M1 ISMAG
MIS243Y - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°1 : Processus stationnaires, AR et MA

Exercice 1
Le but de cet exercice est de montrer que la somme de deux processus stationnaires n'est pas nécessairement stationnaire.
Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc ; vérifier que les processus définis par : $X_t = \eta_t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ et $Y_t = (-1)^t\eta_t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ sont stationnaires. Montrer que leur somme $Z_t = X_t + Y_t, \forall t \in \mathbb{Z}$, n'est pas un processus stationnaire.

Exercice 2
Parmi les séries chronologiques suivantes, déterminer celles qui sont centrées, stationnaires.
- $X_n = \frac{1}{n}\epsilon_n$.
- $X_n = 0.2\epsilon_n + 0.9\epsilon_{n-8}$.
- $X_n = \epsilon_n^2 + 0.5\epsilon_{n-1} - \sigma^2$.
- $X_n = \epsilon_n + 0.2n$.

Nota : Ici ϵ_n est un bb Gaussien de variance σ^2.
On rappelle que si Y et Z sont des v.a. indépendantes, alors Y^2 est indépendant de Z.
Certains calculs peuvent être évités en reconnaissant des modèles connus.

Exercice 3
Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus stationnaire et pour tout $t \in \mathbb{Z}$, X_t^* la régression affine de X_t sur $(X_s)_{s\leq t-1}$. Montrer que le processus défini par la suite des innovations $(X_t - X_t^*)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc.

Exercice 4
À partir des autocorrélations empiriques (en haut) et des autocorrélations partielles empiriques (en bas), proposer, s'il y a lieu, des modèles pour les processus suivants de la figure 1.

Exercice 5 : Etude approfondie du processus MA(1)
On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t \ = \ \eta_t - \theta\eta_{t-1},$$

où θ est un réel tel que $|\theta| < 1$ et $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Écrire η_t en fonction de $(X_s,\ s \leq t)$.
2. En déduire la régression affine de X_t sur $(X_s,\ s \leq t)$.
3. Soit $\widehat{X}_T(1)$ la prévision linéaire optimale de X_{T+1}, c'est-à-dire la régression affine de X_{T+1} sur $X_T, X_{T-1}, \ldots$ Calculer l'erreur de prévision :

$$E\left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1}\right)^2.$$

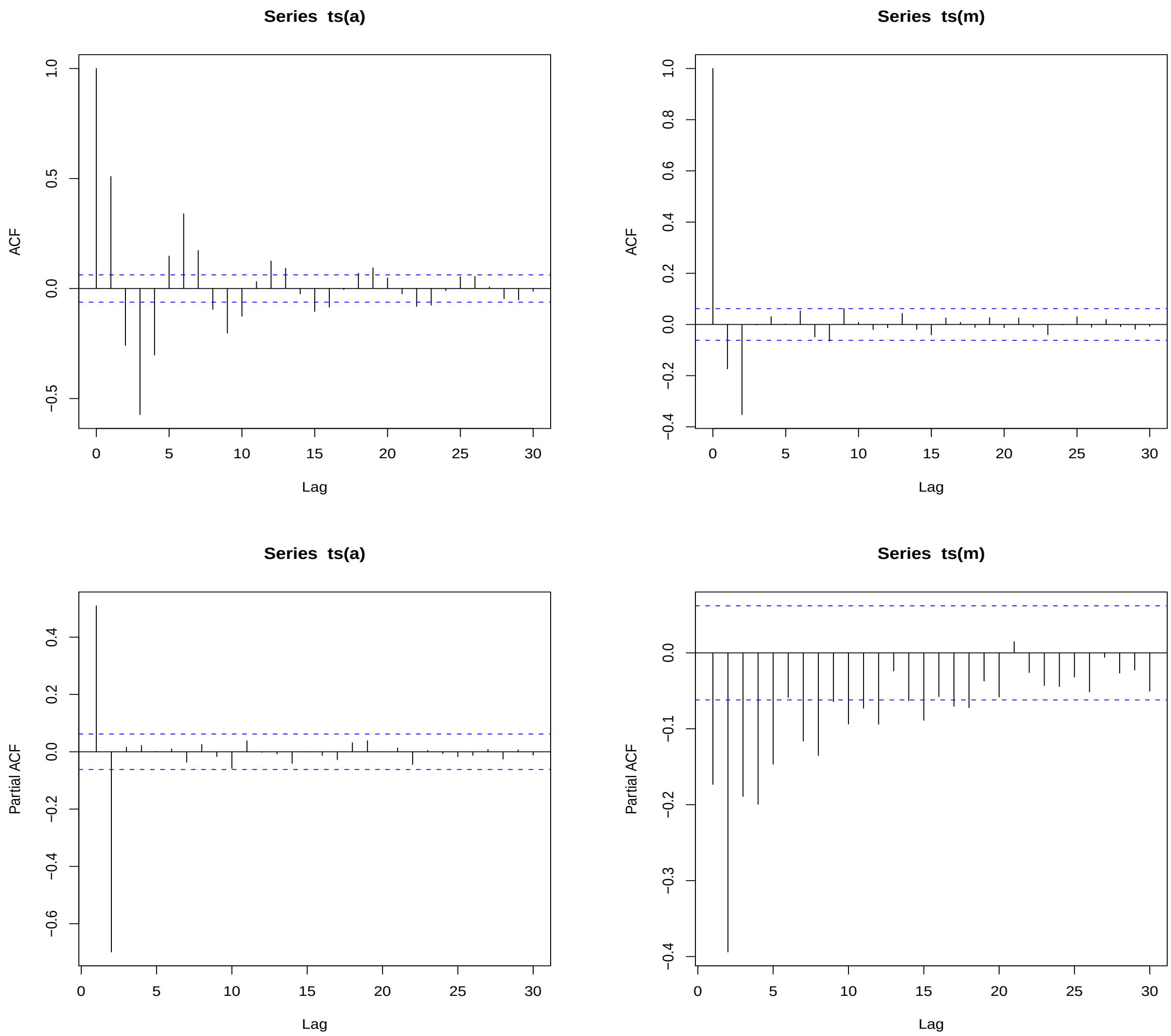

FIGURE 1 – Exemples de l'exercice 4

Exercice 6 : Etude approfondie du processus AR(1)
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stochastique centré tel que :

$$X_t - \varphi X_{t-1} \;=\; \eta_t, \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

I.

1. On suppose que $\varphi = 1$.
   a. Pour $t \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}^*$, écrire $X_t - X_{t-h}$ en fonction de $\eta_t, \ldots, \eta_{t-h+1}$.
   b. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(X_t - X_{t-h}\right)^2$.
   c. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être un processus stationnaire.
2. On suppose que $\varphi = -1$; montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être stationnaire.

II. On suppose que $|\varphi| < 1$ et que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. Pour $t \in \mathbb{Z}$, écrire X_t en fonction de $(\eta_s)_{s\in\mathbb{Z}}$.
2. En déduire que η_t est l'innovation du processus à la date t.
3. Soit $h \in \mathbb{N}^*$; établir une relation de récurrence entre $\gamma(h)$ et $\gamma(h-1)$, où γ est la fonction d'autocovariance du processus.
4. Calculer $\gamma(0)$ et en déduire l'expression de $\gamma(h)$ pour tout h.
5. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus.
6. Calculer la fonction d'autocorrélation partielle du processus.
7. Montrer que, pour $i = 1, 2$, $\widehat{\gamma}(i) \;=\; \dfrac{1}{T-i}\displaystyle\sum_{t=1}^{T-i} X_t X_{t+i}$ est un estimateur sans biais de $\gamma(i)$. En déduire un estimateur de φ.

III. On suppose que $|\varphi| > 1$ et que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

1. Ecrire X_t en fonction de $(\eta_s)_{s\in\mathbb{Z}}$.
2. Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par :

$$X_t - \frac{1}{\varphi} X_{t-1} \;=\; \epsilon_t.$$

   Ecrire ϵ_t en fonction de $(\eta_s)_{s\in\mathbb{Z}}$.
3. Montrer que $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et que ϵ_t est l'innovation du processus à la date t.

Exercice 7
Soit η un bruit blanc de variance 1 et X le MA(1) défini selon

$$X_t = \eta_t - 2\eta_{t-1}$$

1. Quelles sont les autocovariances de X ?
2. Quelle est la relation MA(1) entre X et son bruit blanc d'innovation ϵ ?

3. Quelle est la variance de ϵ ?
4. Exprimez ϵ_t en fonction des valeurs passées de X.
5. Exprimez les prévisions optimales $\widehat{X}_t(1)$, $\widehat{X}_t(2)$,... en fonction de X_t, X_{t-1},...

Exercice 8
Soit η un bruit blanc et X le AR(1) de variance 1 vérifiant

$$X_t - 3X_{t-1} = \eta_t$$

1. Comment s'exprime X en fonction des valeurs passées de son bruit blanc d'innovation ϵ_t ?
2. On suppose avoir observé $(X_{-5}, \dots, X_0) = (-1, 0.6, 1.2, -0.6, 0.75, 0.27)$. Quelles sont les valeurs numériques des prédictions optimales $\widehat{X}_0(1)$ et $\widehat{X}_0(2)$?
3. Quelle est la variance de ϵ ?
4. Comment s'exprime X en fonction des valeurs futures de η ?
5. Quelle est la variance de η ?

Exercice 9
Soit ϵ un bruit blanc de variance γ^ϵ et X le AR(2) vérifiant

$$X_t - \frac{8}{15}X_{t-1} + \frac{1}{15}X_{t-2} = \epsilon_t$$

1. On suppose que X est de variance 1. Quelles sont les équations de Yule-Walker reliant γ^ϵ, $\gamma_0(= 1)$, γ_1 et γ_2 ? En déduire les valeurs de γ^ϵ, γ_1 et γ_2 ?
2. Déterminez A et B de sorte que

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z)(1 - \frac{1}{5}z)} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{3}z)} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{5}z)}.$$

3. Donnez les valeurs de c_0, c_1, c_2 dans l'expression $X_t = c_0\epsilon_t + c_1\epsilon_{t-1} + c_2\epsilon_{t-2} + \dots$
4. Comment s'exprime $X_{t+1} - \widehat{X}_t(1)$ l'erreur de prédiction à l'horizon 1 en fonction des ϵ_{t+1}, ϵ_t, ... ?
   Même question pour $X_{t+2} - \widehat{X}_t(2)$ (en fonction des ϵ_{t+2}, ϵ_{t+1}, ...).
   Calculer la variance de $X_{t+2} - \widehat{X}_t(2)$?

Exercice 10
Soit η un bruit blanc de variance 1 et X le MA(q) vérifiant

$$X_t = 5\eta_{t+5} - 10\eta_{t-5}.$$

1. Quelle est la valeur minimale de q pour laquelle X est un MA(q) ?
2. Calculer les autocovariances de X ?
3. Donner la relation entre X et son bruit blanc d'innovation ϵ.
4. Calculer la variance de ϵ.

M1 ISMAG
MIS243Y - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°2 : Processus ARMA

Exercice 1

Soit η un bruit blanc et X le ARMA(1,1) vérifiant

$$X_t - 2X_{t-1} = \eta_t + \frac{1}{2}\eta_{t-1}$$

1. Quelle est la relation ARMA entre X et son bruit blanc d'innovation ϵ ?
2. Exprimez X_t en fonction des valeurs passées de ϵ.
3. Exprimez ϵ_t en fonction des valeurs passées de X.

Exercice 2

Soit ϵ un bruit blanc et X le ARMA(1,1) vérifiant

$$X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

1. Soit Y le AR(1) vérifiant
$$Y_t - \frac{1}{3}Y_{t-1} = \epsilon_t.$$
Montrez que $X_t = Y_t - \frac{1}{2}Y_{t-1}$.
2. Exprimez γ_0^X en fonction de γ_0^Y et γ_1^Y.
3. On suppose que ϵ est de variance 1. Calculez γ_0^Y et γ_1^Y puis déduisez-en γ_0^X.

Exercice 3

Soit X un ARMA(p,q). Soit Y la série stationnaire définie par

$$\forall t, \quad Y_t = X_{-t}.$$

Montrez que Y est aussi un ARMA(p,q).

Exercice 4

On étudie ici les processus ARMA(1,1)

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t - b\epsilon_{t-1},$$

où $|a| < 1$, $|b| < 1$ et ϵ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Ecrire le développement en moyenne mobile infinie de ces processus.
2. Calculer $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, ... à partir de l'expression précédente.
3. Montrer directement (sans utiliser la représentation moyenne mobile infinie) que la variance du processus $\gamma(0)$ est
$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{1 + b^2 - 2ab}{1 - a^2}.$$

4. Déterminer de la même façon l'autocovariance d'ordre 1 $\gamma(1)$ ainsi qu'une relation de récurrence pour les autocorrélations d'ordre h avec $h > 1$.
5. En déduire les autocorrélations $\rho(h)$ du processus.

Exercice 5
On considère le processus aléatoire suivant

$$X_t = 10 + \frac{7}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} + \epsilon_t - \frac{5}{10}\epsilon_{t-1}$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Calculer l'espérance de X en supposant que le processus est stationnaire.
2. Trouver un nombre μ tel que le processus $Y_t = X_t - \mu$ soit un ARMA(2,1) sans terme constant et précisez quelle est la récurrence obtenue.
3. Calculer les trois premiers coefficients ψ_0, ψ_1 et ψ_2 de la représentation moyenne mobile infinie de Y_t, c'est-à-dire que

$$Y_t = \sum_{i\geq 0} \psi_i \epsilon_{t-i}.$$

   Déterminer aussi une formule de récurrence générale pour les coefficients ψ_j.
4. Calculer les trois premiers coefficients π_0, π_1 et π_2 de la représentation moyenne mobile infinie de Y_t, c'est-à-dire que

$$\epsilon_t = \sum_{i\geq 0} \pi_i Y_{t-i}.$$

   Déterminer aussi une formule de récurrence générale pour les coefficients π_j.
5. Donner une formule de récurrence pour les prévisions de Box-Jenkins $\hat{Y}_t(h)$ de Y_{t+h}.
6. Exprimer $\hat{Y}_t(h)$ en fonction des Y_j, $j = 0, \ldots, t$ et des valeurs Y_{-1}, $Y_{-2} \ldots$

7. En déduire une formule générale de prévision pour $\hat{X}_t(h)$.

M1 ISMAG
MIS243Y - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°3 : Processus ARIMA et SARIMA

Exercice 1 :
On considère le processus ARMA(1,1) de moyenne $\mu = 0$

$$(I - \phi B)Y_t = (I - \theta B)\eta_t$$

où $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

1. Montrer que la fonction de prévision Box-Jenkins est donnée par $\hat{Y}_t(k) = \phi^{h-1}\hat{Y}_t(1)$ et que

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t(1) &= \phi Y_t - \theta\eta_t \\ &= (\phi - \theta)\sum_{j=0}^{\infty}\theta^j Y_{t-j} \\ &= (\phi - \theta)(Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \ldots)\end{aligned}$$

Ces résultats restent-ils vrais si $\phi = 1$ et donc pour un ARIMA(0,1,1) ?

2. Montrer qu'on a aussi $\hat{Y}_t(1) = (\phi - \theta)Y_t + \theta\hat{Y}_{t-1}(1)$.
3. On utilise ce modèle pour ajuster une série et on obtient comme estimations des paramètres $\phi = 0.8$, $\theta = 0.3$ et $\mu = 0$. Les dix dernières valeurs disponibles sont :

t	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
y_t	2.98	4.10	6.10	9.36	8.57	8.82	7.31	7.19	2.36	0.40

Donner les prévisions des trois valeurs suivantes de la série. Laquelle des différentes formules pour $\hat{Y}_t(1)$ ci-dessus paraît la plus convenable à appliquer ?

Exercice 2 :
On considère un processus ARIMA(0,1,1) (aussi appelé IMA(1,1)) et défini par :

$$(I - B)Y_t = (I - \theta B)\eta_t$$

1. Si $|\theta| < 1$, déterminer les coefficients de la représentation du bruit.
2. En remarquant que $(I - B)\sum_{i=0}^{t-1} B^i = I - B^t$, montrer que

$$Y_t - Y_0 = \eta_t + (1 - \theta)\sum_{k=1}^{t-1}\eta_{t-k} - \theta\eta_0.$$

3. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = (1 - \theta)Y_t + \theta\hat{Y}_{t-1}(1)$.

Note : La dernière formule redonne le lissage exponentiel quand $\theta \in (0, 1)$ et donc $\alpha = 1 - \theta \in (-1, 0)$. La formule donne une moyenne ponderée : $\hat{Y}_t(1) = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}(1)$ et α est la constante de lissage. Ainsi on peut voir la prévision Box-Jenkins comme une généralisation du lissage exponentiel, en utilisant des paramètres estimés à partir des donées (au-lieu de ad-hoc).

Exercice 3 :
Considérons le processus ARIMA(1,1,1)

$$(I - \phi B)(I - B)Y_t = (I + \theta B)\eta_t,$$

avec $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

1. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = (1+\phi)Y_t - \phi Y_{t-1} + \theta\eta_t$ et $\hat{Y}_t(k) = (1+\phi)\hat{Y}_t(k-1) - \phi\hat{Y}_t(k-2)$ pour $k \geq 2$.
2. Montrer que $\hat{Y}_t(k) = A_t + B_t\phi^k$ pour $k \geq 0$ et trouver des expressions pour A_t et B_t en termes de Y_t, Y_{t-1}, η_t, ϕ et θ, en utilisant $\hat{Y}_t(0)[= Y_t]$ et $\hat{Y}_t(1)$ du (1) ci-dessus. Montrer que :

$$\hat{Y}_t(k) = Y_t + \phi\frac{1-\phi^k}{1-\phi}(Y_t - Y_{t-1}) + \theta\frac{1-\phi^k}{1-\phi}\eta_t, \quad k \geq 0.$$

   Trouver la limite $\lim_{k\to\infty} \hat{Y}_t(k)$.
3. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = -\theta\hat{Y}_{t-1}(1) + (1+\phi+\theta)Y_t - \phi Y_{t-1}$ et $\hat{Y}_t(k) = \hat{Y}_{t-1}(k+1) + \psi_k\eta_t$.
4. Montrer que $\hat{Y}_t(k)$ peut s'exprimer en fonction seulement des valeurs passées de la série. [Indication : utiliser les π pour vous débarasser de η_t].
5. En utilisant le modèle $(I - 0.6B)(I - B)Y_t = (I + 0.3B)\eta_t$, obtenir les prévisions des trois termes suivants de la série :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	14.8	12.4	9.4	7.7	7.3	9.0	10.5	11.2	10.4	11.6
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y_t	12.1	11.6	9.9	8.1	6.6	5.4	4.2	5.3	6.8	9.2

Exercice 4 :
Considérons le processus ARIMA(1,1,2)

$$(I - \alpha B)(I - B)Y_t = (I + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\eta_t$$

où $|\alpha| < 1$. Soit $\hat{Y}_t(k)$ la prévision de Y_{t+k} au temps t.

1. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = (1+\alpha)Y_t - \alpha Y_{t-1} + \theta_1\eta_t + \theta_2\eta_{t-1}$ et trouver les expressions correspondantes pour $\hat{Y}_t(2)$ et $\hat{Y}_t(k)$ pour $k \geq 3$.
2. Montrer que la fonction de prévision peut s'exprimer sous la forme $\hat{Y}_t(k) = a_t + b_t\alpha^k$, $k \geq 1$ et donner la formule de a_t, b_t comme fonctions de Y_t, Y_{t-1}, η_t, η_{t-1}.
3. Montrer que $\hat{Y}_t(k)$ peut s'exprimer en fonction seulement des valeurs passées de la série.
4. Un statisticien a utilisé le modèle ARIMA (1,1,2) décrit ci-dessus pour une série (dénommée prix) qui exprime le prix d'une action à la bourse pour 100 jours consécutifs. En sachant que $\hat{Y}_{98}(1) = 686.996$ et $\hat{Y}_{99}(1) = 659.416$, calculer les prévisions $\hat{Y}_{100}(1)$ et $\hat{Y}_{100}(2)$ de Y_{101} et Y_{102}.

Exercice 5 : Optimalité du lissage exponentiel double
La théorie de la prévision des ARIMA(p, d, q) a montré que

$$\widehat{X}_t(k) = -\sum_{j=1}^{p+d} \phi_j \widehat{X}_{t+k-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \widehat{\eta}_{t+k-j}, \tag{1}$$

avec

$$\widehat{X}_{t+k-j} = \begin{cases} \widehat{X}_t(k-j) & \text{si} \quad k > j \\ X_{t+k-j} & \text{si} \quad k \leq j \end{cases}$$

et

$$\widehat{\eta}_{t+k-j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k > j \\ \eta_{t+k-j} & \text{si} \quad k \leq j \end{cases}$$

1) Quelle est l'expression de $\widehat{X}_t(k)$ lorsque $k > q$?
2) En déduire que

$$\widehat{X}_t(k) = \sum_{i=1}^{p+d} b_i(t) f_i(k), \tag{2}$$

les $f_i(k)$, $i = 1, \ldots, p+d$, étant les solutions de élémentaires de l'équation de récurrence ayant pour polynôme caractéristique

$$z^{p+d} - \sum_{i=1}^{p+d} \phi_i z^{p+d-i} = z^{p+d} \phi(\frac{1}{z}).$$

Les $b_i(t)$ sont déterminées par les valeurs initiales, appelées dans ce contexte les *valeurs pivotales*, à savoir $\widehat{X}_t(k)$, $k = q, q-1, \ldots, q-p-d+1$.
3) On note

$$F_k = \begin{bmatrix} f_1(k) \ldots f_{p+d}(k) \\ \vdots \\ f_1(k+p+d-1) \ldots f_{p+d}(k+p+d-1) \end{bmatrix}$$

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_{p+d}(t) \end{bmatrix}, \tilde{h}_k = \begin{bmatrix} h_k \\ \vdots \\ h_{k+p+d-1} \end{bmatrix}.$$

Montrer que pour $k > q - p - d$,

$$b(t) = F_k^{-1} F_{k+1} b(t-1) + F_k^{-1} \tilde{h}_k \epsilon_t, \tag{3}$$

ϵ étant le bruit blanc d'innovation du processus ARIMA(p, d, q), X_t et les h_j ayant le sens habituel.

Rappelons que le lissage exponentiel double conduit à la formule de prévision

$$\widehat{X}_t(k) = \widehat{a}_t k + \widehat{b}_t, \quad \forall k > 0 \tag{4}$$

et aux formules de mise à jour

$$\widehat{a}_t = \widehat{a}_{t-1} + (1-\beta)^2 \left(X_t - \widehat{X}_{t-1}(1) \right),$$

et

$$\widehat{b}_t = \widehat{b}_{t-1} + \widehat{a}_{t-1} + (1-\beta^2) \left(X_t - \widehat{X}_{t-1}(1) \right).$$

où β est la constante de lissage.

4) Montrer que pour que (2) soit du type (4), on doit avoir $\phi(B) = (I - B)^2$.

5) Montrer alors que les formules (3) sont les mêmes que celles rappelées ci-dessus si et seulement si $\Theta(B) = (I - \beta B)^2$

6) Vérifier que le lissage exponentiel double est bien optimal pour X_t satisfaisant $\nabla^2 X_t = (I - \beta B)^2 \epsilon_t$.

M1 ISMAG
MIS243Y - Séries chronologiques
Feuille d'exercices n°4 : Processus ARCH et GARCH

Les moments conditionnels

La définition d'un processus ARCH fait intervenir la notion de variance conditionnelle. Nous avons vu que la variance conditionnelle permet de modéliser la variance locale du processus à chaque instant t, en fonction des observations antérieures. Cette notion peut être étendue à tous les moments de la série chronologique. Ainsi, l'espérance conditionnelle du processus (X_t) au temps t est la valeur moyenne attendue du processus au temps t calculée en tenant compte des valeurs du processus observées dans le passé.

Pour illustrer ce concept, considérons la marche aléatoire

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim$ i.i.d.$(0, \sigma_\epsilon^2)$.

- L'espérance de ce processus a déjà été calculée et $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout t ; donc l'espérance de ce processus est constante.
- Calculons son espérance conditionnelle en X_t, tenant compte des observations passées $(X_{t-i}, i > 0)$: par linéarité de l'espérance, on peut écrire :

  $$\mathbb{E}(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}(X_{t-1}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) + \mathbb{E}(\epsilon_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots).$$

  Le premier des deux termes de la somme est la valeur attendue de X_{t-1} sachant $(X_{t-i}, i > 0)$. Comme on connait X_{t-1}, ce terme est l'espérance d'une valeur fixée X_{t-1}. C'est donc X_{t-1}. En ce qui concerne le deuxième terme, il faut observer que ϵ_t ne dépend pas des réalisations passées du processus $(X_{t-i}, i > 0)$ (car le processus (ϵ_t) est i.i.d.). La connaissance du passé ne modifie donc pas la valeur attendue de ϵ_t et on peut écrire :

  $$\mathbb{E}(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = X_{t-1} + \mathbb{E}(\epsilon_t) = X_{t-1}.$$

  L'espérance conditionnelle d'une marche aléatoire en t est donc la valeur du processus en $t-1$.
  Interprétation : On peut interpréter ce résultat en énonçant que le meilleur prédicteur linéaire de la valeur moyenne d'une marche aléatoire est réalisé en répétant sa dernière valeur observée.

La notion de variance conditionnelle est naturellement définie à partir de celle de l'espérance conditionnelle, par la définition de la variance en fonction de l'espérance.

$$\mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1})^2.$$

Par extension, on définit également tous les moments conditionnels d'ordre $r > 1$.

Exercice 1 :
Considérons le processus AR(1)

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim$ i.i.d.$(0, \sigma_\epsilon^2)$ et $|\phi| < 1$. Montrer les moments et moments conditionnels suivants :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = c + \phi X_{t-1} & \mathbb{E}(X_t) = \frac{c}{1-\phi} \\ \mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 & \mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \end{array}$$

Exercice 2 :
Considérons le processus MA(1)

$$X_t = \epsilon_t + \theta_{t-1}$$

avec $\epsilon_t \sim$ i.i.d.$(0, \sigma_\epsilon^2)$. Montrer les moments et moments conditionnels suivants :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \theta\epsilon_{t-1} & \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 & \mathrm{Var}(X_t) = (1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2 \end{array}$$

Exercice 3 :
Considérons le processus ARMA(1,1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$$

avec $\epsilon_t \sim$ i.i.d.$(0, \sigma_\epsilon^2)$. Montrer les moments et moments conditionnels suivants :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \phi X_{t-1} + \theta\epsilon_{t-1} & \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 & \mathrm{Var}(X_t) = \frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma_\epsilon^2 \end{array}$$

Exercice 4 :
Montrer que la variance conditionnelle d'un processus ARMA(p, q) est la variance du processus des innovations σ_ϵ^2.

On peut tirer quelques conclusions importantes des exercices précédents : 1. L'espérance conditionnelle d'un processus stationnaire peut dépendre du temps (qu'en est-il de son espérance inconditionnelle ?). 2. La variance conditionnelle d'un processus ARMA est toujours indépendante du temps. 3. Une différence fondamentale entre les processus ARMA et ARCH est donc que la variance conditionnelle des premiers ne varie pas dans le temps, alors que les seconds permettent une modélisation de la variance conditionnelle qui peut changer au cours du temps.

Processus ARCH et GARCH

Exercice 5 :
On considère un processus ARCH(p).

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p X_{t-p}^2$ et en déduire que

$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i < 1.$$

3. Montrer que $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

Exercice 6 :
On considère un processus GARCH(p, q).

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
2. Montrer que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

Exercice 7 :
Si X_t est un processus GARCH$(1,1)$, montrer que

$$\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

et en déduire que

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad \text{si} \quad \alpha_1 + \beta_1 < 1.$$