

Devoir optimisation 3ième année GI

Exercice 1 :

Soit p un entier strictement supérieur à 1.

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, on considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = ax + by - \frac{(x^2 + y^2)^{p/2}}{p}$$

- 1) Donner la CN du premier ordre.
- 2) Donner la CN du second ordre.
- 3) Dédurre de ce qui précède en posant $q = \frac{p}{p-1}$

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{(a^2 + b^2)^{q/2}}{q}$$

- 4) Donner $\sup(f)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Montrer que $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2 + 22x - 8y + 36$ est strictement convexe.
Donner les points stationnaires de f et leur nature.

Exercice 3 :

Soit S un ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par les contraintes $g_1(x) \leq 0, \dots, g_i(x) \leq 0$ avec g_i des fonctions convexes.
Montrer que S est convexe.

Application : Montrer que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 3y^2 \leq 2, x + y \geq -10, 2x + 3y \leq 5\}$ est un ensemble convexe.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

avec A une matrice carrée symétrique définie positive et b, c deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que f a un unique point stationnaire $\bar{x}$ et préciser la nature de $\bar{x}$.

Exercice 5 :

Soient Q une matrice symétrique semi-définie positive et c un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Minimiser $f(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle c, x \rangle$ sur la contrainte $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$ où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.