UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **2004/2005**

AGRÉGATION INTERNE - 24 SEPTEMBRE 2004 - INTÉGRATION

i Le calcul des primitives usuelles est considéré comme **ACQUIS** : à vous de vous « rafraichir » la mémoire si nécessaire sur votre manuel favori.......

1. QUELQUES CALCULS

Exercice 1 *Montrer pour* $b > 0$ *:*

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2b} \quad \& \quad \int_0^\infty \frac{x^4dx}{\big((x^2-a^2)^2+b^2x^2\big)^2} = \frac{\pi}{2b^3}.$$

Exercice 2 *Montrer pour* $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ *:*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)} \quad \& \quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)}$$

Et en déduire que pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$ *vérifiant* $\beta^2 \geq \alpha\gamma$ *:*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha x^4+\beta x^2+\gamma} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\gamma A}} \quad \& \quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{\alpha x^4+\beta x^2+\gamma} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\alpha A}}$$

où A *est une constante dépendant de* α *et* γ*.*

Exercice 3 . $C(\alpha)$ *désignant le coefficient* x^{2005} *dans le DL à l'origine et à un ordre convenable de* $(1+x)^\alpha$ *calculer*

$$\int_0^1 C(-t-1)\Big(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}\cdots+\frac{1}{t+2005}\Big)dt.$$

Exercice 4 *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ *:*

$$I(a) := \int_0^\pi \frac{dx}{1-2a\cos(x)+a^2} = \frac{\pi}{|1-a^2|}.$$

Exercice 5 *Établir pour* $a, b > 1$ *:*

$$\int_0^\pi \log\Big(\frac{b-\cos(t)}{a-\cos(t)}\Big)dt = \pi\big(\ Argch(b) - Argch(a)\big).$$

2. QUELQUES MÉTHODES POUR CALCULER L'INTÉGRALE DE CAUCHY

Exercice 6 *Montrer que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est convergente mais non absolument convergente.*

Exercice 7 *Évaluer la quantité* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *avec une précision décimale d'au moins deux chiffres aprés la virgule.*

Exercice 8 *Avec les intégrales doubles. En intégrant $f(x,t) = e^{-xy} sin(x)$ sur $[\epsilon, T] \times [0, +\infty[$, $0 < \epsilon < T$, calculer $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$.*

Exercice 9 *Avec quelques calculs élémentaires.*

(1). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n := \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2sin(t/2)} dt = \frac{\pi}{2}$. (calculer $I_{n+1} - I_n$...)

(2). Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\big((n+1/2)t\big) dt = 0$.

(3). Soit φ définie sur $[0,\pi]$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2\sin(t/2)}$, $0 < t \leq \pi$ et $\varphi(0) = 0$, montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$.

(4). En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 *Encore une intégrale double. En intégrant sur $[0,u] \times [0,u]$, $f(x,y) = \sin(x)e^{-xy}$, montrer que*

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}(1 - e^{-xu}) dx = \int_0^u \frac{1 - e^{-yu}\big(\cos(u) + y\sin(y)\big)}{1+y^2} dy,$$

et en déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 *Et la convergence dominée. Si on admet (ou bien démontrer..cf. séance précédente)*

$$\forall a > 0 \ : \ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x+a} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^2+1} dx$$

montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12 *Cauchy caché. Soit Γ_R le contour (orienté positivement) constitué du quart de cercle γ_R de $C(0,R)$ inclu dans le quart de plan supérieur et des segments $[(0,R),(0,0)]$ & $[(0,0),(R,0)]$. Pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$, montrer que $\forall R > 0$: $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+a} dz = 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+a} dz = 0$ puis la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$.*

Exercice 13 *Une intégrale curviligne. Pour $0 < a < b$ calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle*

$$\omega(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\Big(\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big)dx + \big(x\cos(x) + y\sin(x)\big)dy\Big)$$

le long du "demi-pneu" dans le demi-plan des $y > 0$ délimité par les demi-cercles $C(0,a)$ et $C(0,b)$. En faisant tendre a vers zéro et b vers l'infini en déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

3. INTÉGRATION, SOMMES DE RIEMANN ECT...

Exercice 14 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{xdx}{x^5+1}\right), \qquad \textit{Solution : } 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{xdx}{x^5+1}\right), \qquad \textit{Solution : } 1.7/24.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \log\left(x + \frac{x^5}{n}\right) dx, \qquad \textit{Solution : } 2\log(2) - 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{xdx}{\arctan(nx)}\right)^n, \qquad \textit{Solution : } \exp(4/3\pi^2).$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-R\sin(x)) dx, \qquad \textit{Solution : } 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sqrt[n]{x} \sin(x) dx, \qquad \textit{Solution : } 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sqrt{1+x}} dx, \qquad \textit{Solution : } 0.$$

Exercice 15 *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. *Calculer* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx$.

Exercice 16 *Montrer que pour* $\in \mathcal{C}^1([a,b])$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

En déduire

$$\lim_{k\to\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 17 *Soient* $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$. *Déterminer* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$.

Exercice 18 *Montrer que pour tout* $n \geq 1$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ *; en déduire que la suite de terme général* $u_n := \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *converge et préciser sa limite.*

Exercice 19 *On se propose détudier la suite de terme général* $u_n := \sum_{k=n}^{2n} \sin(\frac{\pi}{k})$. *Pour cela montrer que la suite* $(v_n)_n$ *de terme général* $\sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$ *converge vers* $\pi\log(2)$, *puis conclure en remarquant (avec Taylor-Lagrange par exemple) que* $\lim_n u_n = \lim_n v_n$.

Exercice 20 *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

1. *Montrer que* $(s_n)_n$ *converge et préciser sa limite* λ.
2. *Pour* f $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *dérivable et telle que* $f(0) = 0$. *Montrer que la suite* $\Big(\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{k+n})\Big)_n$ *converge et calculer sa limite.*

Exercice 21 *On pose pour* $n \geq 1$: $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$. *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* $3/8$.

Exercice 22 ***(Irrationalité de*** π.***)*** *Pour* $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ *on considère le polynôme* $P_n(X) = \frac{X^n}{n!}(bX-a)^n$.

1. *Montrer que les polynômes* P_n *ainsi que toutes leurs dérivées prennent des valeurs entières en les points* 0 *et* a/b.
2. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \int_0^{a/b} P_n(x)\sin(x)dx = 0$.
3. *Si* $\pi = a/b$, *montrer qu'alors* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx \in \mathbb{N}^\star$.
4. *Déduire de ce qui précède que* π *ne peut être rationnel.*

Exercice 23 ***(Lemme de Riemann-Lebesgue)*** *Soit* f : $[a,b] \to \mathbb{R}$, *montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)dt = 0$$

si f *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *si* f *est en escalier, si* f *est continue.*

Exercice 24 *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *les sommets d'un polygône régulier inscrit dans un cercle de rayon* 1. *Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k = \frac{4}{\pi}.$$

Exercice 25 *Soit* $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. *Si* $f(a) = f(b) = 0$ *vérifier que*

$$\Big|\int_a^b f(t)dt\Big| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Et si seulement $f(a) = 0$: $\int_a^b \Big|f(t)\Big|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \Big|f'(t)\Big|^2 dt$. *Dans ce cas étudier le cas d'égalité.*

Exercice 26 *Montrer que si f est continue sur $[a,b]$, alors*

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

Si de plus f est sans zéros dans $[a,b]$ déterminer les limites suivantes

$$\lim_{p\to 0}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \& \quad \lim_{p\to-\infty}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Exercice 27 *On pose $u_0 = 0$ et pour $n \geq 1$: $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t(t-1)\dots(t-n+1)dt$. On se propose d'étudier la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n x^n$.*

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{1}{6n^2} \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{6n}$ et en déduire le rayon de convergence de la série.*
2. *Plus finement, montrer que $u_n = O\big(\frac{1}{n\log^2(n)}\big)$. En déduire la convergence uniforme sur $[-1,1]$ de la série.*
3. *Montrer que $\forall x \in [-1,1]$: $S(x) = \dfrac{x}{\log(1+x)}$.*

Exercice 28 *On pose pour $n \geq 0$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.*

1. *Montrer que $(u_n)_n$ décroit vers 0.*
2. *Montrer que $\sum_n u_n$ diverge.*
3. *Montrer que $\sum_n \frac{u_n}{n}$ et calculer sa somme $(= \log 2 + \sqrt{2}\big(\frac{\pi}{2} + \log(1+\sqrt{2})\big))$.*

Exercice 29 ***(Histoires de moments)***

0). Soient $f \in C([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\int_a^b f(t)t^k dt = 0, \qquad \forall\, k \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Montrer que f possède au moins $n+1$ zéros dans $[a,b]$.

1). Soit $f \in C([a,b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).

2). le théorème des moments de Hausdorff tombe en défaut sur $\mathbb{R}^+$: Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = e^{-x^{1/4}}\sin(x^{1/4})$$

➪ *Montrer que*

$$I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t} dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

➪ *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$...).

3). Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([-a,a])$. Si

$$\int_{-a}^a t^n f(t)dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

montrer que f impaire sur $[-a,a]$. De même, si

$$\int_{-a}^a t^{2n+1} f(t)dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

montrer que f paire sur $[-a,a]$.

4. INTÉGRALES IMPROPRES.

Exercice 30 ***(Intégrales de Fresnel)*** *Montrer que les intégrales*

$$\int_0^\infty \cos^2(t)dt \qquad \textit{et} \qquad \int_0^\infty \sin^2(t)dt$$

sont convergentes.

Exercice 31 ***(Sommes de Riemann dans une intégrale impropre)***

1) *Soit f une application monotone sur l'intervalle $(0,1)$ telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ existe, montrer que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(t)dt.$$

2) Soit f une application monotone sur l'intervalle $(0,1)$. On suppose que l'une des deux limites $\lim_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim_{x\to 1_-} f$ est finie et que la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

existe et est finie. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t)dt$ existe.

3) En considérant l'application $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$ montrer que dans la question précédente, la première hypothèse ne peut être écartée.

4)Calculer les limites suivantes

(✔) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n}$$

(✔) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\ldots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}$$

(✔) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\log^2(k)-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\log(k)\right)^2\right).$$

Exercice 32 *Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. Quelles implications existe-t-il entre les propriétés*

1) $\int_0^\infty f(t)dt$ *converge.*

2) $\lim_{x\to\infty} f(x)dx=0$.

3) f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 33 *Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge, établir l'équivalence*

$$\int_0^\infty f'(t)dt \quad \textit{converge} \quad \Longleftrightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t)=0.$$

On suppose maintenant que $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$.

1. *Si f et f'' admettent en $+\infty$ des limites finies, montrer que $\lim_{t\to+\infty} f'(t)=0$.*
2. *Si $\int_0^\infty f(t)dt$ et $\int_0^\infty f''(t)dt$ convergent, montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$.*

Exercice 34 *Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels l'intégrale $I_{\alpha,\beta}=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log(1+t^\alpha)}{t^\beta}$ converge.*

Exercice 35 *Etudier selon les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale $I_\alpha:=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$. Etudier l'absolue convergence (pour $0<\alpha\leq 1$ on pourra minorer $\displaystyle\sum_{k=1}^N\int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}dt$).*

Exercice 36 *Soit $f\ :\ [0,1]\mapsto\mathbb{R}$ continue, dérivable à l'origine et telle que $f(0)=f'(0)=0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^{-3/2}dt$ converge.*

Exercice 37 *Préciser la nature des intégrales généralisées suivantes :*

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\Big(\big(\cos(\frac{1}{x})\big)^x - 1\Big)dx,\ \ \alpha\in\mathbb{R}\quad \& \quad \int_2^{\infty}\Big(\log\big(1-\frac{\log(x)}{x}\big)+\frac{\log(x)}{x}\Big)dx.$$

Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 TOULOUSE FRANCE. lassere@picard.ups-tlse.fr & lassere@wanadoo.fr