ $(l \geq 1)$ mais pas sur la réunion qui est $[0, 1[$...

Théorème : (convergence uniforme et dérivation) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$. Si :
– Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur A,
– la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A,
– la suite $(f_n')_n$ converge uniformément vers g sur A,
alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformement vers f sur tout compact de A, f est de classe de classe C^1 sur A et $f' = g$.

Remarque : En fait vérifier la simple convergence de la suite $(f_n)_n$ en seulement un point de A suffit, toutefois, au moins un point est essentiel comme le prouve l'exemple $f_n(x) = n,\ x \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Consultez votre manuel favori. ■

Théorème : (premier échange $\int \lim = \lim \int$) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et uniformément convergente vers f, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration : f est continue sur $[a, b]$ comme limite uniforme de fonctions continues, elle est donc intégrable sur $[a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq (b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]},$$

on alors termine facilement la preuve. ■

Remarques : • C'est faux en général sur un intervalle non borné ; par exemple sur $\mathbb{R}_+$: considérer les fonctions f_n affines par morceaux continues : positives, égales à $1/n$ sur $[0, n]$, nulles sur $[n+1/n, +\infty[$. Alors $\|f_n\|_{\mathbb{R}_+} = 1/n$, la suite $(f_n)_n$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f \equiv 0$, toutefois

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt \neq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1.$$

• Ce contre-exemple marque aussi les limites de la convergence uniforme pour justifier des échanges de limite, nous verons des outils plus performants dans la troisième partie, rendant (sauf cas triviaux) obsolète ce dernier théorème.

1.3. **Théorèmes d'approximation.** C'est un des résultats principaux de cette année en Analyse.

Théorème d'Approximation de Weierstrass : Pour tout fonction $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
La forme équivalente qui suit est aussi souvent fort utile :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K}),\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, P \in \mathbb{R}[x]\ :\ \|f - P\|_{[a,b]} \leq \varepsilon.$$

Démonstration : Déja vu via Bernstein sur $[0,1]$ puis transporté sur $[a,b]$ par $\varphi(t) = a + t(b-a)$.... ■

Remarques : • Autrement dit, l'espace $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels est une partie dense de $\mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme.
• Le résultat est faux sur $\mathbb{R}$ d'ailleurs (voir TD) une suite de polynômes uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ ne peut que converger vers un polynôme ; il est en fait aussi faux sur tout intervalle borné non fermé, pour la partie « fermé » cela résulte du fait qu'une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.
• On en déduit facilement que toute fonction continue admet une primitive sans la théorie de l'intégration...

Théorème d'Approximation trigonométrique de Weierstrass : Pour tout fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques (i.e. d'éléments de vect$\{\, e^{int},\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration : Surement quelques preuves en TD modulo ce qui a été fait ailleurs... ■

2. Séries de Fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$, par analogie avec la dualité entre les suites et les séries numériques on définit la suite $(S_n = \sum_{k=0}^n f_k)_n$, c'est ce que l'on appelle une série de fonctions, on la note $\sum_n f_n$ et la fonction $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est la **n-ième somme partielle** de la série $\sum_n f_n$.

2.1. Les différents modes de convergence.

1. La Convergence Simple : On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge simplement** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement sur A, la limite de la suite $(S_n)_n$ est la fonction somme de la série et est noté $S = \sum_n f_n$; autrement dit pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $S(x)$.
On appelle alors **reste d'ordre** n de la série $\sum_n f_n$ la fonction R_n définie sur A par : $\forall x \in A\ :\ R_n(x) = \sum_{k=n+1} f_k(x)$. On aura alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

2. La Convergence Uniforme : On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur A, il en résulte aussitot que la convergence uniforme de $\sum_n f_n$ entraine la convergence simple. Quelques propriétés :

Propriétés : 1) Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers zéro sur A.
2) Une série $\sum_n f_n$ simplement convergente sur A est uniformément convergente sur A si et seulement si, la suite $(R_n)_n$ des restes converge uniformément vers zéro sur A

Démonstration : 1) La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A, il en est donc de même de la suite $(S_n)_n$ et en particulier pour tout $\varepsilon > 0$, il existe en entier N tel que $n \geq N \implies \|S_{n+1} - S_n\|_A = \|f_n\|_A \leq \varepsilon$ i.e. $(f_n)_n$ converge uniformément vers zéro sur A.
2) Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A vers S alors la suite de fonctions de terme général $S - S_n = R_n$ convergera uniformément vers 0 sur A.
Réciproquement, si la série converge simplement vers S et si R_n converge uniformément vers 0 sur A, alors la suite $S_n = S - R_n$ converge uniformément vers 0 sur A. ■

Exemples : Considérons la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$. La série est grossièrement divergente pour tout $x < 0$ et pour $x > 0$ nous avons $xe^{-nx} = o(n^{-2})$ ce qui assure la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ (en $x = 0$ c'est évident). On a même pour tout $x > 0$

$$S_n(x) = x\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = x \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{1 - e^{-x}} = S(x).$$

De la même manière on a, toujours pours $x > 0$:

$$R_n(x) = x\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kx} = \frac{xe^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}},$$

une petite étude des variations de cette fonction sur $\mathbb{R}_+^\star$ nous montre que $R_n(1/n+1) \sim e^{-1}$ ce qui empèche la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$. Il y a toutefois convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ puisque $x \geq a$ implique $0 \leq R_n(x) \leq \frac{ae^{-(n+1)a}}{1-e^{-a}}$.

Propriétés (Critère de Cauchy Uniforme) : La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ p \in \mathbb{N},\ \|f_{n+1} + \cdots + f_{n+p}\|_A \leq \varepsilon.$$

Démonstration : C'est le critère de Cauchy uniforme appliqué à la suite $(S_n)_n$. ■

Propriétés (le cas des séries alternées) : Soit $\sum_n (-1)^n f_n$ une série de fonctions de A dans $\mathbb{R}$, si :
1) Pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante,
2) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers zéro sur A,
alors la série de fonctions $\sum_n (-1)^n f_n$ est uniformément convergente sur A.

Démonstration : Les hypothèses assurent que l'on peut appliquer pour tout $x \in A$ le théorème des séries alternées à la série numérique $\sum_n (-1)^n f_n(x)$. En particulier, la majoration du reste donne

$$|S(x) - S_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)| \leq \|g_{n+1}\|_A.$$

La convergence uniforme sur A de $\sum_n (-1)^n f_n$ en découle. ■

Remarques : • Par exemple, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
• Le cas des séries alternées est un des rares cas (ormi le cas des où l'on peut sommer un nombre fini d'éléments : cas rarissime...) où il est facile d'établir la convergence uniforme, en général c'est bien délicat et c'est pourquoi on a introduit la convergence normale notion plus forte et plus facile à vérifier...

3. La Convergence Absolue : On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge absolument** sur A, si pour tout $x \in A$ la série $\sum_n |f_n(x)|$ converge. D'aprés la théorie des séries numériques, la convergence absolue implique la convergence simple.

Remarque : • Par exemple, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ n'est absolument convergente que sur $]1, +\infty[$.

4. La Convergence Normale : On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge normalement** sur A si la série $\sum_n \|f_n\|_A$ converge. Il est bien entendu souvent plus simple (mais équivalent) de d'exhiber une suite de réels $(\alpha_n)_n$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in A\ :\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$ et $\sum_n \alpha_n < +\infty$.

Propriétés : La série $\sum_n f_n$ converge normalement sur A alors elle converge absolument et uniformément sur A et on a

$$\left\| \sum_n f_n \right\|_A \leq \sum_n \|f_n\|_A.$$

Démonstration : Que la convergence normale entraine la convergence absolue est clair. Soit $(\alpha_n)_n \in l^1(\mathbb{N})$ vérifiant $\|f_n\|_A \leq \alpha_n$, on a $\forall n, p \in \mathbb{N},\ x \in A$:

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq \|f_{n+1}\|_A + \cdots + \|f_{n+p}\|_A \leq \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}$$

qui montre que la série de fonctions $\sum_n f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A et y est donc uniformément convergente.
Enfin pour tous $x \in A,\ n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k(x)\|_A \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_A$$

soit aprés avoir fait tendre n vers l'infini et pris le « sup » l'inégalité désirée. ■

Remarques : • Prouver directement la convergence uniforme d'une série de fonctions peut etre terriblement compliqué alors que la convergence normale est plus simple à établir (il faut chercher le sup de seulement une fonction) : il est donc souvent fort utile de commencer par vérifier (si elle a lieu..) la convergence normale.
• La convergence normale entraine la convergence uniforme mais **attention** la réciproque est fausse. En particulier tout suite de fonction non absolument convergente ne peut être normalement convergente.
• Par exemple la série de fonction (vue plus haut) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ mais n'est absolument convergente que sur $]1, +\infty[$, elle est d'ailleurs normalement convergence sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ (vérification immédiate).

2.2. **Continuité et dérivabilité d'une série de fonction.** Les résultats pour les suites de fonctions du paragraphe 1.2 se transportent immédiatement aux séries de fonctions en passant aux sommes partielles :

Théorème : (convergence uniforme et continuité) Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$ et a un point de A. Si :
– Toutes les fonctions f_n sont continues au point a
– la série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f sur A,
alors, $f = \sum_n f_n$ est continue au point a.
En particulier si $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f sur A et si les $f_n \in \mathscr{C}^0(A)$, alors f est continue sur A.

Théorème : (convergence uniforme et dérivation) Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$. Si :
– Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur A,
– la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers f sur A,
– la série $\sum_n f_n'$ converge uniformément vers g sur A,
alors, la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout compact de A vers f qui est de classe de classe C^1 et vérifie $f' = g$. Et on peut, comme pour les suites de fontions, itérer ce théorème pour montrer que f est de classe $C^k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Exemple : Etudions en détail la fonction $\zeta(x) := \sum_{n\geq 1} n^{-x}$.

– Posons pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = n^{-x}$; la suite de fonctions $(f_n)_n$ est clairement simplement convergente vers 0 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty$ (série de Riemann).

– Il n'y a pas normale convergence sur $]1, +\infty[$ puisque $\|f_n\|_{]1,+\infty[} = 1/n$ est le terme général d'une série divergente. Toutefois comme pour tout $a > 1$: $\|f_n\|_{[a,+\infty[} = n^{-a}$ terme général d'une série de Riemann convergente ($a > 1$) nous avons la normale convergence sur $[a, +\infty[$ (et donc l'uniforme convergence) pour tout $a > 1$. Le cours nous assure alors que ζ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$: elle est donc **continue** sur $] - 1, +\infty[$.

– Pour la dérivabilité : nous avons pour tout $x > 1$, $k \in \mathbb{N}^\star$: $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\log n)^k}{n^x}$ puis pour tout $a > 1$: $\|f_n^{(k)}\|_{[a,+\infty[} = \frac{(\log n)^k}{n^a}$ qui est le terme général d'une série convergente d'aprés le « test du n^α » puisque en écrivant $a = 1 + u$: $n^{1+u/2}\frac{(\log n)^k}{n^a} = \frac{(\log n)^k}{n^{u/2}}$ tends vers zéro avec n. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ la série $\sum_n f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ c'est plus qu'il n'en faut pour appliquer le théorème précédent : ζ est indéfiniment dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$: elle est donc **indéfiniment dérivable** sur $] - 1, +\infty[$ et on a $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x)$.

– En particulier $\zeta'(x) = -\sum_{n\geq 1}\log(n)n^{-x} < 0$ $(x > 1)$, ζ est donc **décroissante** sur $]-1, +\infty[$.

– Nous avons aussi $\zeta''(x) = \sum_{n\geq 1}\log^2(n)n^{-x} > 0$ $(x > 1)$, ζ est donc **convexe** sur $] - 1, +\infty[$.

– Pour parfaire l'étude de la fonction ζ sur $]-1, +\infty[$ étudions son comportement aux bornes 1_+ et $+\infty$: par positivité nous avons pour tout $x > 1$ et tout entier $N \geq 1$: $\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N n^{-x}$ donc $\lim_{x\to 1}\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N n^{-1}$ et ceci pour tout $N \in \mathbb{N}$. Mais il est notoire que $\lim_N \sum_{n=1}^N n^{-1} = +\infty$ par conséquent $\lim_{x\to 1}\zeta(x) = +\infty$.

En $+\infty$ écrivons : $\zeta(x) = 1+2^{-x}+\sum_{n\geq 3} n^{-x}$; on va montrer que $\sum_{n\geq 3} n^{-x}$ est un $o(2^{-x}$ en $+\infty$: des règles de comparaison séries/intègrales on tire facilement : $0 \leq \sum_{n\geq 3} n^{-x} \leq \int_2^\infty t^{-x}dt = \frac{2^{-x+1}}{x-1}$ et l'équivalent suit immédiatement. Ainsi en $+\infty$: $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + o(2^{-x}$ en particulier $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$. Il est maintenant facile d'esquisser le graphe de la fonction ζ.

Théorème : (premier échange $\sum\int = \int\sum$) Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues sur l'intervalle **fermé borné** $[a, b]$ et uniformément convergente vers f, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\sum_{k=0}^\infty \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{k=0}^\infty f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

3. Théorèmes de Convergence

Dans les paragraphes précédents les résultats essentiels que nous avons rencontrés tournent tous autour d'échanges de limites : inversion $\lim\int=\int\lim,\ \lim\sum=\sum\lim,\ \sum\int=\int\sum$, continuité, dérivabilité d'une limite d'une suite ou d'une série de fonctions... Nous avons rencontré quelques conditions suffisantes pour justifier ces échanges mais dans des conditions souvent trop restrictives (intégrales non impropres, nécessité de convergence uniforme...) pour être vraiment efficaces. Les théorèmes [2] qui suivent répondent à ces lacunes et sont (nous le verrons en TD) en général assez faciles à manipuler.

Dans tout ce qui suit, et comme le veut la tradition dire que f est intégrable sur I veut dire que l'intégrale $\int_I |f(t)|dt$ converge, on dit alors que$f\in L^1(I)$.

Théorème de la convergence monotone : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, intégrables et continues par morceaux sur A. On suppose que :
– La suite est croissante $f_n\leq f_{n+1}$,
– La suite est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.
Alors f est intégrable sur A si et seulement si la suite $\left(\int_A f_n(t)dt\right)_n$ est majorée, et dans ce cas nous avons :

$$\int_A f(t)dt=\int_A \lim_n f_n(t)dt=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_A f_n(t)dt=\lim_n\int_A f_n(t)dt.$$

Si la suite est décroissante f est intégrable sur A si et seulement si la suite $\left(\int_A f_n(t)dt\right)_n$ est minorée, et dans ce cas nous avons :

$$\int_A f(t)dt=\int_A \lim_n f_n(t)dt=\inf_{n\in\mathbb{N}}\int_A f_n(t)dt=\lim_n\int_A f_n(t)dt.$$

Exemple : On considère la suite $a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n(t)dt$. La suite de fonctions $(f_n(t)=\tan^n(t))_n$ est simplement convergente sur $A=[0,\pi/4]$ vers la fonction continue par morceaux $f(t)=0,\ t\in[0,\pi/4[,\ f(\pi/4)=1$. La suite est visiblement décroissante donc par convergence monotone : $\lim_n\int_0^{\pi/4}\tan^n(t)dt=\int_0^{\pi/4}\lim_n\tan^n(t)dt=\int_0^{\pi/4}f(t)dt=0$. On peut d'ailleurs aussi justifier cet échange avec le théorème ci-dessous (comment ?) :

Théorème de la convergence dominée : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, continues par morceaux sur A. On suppose que :
– La suite est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.
– Il existe une fonction $g\in L^1(A)$ vérifiant l'hypothèse de domination : $|f_n(t)|\leq g(t),\ \forall t\in A,\ n\in\mathbb{N}$.
Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur A et nous avons :

$$\int_A f(t)dt=\int_A \lim_n f_n(t)dt=\lim_n\int_A f_n(t)dt.$$

2. Nous n'avons pas le temps d'en donner les démonstrations, mais elles sont tout à fait accessibles dans les ouvrages classiques : [1], [4] par exemple...

Exemple : • Cherchons la limite $\lim_n \int_o^\infty \dfrac{dt}{t^n+e^t}$. La suite de fonctions $(f_n(t) = (t^n + e^t)^{-1})_n$ est simplement convergente sur $A = \mathbb{R}_+$ vers la fonction continue par morceaux f nulle sur $]-1, +\infty[$, égale à $(1+e)^{-1}$ en $t = 1$ et à e^{-t} sur $[0, 1[$. Comme $|f_n(t)| \leq e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour en déduire que

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_n f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)dt = \int_0^1 e^{-t}dt = 1 - e^{-1}.$$

• Vous pour aussi traiter l'exemple précédent : $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$ avec la convergence dominée... On a bien entendu les versions « séries » du résultat précédent :

Théorème : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, continues par morceaux et intégrables sur A. On suppose que :
– La série $\sum_n f_n$ est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.
– Il existe une fonction $g \in L^1(A)$ vérifiant : $|\sum_{k=0}^n f_k(t)| \leq g(t),\ \forall t \in A,\ n \in \mathbb{N}$ (hypothèse de domination).
Alors f est intégrable sur A et nous avons :

$$\int_A f(t)dt = \int_A \sum_{k=0}^\infty f_k(t)dt = \sum_{k=0}^\infty \int_A f_k(t)dt.$$

Exemple :

Comme souvent avec les séries de fonctions l'hypothèse de domination sur la sommes partielles peut être délicate à vérifier, c'est pour cela qu'il existe une condition suffisante plus facile à vérifier :

Théorème : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, continues par morceaux et intégrables sur A. On suppose que :
– La série $\sum_n f_n$ est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.
– La série $\sum_{k=0}^\infty \int_A |f_k(t)|dt$ converge.
Alors f est intégrable sur A et nous avons :

$$\int_A f(t)dt = \int_A \sum_{k=0}^\infty f_k(t)dt = \sum_{k=0}^\infty \int_A f_k(t)dt.$$

Remarque : Il peut toutefois se produire que la série $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ diverge, à ce moment pour justifier un éventuel échange $\sum \int = \int \sum$ ce théorème est inutilisable ; on peut parfois s'en sortir en essayant d'appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite $(g_n)_n$ des sommes partielles ($g_n = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k$) (voir plus haut...).

Exemple : • Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx = -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

On montre sans trop de difficultés (j'espère !) que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx$ est bien convergente. Comme pour $x \in [0,1[$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ nous avons $\int_0^1 \dfrac{\log(x)}{1-x}dx = -\int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n \log(x)dx$; posons $g_n(x) = -x^n \log(x) \in L^1([0,1]) \cap \mathscr{C}^0([0,1[)$. Une intégration par parties nous donne $\int_0^1 |g_n(x)|dx = -\int_0^1 x^n \log(x)dx = \frac{1}{(n+1)^2}$: la série de terme général $\int_0^1 |g_n(x)|dx$ est bien convergente ce qui, vu le théorème précédent justifie l'échange $\sum \int = \int \sum$ et

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx = -\int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n \log(x)dx = -\sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^n \log(x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Comme application des théorèmes de convergence dominée on a facilement, via la caractérisation de la continuité/dérivabilité par les suites les théorèmes sur la régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètres :

Théorème (continuité d'une intégrale à paramètres) : (continuité d'une intégrale à paramètres) Soit $f\ \ \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant les propriétés

1) f est continue sur $\Omega \times I$.
2) Il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$|f(x,t)| \leq g(t), \quad \forall\, (x,t) \in \Omega \times I.$$

Alors $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur Ω

Remarque-Exemple : • Encore une fois, une domination globale est souvent impossible à obtenir ; mais il est bien sûr suffisant de travailler localement i.e. de dominer localement au voisinage de tout point $a \in \Omega$.

Théorème (dérivabilité d'une intégrale à paramètres) : Soit $f\ \ \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. Si de plus f admet sur $\Omega \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant elle aussi les hypothèses précédentes, alors $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt, \quad \forall\, x \in I.$$

Exemple : La célèbre fonction Gamma $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. L'intégrale généralisée est clairement (exercice !) convergente pour tout $x > 0$, la fonction gamma est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Etudions sa régularité, pour cela on pose $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ il est clair que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star)$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \log^k(t)t^{x-1}e^{-t}$ qui est bien (re-exercice) intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

– Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ un segment, pour $x \in [a,b]$ nous avons : $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}$ si $0 < t \leq 1$ et $0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1}$ si $0 \leq t \geq 1$. Par conséquent $|f(x,t)| \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres nous assure que Γ est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$.

– Pour la dérivabilté, il faut procéder de même avec toutes les dérivées partielles de f et en raisonnant comme pour la continuité on a pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$: $|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)| + |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b,t)| \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Ce qui nous donne la condition de domination sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$: Γ est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \log^k(t) t^{x-1} e^{-t} dt$.

Références

[1] Deschamps C. & Warusfel A. *« Mathématiques seconde année »*, Dunod (2001).

[2] Kaczor W.J. & Nowak M.T. *Problems in Mathematical Analysis (tome deux)*, Student Math. Library (AMS) (traduits en francais chez EDP-Sciences) (2001).

[3] Voir ma page ouèb : Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html

[4] Monier J.M. *« Analyse 4 »*, Dunod (2000).

[5] Des exercices ici : ici

[6] Et là : là

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques, , UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@math.ups-tlse.fr`