Exercices corrigés
Théorème de Rolle, accroissements finis

1 Enoncés

Exercice 1 Démonstration du théorème des accroissements finis.
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Exercice 2 Soit P la fonction polynômiale définie par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

Exercice 3 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}.$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$.

Exercice 4 Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a)-f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a)-g(b)}.$$

On considérera pour cela la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \big[f(a)-f(b)\big]g(x) - \big[g(a)-g(b)\big]f(x)$.

Exercice 5 Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynômiale P définie par $P(x) = x^n + px + q$ admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

Exercice 6 En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction Arctg, montrer que

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{Arctg} t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Exercice 7 Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(1/x)$. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in \,]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right).$$

Déterminer

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right).$$

Exercice 8 Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. En utilisant la fonction $g := \ln f$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right].$$

Exercice 9 Soit P la fonction polynômiale réelle définie par

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

On suppose que les coefficients de P satisfont la relation

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

En considérant une primitive de P, montrer que P admet au moins une racine dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 10 (a) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

(b) En déduire que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{et} \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

sont monotones.

(c) Déterminer les limites en l'infini de $\ln f$ et $\ln g$, puis de f et g.

Exercice 11 Démonstration de la formule de Leibniz.
Montrer que, si f et g sont deux fonctions N fois dérivables (où $N \in \mathbb{N}^*$), alors fg est au moins N fois dérivable et, pour tout $n \leq N$,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k^n f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exercice 12 En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1. La fonction F est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, de dérivée

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

De plus, $F(a) = F(b) = f(a)$. Le théorème de Rolle implique alors l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $F'(c) = 0$, c'est-à-dire,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Solution de l'exercice 2.
La fonction P est évidemment continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. De plus, $P(0) = P(1) = 2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$P'(c) = \frac{P(1) - P(0)}{1-0} = 0.$$

Solution de l'exercice 3.
La fonction f est 2π-périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(a+2\pi)$ et le théorème de Rolle montre l'existence d'un réel $c \in]a, a+2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution de l'exercice 4.
La Fonction F est sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, de dérivée

$$F'(x) = \big[f(a) - f(b)\big]g'(x) - \big[g(a) - g(b)\big]f'(x).$$

De plus, on vérifie facilement que $F(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = F(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $F'(c) = 0$, c'est-à-dire, tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}.$$

Solution de l'exercice 5.
On a $P'(x) = nx^{n-1} + p$ et $P''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. En particulier, on voit que P'' admet exactement une racine, à savoir $x = 0$.
Commençons par le cas où n est impair. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que P admette quatre racines distinctes $a < b < c < d$. La fonction P est évidemment continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $P(a) = P(b)$. Le théorème de Rolle implique alors l'existence de $a_1 \in]a,b[$ tel que $P'(a_1) = 0$. Le même raisonnement sur les intervalles $[b,c]$ et $[c,d]$ montre l'existence de $b_1 \in]b,c[$ et $c_1 \in]c,d[$ tel que $P'(b_1) = 0$ et $P'(c_1) = 0$. Donc P' admet trois racines distinctes $a_1 < b_1 < c_1$. Le même raisonnement montre alors aussi que P'' admet deux racines $a_2 \in]a_1, b_1[$ et $b_2 \in]b_1, c_1[$. Ces racines étant nécessairement distinctes, il y a contradiction avec le fait que P'' admet pour unique racine $x = 0$. Il s'ensuit que P admet au plus trois racines réelles distinctes.
Traitons maintenant le cas où n est pair. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que P admette trois racines distinctes $a < b < c$. Comme précédemment, on déduit l'existence de deux racines de P' distinctes $a_1 \in]a,b[$ et $b_1 \in]b,c[$, puis l'existence d'une racine $a_2 \in]b_1, c_1[$. Or on a vu que P'' admet 0 pour unique racine, de sorte que $a_2 = 0$ et que $a_1 < 0 < b_1$. Mais puisque $P'(x) = nx^{n-1} + p$, les racines de P' satisfont l'équation

$$x^{n-1} = -\frac{p}{n},$$

et puisque n est impair, les racines sont toutes du signe de $-p/n$. On ne peut donc avoir $a_1 < 0 < b_1$. Il s'ensuit que P admet au plus deux racines réelles distinctes.

Solution de l'exercice 6.
Le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction Arctg sur l'intervalle $[0,t]$ (où t est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$), implique l'existence de $c \in]0,t[$ tel que

$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{\operatorname{Arctg} t - \operatorname{Arctg} 0}{t - 0} = \frac{\operatorname{Arctg} t}{t}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit immédiatement que

$$\frac{\operatorname{Arctg} t}{t} > \frac{1}{1+t^2},$$

puis l'inégalité demandée.

Solution de l'exercice 7.
La dérivée de f est donnée sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le théorème des accroissements finis montre que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f'(c) = f(x+1) - f(x)$, c'est-à-dire,

$$-\frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right) = \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

On vérifie facilement que la fonction $t \mapsto t^{-2}\exp(1/t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit les inégalités
$$\frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < \frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right) < \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
puis les inégalités
$$\frac{x^2}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < \frac{x^2}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right) = x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) < \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$
Les fonctions apparaissant aux extrémités tendent toutes deux vers 1 lorsque $x \to \infty$, et le théorème des gendarmes montre alors que
$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = 1.$$

Solution de l'exercice 8.
En appliquant les théorèmes de composition, on vérifie facilement que la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$
Puisque $g(x) = \ln f(x)$ on obtient :
$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b-a},$$
c'est-à-dire,
$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right].$$

Solution de l'exercice 9. Les primitives de P sont les fonctions polynômiales de la forme
$$Q(x) = \alpha + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$
avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. On remarque que $Q(0) = Q(1) = \alpha$. Le théorème de Rolle implique alors l'existence de $c \in]0,1[$ tel que $Q'(c) = P(c) = 0$.

Solution de l'exercice 10.
(a) Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $(x \mapsto \ln x)$, sur l'intervalle $[x, x+1]$: il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1)-x} = \ln(x+1) - \ln x.$$
L'encadrement demandé provient du fait que
$$\frac{1}{c} \in \left]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right[.$$
Remarquons que cet encadrement peut aussi s'écrire
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}. \tag{1}$$

(b) Montrer que f est monotone équivaut à montrer que $\ln f$ est monotone. Or
$$(\ln f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

La première inégalité dans (1) montre alors que $(\ln f)'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc que $\ln f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, on vérifie facilement que

$$(\ln g)'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

La deuxième inégalité dans (1) montre alors que $(\ln g)'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, donc que $\ln g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) En multipliant la double inégalité (1) par x, puis par $x+1$ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{x+1} < x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{x+1}{x}.$$

A l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} (\ln f)(x) = \lim_{x\to\infty} (\ln g)(x) = 1,$$

puis que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = e.$$

Solution de l'exercice 11.

On considère la propriété

$$(\mathscr{P}_n) \qquad fg \text{ est au moins } n \text{ fois dérivable et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Nous allons montrer que, si $(\mathscr{P}_n)$ est satisfaite pour $n < N$, alors $(\mathscr{P}_{n+1})$ est satisfaite. Il s'agit d'une *récurrence finie*, c'est-à-dire d'une récurrence qui s'interrompt après un nombre fini d'incrémentations de n.

On vérifie aisément que $(\mathscr{P}_0)$ et $(\mathscr{P}_1)$ sont satisfaites. Supposons que $(\mathscr{P}_n)$ soit satisfaite pour $n < N$. La fonction $(fg)^{(n)}$ est dérivable, puisque chaque fonction $f^{(k)}g^{(n-k)}$ est dérivable, de dérivée

$$\left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' = f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n+1-k)}.$$

Donc fg est au moins $n+1$ fois dérivable, et l'on a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)}g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

On a obtenue une somme de termes de la forme $\alpha_k f^{(k)}g^{(n+1-k)}$, où

$$\alpha_0 = C_0^n = 1 = C_0^{n+1}, \quad \alpha_{n+1} = C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}, \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \; \alpha_k = C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$$

d'après la propriété foncdamentale du triangle de Pascal. Il s'ensuit que

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} f^{(k)}g^{(n+1-k)},$$

qui est la formule de Leibniz à l'ordre $n+1$. On remarque que, par commutativité du produit, on a aussi la formule

$$(fg)^{(n)} = (gf)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n g^{(k)} f^{(n-k)}.$$

Solution de l'exercice 12.

Calculons, en vue d'appliquer la formule de Leibniz, les dérivées successives des fonctions u et v définies par

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x.$$

On a $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$, puis $u^{(k)} \equiv 0$ pour tout $k \geq 3$. On a aussi, pour tout $n \geq 1$, $v^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ (on pourra montrer ceci par rcurrence). D'après la formule de Leibniz, on a

$$f'(x) = C_1^0 x^2 \frac{1}{x} + C_1^1 2x \ln x = x + 2x \ln x,$$

$$f''(x) = C_2^0 x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_2^1 2x \frac{1}{x} + C_2^2 2 \ln x = 2 \ln x + 3,$$

puis, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= C_n^0 x^2 \big((-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}\big) + C_n^1 2x \big((-1)^{n-2}(n-2)!\, x^{-n+1}\big) + C_n^2 2 \big((-1)^{n-3}(n-3)!\, x^{-n+2}\big) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n+2} + 2n(-1)^{n-2}(n-2)!\, x^{-n+2} + 2\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-3}(n-3)!\, x^{-n+2} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-2}} \big((n-1)! - 2n(n-2)! + n(n-1)(n-3)!\big) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-2}} \left(1 - \frac{2n}{n-1} + \frac{n}{n-2}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-2}} \frac{2}{(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}.
\end{aligned}$$