**AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES**

**Continuité, Dérivation & Applications – 28 JUIN 2008.**

## 1. Dérivation

**Exercice 1.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable, montrer que $f'(a)$ est valeur d'adhérence de $f'(]a,b[)$.*

**Exercice 2.** *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une application dérivable sur $]a,b[$ sauf peut être en un point $c \in ]a,b[$. Si $f'(x)$ admet une limite $l$ lorsque $x$ tend vers $c$, montrer que $f$ est dérivable en $c$ et $f'(c) = l$.*

**Exercice 3.** *Donner plusieurs démonstrations du théorème de Darboux : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $I$ alors $f'$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

**Exercice 4.** *Soient $f, g, h$ trois fonctions continues sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On définit*

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}$$

*montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $F'(c) = 0$, en déduire le théorème des accroissements finis puis la forme généralisée de ce théorème.*

**Exercice 5.** *1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que $f$ est continue à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre $0$ à l'origine ; montrer que $f$ est dérivable à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre $1$ à l'origine.*
*2) Soit*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Montrer que $f$ est discontinue en tous points de $\mathbb{R}^\star$, qu'elle est continue et dérivable à l'origine et nulle part deux fois dérivable. Toutefois montrer que $f$ admet à l'origine un développement limité à tout ordre.*

**Exercice 6.** *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(x)| \leq |f(x)|,\ x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est identiquement nulle. (on pourra commencer par montrer que pour tout $a \geq 0$ il existe $C_a$ telle que $|f(x)| \leq C_a \cdot x$ pour tout $0 \leq x \leq a$....)*

**Exercice 7.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x) = O(x),\ (x \to +\infty)$, montrer que $f(x) = O(x^2),\ (x \to +\infty)$.*

**Exercice 8.** *On définit $f$ sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) + \cos(x) & \text{si } x > 0, \\ \cos(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Montrer que $f$ n'est pas paire mais que tous ses développements limités de $f$ à l'origine sont sans termes de degré impair.*

**Exercice 9.** *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & si \ \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$$

*est dérivable à l'origine à dérivée discontinue en ce point.*

**Exercice 10.** *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) & si \ \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$$

*est dérivable à dérivée non bornée sur le compact $[-1, 1]$.*

**Exercice 11.** *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(x^{-1}) & si \ \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$$

*est dérivable à l'origine, que $f'(0) > 0$ mais que $f$ n'est monotone sur aucun voisinage de l'origine.*

**Exercice 12.** *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left[2 + \sin(x^{-1})\right] & si \ \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$$

*est dérivable sur $[-1, 1]$, présente à l'origine un minimum global, toutefois $f'$ ne garde pas un signe constant sur tout voisinage de $0$.*

**Exercice 13.** *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \exp(-x^2/4) \sin(8x^{-3}) & si \ \ x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$$

*est dérivable à l'origine, à dérivée bornée sur tout intervalle fermé borné mais qui n'atteint jamais ses bornes sur tout voisinage de l'origine.*

**Exercice 14.** *Soit $f \ : \ [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que*

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(0) = 0, \\ &(2) \quad \exists\, C > 0 \ : \ \forall\, x \in [0, 1], \ \ |f'(x)| \leq C|f(x)|. \end{aligned}$$

*Montrer que $f$ est identiquement nulle.*

## 2. Formules de Taylor

**Exercice 15.** *Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que $f$ est constante.*

**Exercice 16.** *Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ montrer que :*

*1) si $f(0) = 1, f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$ alors* $\lim_{x\to\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{-a^2/2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

*2) si $f(0) = 0$ alors* $\lim_{x\to 0_+} \sum_{k=1}^{[1/\sqrt{x}]} f(kx) = \frac{f'(0)}{2}$.

**Exercice 17.** *Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que le millième chiffre de l'écriture décimale de la racine carrée de $N = 111\ldots111 = (10^{1998} - 1)/9$ vaut 1.*

**Exercice 18.** *0) On définit la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y,\ y(0) = 1$. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour montrer que $5/2 < e := y(1) < 3$ puis $e \notin \mathbb{Q}$*

*1) Appliquer convenablement la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto e^x := \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ pour en déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.*

*2) En appliquant convenablement la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto e^{-x}$, montrer que pour $n \geq 3$ l'entier le plus proche de $n!/e$ est $n! \sum_0^n (-1)^k/k!$ et est divisible par $n - 1$.*

**Exercice 19.** *Soit $f \in \mathscr{C}^2([-a, a])$, si $f(0) = 0$ montrer que la suite définie pour $n > a^{-1}$ par*

$$u_n = f(n^{-2}) + f(2n^{-2}) + \cdots + f(n^{-1})$$

*converge et préciser sa limite.*

**Exercice 20.** *Calculez les limites suivantes*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}\right), \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sin(k/n)\sin(k/n^2).$$

**Exercice 21.** *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable et telle que $f(-1) = f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in ]-1, 1[$ tel que $f''(c) \geq 3$.*

**Exercice 22.** *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe un polynôme $P$ de degré impair tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{R} \ :\quad |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

*Montrer que $f$ est identiquement nulle.*

**Exercice 23.** *(un fameux théorème d'émile Borel) Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application à support compact dans $]-2, 2[$ égale à 1 sur $[-1, 1]$. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_n$ vérifiant*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq 2^{-n}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n - 1.$$

*Où $f_n(x) := \dfrac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$. En déduire l'existence d'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**Exercice 24.** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^2(I, I)$ admettant un point fixe $\alpha \in I$ tel que $0 < |f'(\alpha)| < 1$. On considère la suite récurrente $x_0 \in I,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Si la suite $(x_n)_n$ converge vers $\alpha$, montrer que la convergence est géométrique, i.e. il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$x_n - \alpha = af'(\alpha)^n + bf'(\alpha)^{2n} + o(f'(\alpha)^{2n}).$$

**Exercice 25.** *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(]-a,a[)$ telle que $f^{(n)} \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

*1) Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(k)}(0)x^k/k!,\ \forall\, x \in ]-a,a[$.*

*2) Le résultat subsiste-t-il si on a seulement $f^{(2n)} \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ?*

**Exercice 26.** *Soit $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0.$$

**Exercice 27.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $n$ fois dérivable. Fixons $x \in \mathbb{R}$, si $f^{(n+1)}(x)$ existe et est différent de zéro, alors pour $h > 0$ la formule de Taylor-Lagrange assure de l'existence d'un réel $\theta(h)$ tel que*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h)$$

*montrer que*

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

**Exercice 28.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $3$ fois dérivable. S'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = C \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} f^{(3)}(x) = 0,$$

*montrer que*

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f''(x).$$

**Exercice 29.** *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty((a,b))$. On suppose que $f$ admet une infinité de zéros dans un sous-intervalle $[c,d] \subset (a,b)$. Si de plus $\sup_{x\in(a,b)} |f^{(n)}(x)| = O(n!),\ (n \to +\infty)$, montrer que $f$ s'annule sur un sous-intervalle ouvert de $(a,b)$.*

## 3. Petites applications

**Exercice 30.** *(L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange) Pour $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$ on note*

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1\leq i\leq n} x_i,\ m = \min_{1\leq i\leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2.$$

*Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\log$ et $\overline{x}, x_i \in [m,M]$ pour en déduire*

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

*Préciser le cas d'égalité.*

**Exercice 31.** *Utilisez la théorème des accroissement finis sur une fonction convenable pour établir la divergence de la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$.*

**Exercice 32.** *Montrer que*

$$x^y + y^x > 1, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

**Exercice 33.** *Montrer que*

$$x - \frac{x^2}{3} < \sin(x) < \frac{11x}{10} - \frac{x^2}{4}, \quad \forall\, x \in ]0,\pi].$$

**Exercice 34.** *Soit* $f\ :\ ]0,1] \to \mathbb{R}$ *une application dérivable. Si* $f'$ *est bornée sur* $]0,1]$ *montrer que la suite de terme général* $u_n = f(n^{-1})$ *est convergente.*

**Exercice 35.** *On se fixe un point* $P$ *sur la parabole* $y = x^2$ *(distinct de l'origine). La normale à* $(\mathscr{P})$ *passant par* $P$ *recoupe la parabole en un point* $Q$ *; déterminer* $P$ *pour que l'arc de parabole reliant* $P$ *et* $Q$ *soit de longueur minimale.*

## Références


[1] J.Chevallet *Exercices d'algèbre et de géométrie*, Vuibert supérieur (1996).

[2] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, algèbre 1*, Cassini (2001).

[3] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, algèbre 2*, Cassini (2006).

[4] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, algèbre 3*, Cassini (2008).

[5] C.Grunspan & E.Lanzmann *L'oral de mathématiques aux concours : Algèbre*, Vuibert supérieur (1994).

[6] E.Leichtnam *Exercices corrigés de mathématiques(X, E.N.S.) : Algèbre et géométrie*, Ellipses (1999).

[7] J.E.Rombaldi *Analyse matricielle : cours et exercices résolus*, EDP Sciences (1999).

[8] J.E.Rombaldi *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences (1999).

[9] D.Serre *Les Matrices*, Dunod (2001).

[10] R.M.S. *La revue de la filière mathématiques, indispensable pour l'agrégation interne, sujets (corrigés) nombreux exercies d'oraux, petits articles... et ceci pour seulement 69 euros... abonnez vous !*, www.rms-math.com

[11] P.Tauvel *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Algèbre 2*, Masson (1994).

[12] P.Tauvel *Exercices de d'algèbre linéaire*, Dunod (2004).



**27 juin 2008 Agrégation Interne de Mathématiques.** Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://picard.ups-tlse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr