Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre on s'intéresse aux problèmes de convergence de suites ou de séries de fonctions, et aux propriétés de l'éventuelle limite.

Tous les résultats donnés dans ce chapitre sont valables pour des fonctions d'une variable réelle. Quand cela aura du sens on pourra également considérer des fonctions d'une variable complexe (ou de plusieurs variables réelles ou complexes) mais les spécificités des fonctions d'une variable complexe seront abordées dans le chapitre sur les fonctions holomorphes.

On commence par rappeller qu'étudier une suite ou une série est essentiellement équivalent. En effet, si on s'intéresse à la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on peut noter $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ (inversement on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), et alors la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est équivalente à la convergence de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Simplement, selon les cas, il est plus agréable de travailler soit avec le terme général d'une suite soit avec la différence entre deux termes consécutifs. Ce sera la même chose pour les suites et séries de fonctions.

Dans toutes ces notes on considérera des fonctions à valeurs dans K, où K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En fait on pourrait énoncer la plupart des résultats pour des fonctions dans un espace de Banach quelconque, mais on n'en parlera pas ici.

1.1 Convergence simple

1.1.1 Cas des suites

Soit D un ensemble. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de D dans K. La façon la plus naturelle de définir une limite pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de regarder, pour chaque $x \in D$, la limite éventuelle de la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.1.1. Soient D un ensemble, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K, et f une fonction de D dans K. On dit que f_n converge simplement (ou ponctuellement)

Version du 2 décembre 2022

vers f quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $x \in D$ on a

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D, \quad |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.1.1}$$

Exemple 1.1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & x^n. \end{array} \right.$$

Alors f_n converge simplement vers la fonction f qui à $x \in [0,1]$ associe

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

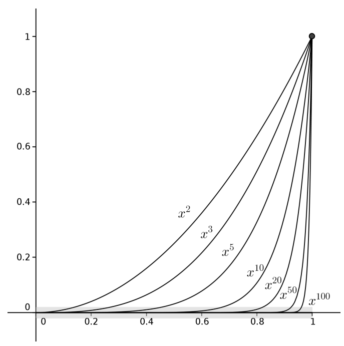

FIGURE 1.1 – Puissances de x sur $[0,1]$

Exemple 1.1.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{array} \right.$$

Alors f_n converge simplement vers la fonction exponentielle.

Exemple 1.1.4. Soit φ une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note $f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n+1}$. Alors f_n converge simplement vers 0.

1.1.2 Cas des séries

La convergence simple est définie de façon parfaitement analogue pour les séries de fonctions.

Définition 1.1.5. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ est convergente pour tout $x \in D$. Dans ce cas on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ la fonction qui à $x \in D$ associe $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$.

Remarque 1.1.6. Pour $N \in \mathbb{N}$ on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} g_n$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est simplement convergente si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement. Dans ce cas, S_N converge simplement vers la somme $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$.

Exemple 1.1.7. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$, et sa somme est

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$ la somme partielle S_N est telle que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 1.1.8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n(x)$ converge. Cela signifie que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n$ converge simplement.

Exemple 1.1.9. Soit $\alpha > 0$. On considère sur $[0,1]$ la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}$. Par le critère des séries alternées la série converge pour tout $x \in [0,1]$.

Remarque 1.1.10. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)|$ est convergente pour tout $x \in D$. Puisqu'une série numérique absolument convergente est convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est simplement convergente. Lorsque cette hypothèse est vérifiée on pourra dire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est elle-même absolument convergente.

1.1.3 Propriétés de la limite simple

Puisque la notion de convergence simple n'est rien d'autre qu'une limite de suites ou de séries numériques regardées indépendamment les unes des autres, il est clair que toutes les opérations algébriques valables pour les limites d'une suite ou d'une série numériques sont encore valables pour la convergence simple. Ainsi la somme de deux suites de fonctions simplement convergentes est simplement convergente, et la limite de la somme est la somme des limites. Idem pour le produit, le quotient si les dénominateurs ne s'annulent pas, etc.

On considère maintenant un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.

On commence par les propriétés définies par des égalités, évidemment préservées par passage à la limite simple.

Proposition 1.1.11. (i) *Si I est un intervalle symétrique et si f_n est paire (respectivement impaire) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est paire (respectivement impaire).*

(ii) *Si $I = \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$ tel que f_n est T-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est T-périodique.*

On rappelle que le passage à la limite est compatible avec la relation d'ordre. Ainsi toutes les propriétés définies par des inégalités sont préservées par le passage à la limite simple. On pense évidemment à la monotonie, mais aussi à la convexité. On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, est convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall \theta \in [0,1], \quad f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

La définition de la concavité est obtenue en renversant l'inégalité.

Proposition 1.1.12. (i) *Si f_n est croissante (respectivement décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante (respectivement décroissante).*

(ii) *Si f_n est convexe (respectivement concave) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est convexe (respectivement concave).*

Démonstration. On suppose que f_n est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $x, y \in I$ tels que $x \leqslant y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n(x) \leqslant f_n(y)$. Par compatibilité de la relation d'ordre avec le passage à la limite, on obtient quand n tend vers $+\infty$ que $f(x) \leqslant f(y)$. Cela prouve que f est croissante. Les autres propriétés sont démontrées de façon analogue. □

Remarque 1.1.13. Attention, les inégalités strictes ne sont pas préservées par passage à la limite. Ainsi, si f_n est strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors f sera croissante (d'après la proposition 1.1.12) mais pas nécessairement strictement croissante (voir par les exemples 1.1.2 ou 1.1.4 avec φ strictement croissante). De même la limite simple d'une suite de fonctions strictement convexes sera convexe mais pas nécessairemeent strictement convexe.

1.1.4 La régularité ne passe pas à la limite simple

La convergence simple d'une suite de fonctions est relativement simple à vérifier, puisqu'il suffit de vérifier, pour chaque x indépendamment des autres, la convergence d'une suite numérique. Mais cela ne donne pas de bons résultats, au sens où si on part d'une suite de fonctions f_n qui vérifient de bonnes propriétés, la limite f ne vérifiera pas nécessairement ces mêmes propriétés.

Typiquement, la régularité des fonctions, qui nécessite de pouvoir comparer la valeur d'une fonction en un point x aux valeurs de la fonction aux points proches de x, ne se transmet pas du tout par limite simple.

Prenons l'exemple 1.1.2. On observe que

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^n = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1,$$

tandis que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \lim_{n \to +\infty} x^n = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 0 = 0.$$

Avec les notations de l'exemple 1.1.2 on peut encore écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_n(x) = 1,$$

et pourtant

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) \neq 1.$$

Pour chaque n, si x est suffisamment proche de 1, alors x^n est proche de 1. Mais la condition « x est suffisamment proche de » est de plus en plus restrictive au fur et à mesure que n grandit, à tel point qu'aucun $x < 1$ ne peut vérifier cette condition pour tout n. Plus précisément, si on fixe $\varepsilon > 0$, alors $|f_n(x) - 1| \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $x \geqslant (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$. Cette condition devient de plus en plus restrictive quand n grandit, et seul $x = 1$ la vérifie pour tout n.

Une autre façon de dire la même chose est de remarquer que si on note $x_n = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ alors on a

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad f_n(x_n) = 1 - \varepsilon < 1.$$

Pire, si on note $y_n = 1/(n^{1/n}) = \exp(-\ln(n)/n)$ alors on a

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad f_n(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, toutes les notions de régularité définies à partir de limites (continuité, dérivabilité, etc.) ne passent pas non plus à la limite simple. À nouveau, l'exemple 1.1.2 est très parlant, puisqu'une suite de fonctions polynomiales (on ne peut plus régulières, donc) converge vers une fonction qui n'est même pas continue.

Pour se convaincre qu'on ne peut rien conclure avec la limite simple, on donne un autre contre-exemple.

Exemple 1.1.14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc f_n converge simplement vers $f = 0$. On observe que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f_n'(x) = \cos(nx).$$

D'un autre côté, f est dérivable de dérivée nulle. Et pourtant f_n' ne converge pas vers f'. D'ailleurs, la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas du tout de limite simple.

1.1.5 Limites simples et intégration

Le passage à la limite simple ne se comporte pas bien du tout non plus vis-à-vis de l'intégration. On reviendra sur ce point au paragraphe 1.3. On note ici que même si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues à supports compacts qui converge (simplement) vers une fonction continue à support compact (le cas le plus favorable a priori pour l'intégration), on peut avoir

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Exemple 1.1.15. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par (voir la figure 1.2, en bleu)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant n-1, \\ x-(n-1) & \text{si } n-1 \leqslant x \leqslant n, \\ (n+1)-x & \text{si } n \leqslant x \leqslant n+1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant n+1. \end{cases}$$

La fonction f_n ainsi définie est continue à support compact sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{n-1}^{n+1} f_n(x)\,dx = 1.$$

D'autre part, f_n converge simplement vers 0. En effet, étant donné $x \in \mathbb{R}$, on observe que pour tout $n \geqslant x+1$ on a $f_n(x) = 0$. Ainsi on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Exemple 1.1.16. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par (voir la figure 1.2, en rouge)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Comme pour l'exemple précédent, cela définit une suite de fonctions continues, à supports compacts, d'intégrales 1, et qui pourtant converge simplement vers 0 (pour $x \leqslant 0$ on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour $x > 0$ on a $f_n(x) = 0$ dès que $n \geqslant \frac{2}{x}$).

Exemple 1.1.17. On a de la même façon un contre-exemple en considérant, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par (voir la figure 1.2, en vert)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -n, \\ \frac{1}{n} + \frac{x}{n^2} & \text{si } -n \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0 & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

Pour tous ces exemples, on a construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions d'intégrales 1 convergent vers une fonction d'intégrale nulle. Sur le même modèle on peut en fait construire des suites de fonctions d'intégrale convergeant vers $+\infty$, avec une limite d'intégrale nulle.

1.2 Convergence uniforme

1.2.1 Définition et comparaison avec la convergence simple

On a vu que la convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions est une notion trop faible pour pouvoir prouver de bonnes propriétés sur la limite. On introduit maintenant une notion de convergence plus contraignante, mais qui aura de meilleures propriétés.

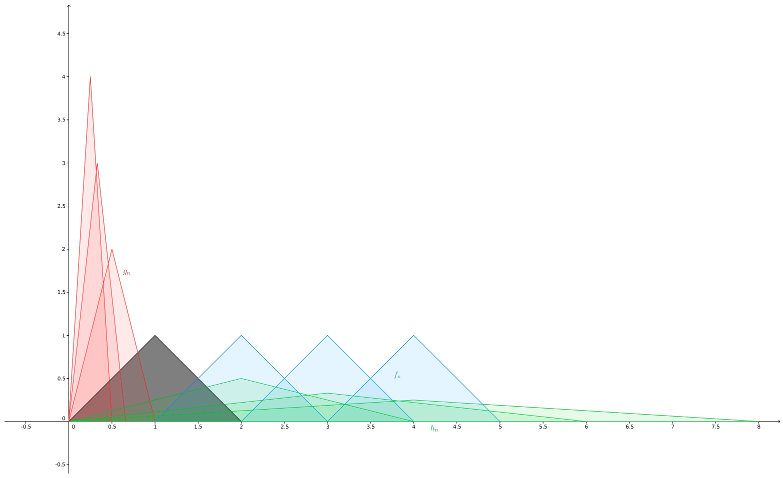

FIGURE 1.2 – Contre-exemples pour le passage à la limite sous l'intégrale

Définition 1.2.1. Soient D un ensemble, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K, et f une fonction de D dans K. On dit que f_n converge uniformément vers f quand n tend vers $+\infty$ si

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.2.1}$$

Cela s'écrit aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \forall n \geqslant N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.2.2}$$

On commence par vérifier que la convergence uniforme est une propriété plus forte que la convergence simple.

Proposition 1.2.2. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f comme à la définition 1.2.1. Si f_n converge uniformément vers f, alors f_n converge simplement vers f.*

Démonstration. Soit $x \in D$. On a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in D} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où f_n converge simplement vers f. □

Il est important de bien faire la différence entre convergence simple et convergence uniforme. Pour la convergence simple, on regarde la convergence de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour chaque x indépendamment les uns des autres, et en particulier la vitesse de convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ peut être différente pour chacun des x. Pour avoir convergence uniforme il faut non seulement avoir convergence simple, mais de plus la vitesse de convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ doit être *uniforme* en $x \in D$. C'est une condition bien plus forte qui va typiquement permettre de résoudre les problèmes de régularité de la limite évoqués au paragraphe 1.1.4.

La proposition 1.2.2 montre qu'il ne faut pas complètement oublier la notion de convergence simple. Même si on souhaite montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément, il faut commencer par deviner quelle peut être la limite. Et pour cela le plus simple est souvent de commencer par étudier l'existence d'une limite simple. S'il n'y a pas de limite simple, inutile de chercher une limite uniforme. S'il y a une limite simple f, alors on peut chercher à vérifier (1.2.1) pour cette fonction f.

Remarque 1.2.3. Pour montrer qu'une suite ne converge pas uniformément, on peut utiliser une caractérisation séquentielle. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f comme précédemment. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que

$$f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Alors f_n ne tend pas uniformément vers f. En effet, il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction φ (fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\left| f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(x_{\varphi(k)}) \right| \geqslant \varepsilon.$$

Cela donne immédiatement une contradiction avec la définition de la convergence uniforme.

Exemple 1.2.4. On revient sur l'exemple 1.1.2. Alors la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f_n(2^{-\frac{1}{n}}) - f(2^{-\frac{1}{n}}) = \frac{1}{2}, \tag{1.2.3}$$

ce qui, d'après la remarque 1.2.3, prouve que f_n ne converge pas uniformément vers f. Puisque f_n ne peut pas converger uniformément vers une autre limite que sa limite simple, cela prouve que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément. On note toutefois que pour $a \in [0,1[$ la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$. En effet pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,a]$ on a

$$|f_n(x)| \leqslant a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

***Exercice* 1.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Étudier la limite éventuelle (simple et uniforme) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Dans le cas d'une suite numérique (et cela s'applique naturellement pour la convergence simple d'une suite de fonctions), on peut utiliser le critère de Cauchy pour montrer qu'une suite admet une limite sans connaître la limite en question. On a une caractérisation analogue pour la limite uniforme d'une suite de fonctions.

Proposition 1.2.5. *Soient D un ensemble et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans* K. *Alors il existe une fonction $f : D \to \mathsf{K}$ telle que f_n converge uniformément vers f si et seulement si la suite (f_n) est uniformément de Cauchy, c'est-à-dire si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,p \geqslant N, \quad \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Le sens direct est vrai pour la même raison que dans le cas d'une suite numérique. On prouve le sens indirect. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément de Cauchy. Soit $x \in D$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n,p \geqslant N$ on a

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \sup_{y\in D} |f_n(y) - f_p(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K. Elle admet donc une limite, que l'on note $f(x)$. Cela définit une fonction f de D dans K. Il reste à montrer que f_n converge uniformément vers f.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geqslant N$ et $x \in D$ on a

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Par passage à la limite $p \to +\infty$, on obtient

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $x \in D$, on a donc

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que f_n converge uniformément vers f. □

On définit de la même façon la notion de série uniformément convergente.

Définition 1.2.6. Soient D un ensemble et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge uniformément si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée.

(i) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles correspondante converge uniformément.

(ii) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes (définie par $R_n(x) = \sum_{k>n} g_n(x)$) converge uniformément (vers 0).

(iii) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est uniformément de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant n, \forall x \in D, \quad \left|\sum_{k=n}^{p} g_k(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

1.2.2 Convergence normale d'une série de fonctions

On introduit maintenant la notion de convergence normale pour une série de fonctions. L'intérêt de cette nouvelle notion est de donner une condition suffisante très utile en pratique pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Définition 1.2.7. Soient D un ensemble et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in D} |g_n(x)|.$$

(qui est une série de termes positifs) est convergente.

Remarque 1.2.8. S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \quad |g_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est normalement convergente.

Exemple 1.2.9. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^2}{1+n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

Proposition 1.2.10. *Une série normalement convergente est uniformément convergente.*

Démonstration. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ une série normalement convergente de fonctions de D dans K. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sup_{x\in D} |g_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant N$, $p \geqslant n$ et $x \in D$ on a alors

$$\left|\sum_{k=n}^{p} g_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{p} |g_k(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente. □

Remarque 1.2.11. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement alors la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

La convergence normale est donc une condition plus forte que la convergence uniforme. On ne donnera pas ici de propriétés spécifiques aux séries normalement convergentes, mais tous les résultats qu'on va donner pour les séries uniformément convergentes seront valables pour les séries normalement convergentes.

En fait, l'intérêt de la convergence normale est surtout de donner une condition suffisante, en générale plus agréable à vérifier, pour la convergence uniforme. Ainsi, si on veut montrer qu'une série est uniformément convergente, on commence par essayer de montrer qu'elle converge normalement.

On donne tout de même un exemple typique de série qui converge uniformément mais pas normalement.

Exemple 1.2.12. On revient sur l'exemple 1.1.9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}$ converge normalement.

On suppose maintenant que $\alpha \in]0,1]$. Dans ce cas, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}$ ne converge pas normalement. Comme la série est alternée, on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{(N+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(N+1)^\alpha}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}$ converge uniformément.

Même si une série peut donc être uniformément convergente sans être normalement convergente, la convergence normale reste tout de même un critère pratique très efficace pour étudier les séries de fonctions.

1.2.3 Continuité de la limite uniforme

Dans ce paragraphe on montre que contrairement à la limite simple, la convergence uniforme préserve bien la continuité.

On se donne une partie D de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ (typiquement un intervalle de $\mathbb{R}$, ou un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$).

Proposition 1.2.13. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathsf{K}$. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n tend vers une limite $\ell_n \in \mathsf{K}$ en a. Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et on a*

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Il s'agit d'un résultat d'interversion de limites, qu'on peut encore écrire sous la forme

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Démonstration. • Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geqslant N$ et $x \in D$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, pour $n \geqslant N$ il existe $\delta_n > 0$ tel que pour tout $x \in D$ vérifiant $|x - a| \leqslant \delta_n$ on a

$$|f_n(x) - \ell_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient alors $n, m \geqslant N$, $\delta = \min(\delta_n, \delta_m) > 0$ et $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$. On a

$$|\ell_n - \ell_m| \leqslant |\ell_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \ell_m| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans K. Elle admet donc une limite, qu'on note ℓ.

• Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in D$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\ell_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant \delta_n$ (où $\delta_n > 0$ est choisi comme précédemment) on a alors

$$|f(x) - \ell| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que f tend vers ℓ quand x tend vers a. □

Puisque la continuité d'une fonction n'est rien d'autre qu'une propriété sur la limite en chaque point du domaine de définition, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.2.14. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de D dans K. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathsf{K}$. Alors f est continue sur D.*

Pour une série, ce résultat prend la forme suivante.

Proposition 1.2.15 (Théorème de continuité terme à terme)**.** *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de D dans K. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge uniformément sur D. Alors sa somme est continue.*

On note $C_b^0(D,\mathsf{K})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées de D dans K (on rappelle que si D est compact alors toutes les fonctions continues sont bornées). Pour $f \in C_b^0(D,\mathsf{K})$ on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)| .$$

Proposition 1.2.16. *L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur l'espace $C_b^0(D,\mathsf{K})$ des fonctions continues de D dans K. L'espace vectoriel $C_b^0(D,\mathsf{K})$ muni de cette norme est alors un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Démonstration. On vérifie la deuxième assertion. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $C_b^0(D,\mathsf{K})$. Elle est donc uniformément de Cauchy. D'après la proposition 1.2.5, elle converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathsf{K}$. D'après la proposition 1.2.14 cette limite f est continue sur D. Enfin il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $\sup_D |f_n - f| \leqslant 1$. Comme f_n est bornée, f l'est également. D'où $f \in C_b^0(D,\mathsf{K})$. Finalement f_n converge vers f dans $C_b^0(D,\mathsf{K})$. □

1.2.4 Convergence uniforme sur les compacts

L'un des principaux intérêts de la convergence uniforme est de préserver la continuité. Or la continuité est une propriété locale. Et la convergence uniforme est une propriété globale. Ainsi, si f_n tend vers f, et si on veut montrer la continuité de f en un certain $x \in D$, on a a priori besoin d'une propriété sur les valeurs de f au voisinage de x, et pour cela on demande des informations sur les valeurs de f et f_n sur tout D. C'est sans doute une hypothèse plus forte que nécessaire.

En y réfléchissant, pour avoir la continuité de f en x, il suffit d'avoir la convergence uniforme de f_n vers f sur un voisinage de x. Et si on veut la continuité en tout x, il suffit donc d'avoir la convergence uniforme de f_n vers f au voisinage de tout x. La notion qu'on utilise est alors la suivante.

Définition 1.2.17. Soit D un invervalle de $\mathbb{R}$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans K. On dit que f_n converge vers $f : D \to \mathsf{K}$ uniformément sur les compacts si pour tout compact K de D la restriction $f_n|_K$ de f_n à K converge uniformément vers $f|_K$.

Exemple 1.2.18. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère sur $[0,1[$ la fonction $f_n : x \mapsto x^n$. Par rapport à l'exemple 1.1.2 (voir aussi l'exemple 1.2.4), on a retiré le point 1, au voisinage duquel se posait le problème pour la convergence uniforme. Néanmoins, la convergence de f_n vers 0 n'est toujours pas uniforme, puisque (1.2.3) est toujours valable.

Soit K un compact de $[0,1[$. Il existe $a \in [0,1[$ tel que $K \subset [0,a]$. et f_n converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$. Ainsi, f_n converge uniformément vers 0 sur tous les compacts de $[0,1[$.

Dans cet exemple, le fait que f_n converge uniformément sur $[0,a]$ assure que sa limite est continue sur $[0,a]$ (certes, dans ce cas simple, on le savait déjà). Soient maintenant $x \in [0,1[$ et $a \in]x,1[$. Comme la limite de f_n est continue sur $[0,a]$, elle est en particulier continue en x. Ceci étant valable pour tout x, on obtient que la limite de f_n est continue sur tout $[0,1[$, même si la convergence n'est pas uniforme sur tout $[0,1[$.

Proposition 1.2.19. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* D *dans* K*. On suppose que* f_n *converge uniformément sur les compacts vers une fonction* $f : D \to \mathsf{K}$*. Alors* f *est continue sur* D*.*

On a le même énoncé pour les séries.

Proposition 1.2.20 (Théorème de continuité terme à terme)**.** *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* D *dans* K*. On suppose que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ *converge uniformément sur tous les compacts de* D*. Alors sa somme est continue.*

Exemple 1.2.21 (Fonction Zeta de Riemann)*.* Pour $x > 1$ on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}.$$

La série est bien convergente pour tout $x > 1$ (série de Riemann). Soit $a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, +\infty[$ on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$

Or $1/n^a$ ne dépend pas de x et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$. D'après la proposition 1.2.20, cela prouve que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Exemple 1.2.22*.* Pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$g_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue. Par contre elle tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ ne converge pas normalement (ni uniformément).

Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, a]$ on a

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{a^2}{n^2}.$$

Or a^2/n^2 ne dépend pas de $x \in]0, a]$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^2}{n^2}$ converge, donc la série converge normalement sur $]0, a]$ pour tout $a > 0$. Cela assure que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Exemple 1.2.23*.* L'application $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+n}}{n^2}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

1.2.5 Intégrale de la limite uniforme

On revient dans ce paragraphe sur le passage à la limite sous une intégrale. Si une suite de fonctions continue converge uniformément sur un compact, alors la limite des intégrales est bien l'intégrale de la limite (qui est elle-même continue).

Proposition 1.2.24. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* $[a, b]$*. On suppose que* f_n *converge uniformément vers une fonction* f *sur* $[a, b]$*. Alors* f *est continue sur* $[a, b]$ *et*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. La continuité de f est conséquence de la proposition 1.2.14. Ainsi l'intégrale de f sur $[a, b]$ est bien définie. En outre on a par linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,dx \\ &\leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Ce résultat est important, mais il n'est pas suffisant. D'une part, il n'est pas du tout valable sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ (voir l'exemple 1.1.17, où la suite de fonctions considérée converge uniformément vers 0). En outre, on aura besoin de considérer des limites d'intégrales dans un cadre beaucoup plus large que pour des suites de fonctions convergeant uniformément. On revient sur cette discussion au paragraphe 1.3.

1.2.6 Dérivabilité de la limite uniforme

On observe que la convergence uniforme, si elle conserve la continuité, n'a aucune chance de conserver la dérivabilité. D'ailleurs, une suite de fonctions dérivables peut converger uniformément sans que la dérivée ne converge en aucun sens. La raison est qu'une fonction « petite », même au sens de la norme uniforme, peut être très oscillante (voir l'exemple 1.1.14).

Ceci étant dit, si on suppose de plus que la dérivée f_n' de f_n converge uniformément, alors on retrouve un bon comportement lors du passage à la limite.

Proposition 1.2.25. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 de I dans K. On suppose que*

(i) *f_n converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathsf{K}$*

(ii) *et f_n' converge uniformément vers une fonction $g : I \to \mathsf{K}$.*

Alors f est de classe C^1, $f' = g$, et f_n converge uniformément vers f sur tout compact de I.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f_n est de classe C^1 on a pour tout $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(s)\,ds.$$

Puisque f_n' converge uniformément vers g sur le segment $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$, on obtient par la proposition 1.2.24

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0) + \int_{x_0}^x g(s)\,ds.$$

Cela prouve que

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds.$$

Ainsi, f est de classe C^1, de dérivée g. Soient maintenant K un compact de I et $R > 0$ tel que $K \subset [x_0 - R, x_0 + R]$. Pour $x \in K$ on a

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} \left|f_n'(s) - g(s)\right| \, ds \right| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + |x - x_0| \left\| f_n' - g \right\|_\infty \\
&\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + R \left\| f_n' - g \right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Cette quantité ne dépend pas de $x \in I \cap [x_0 - R, x_0 + R]$ et tend vers 0 quand n tend $+\infty$. Cela prouve que f_n converge uniformément vers f sur $I \cap [x_0 - R, x_0 + R]$. ☐

Remarque 1.2.26. On observe que si f_n converge uniformément vers f et si f_n' converge simplement vers g, alors f peut ne pas être dérivable. On considère par exemple la suite définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2},$$

qui converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$.

Ce résultat peut être généralisé à des fonctions plus régulières :

Proposition 1.2.27. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^k de I dans K. On suppose que*

(i) *pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $f_n^{(j)}$ converge simplement vers une fonction $g_j : I \to \mathsf{K}$,*

(ii) *et $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers une fonction $g_k : I \to \mathsf{K}$.*

Alors g_0 est de classe C^k, on a $g_0^{(j)} = g_j$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, et $f_j^{(j)}$ converge vers g_j uniformément sur tout compact de I.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Le cas $k = 1$ est exactement la proposition 1.2.25. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ ($k \geqslant 2$). On applique la proposition 1.2.25 à la suite de fonctions $(f_n^{(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient que g_{k-1} est de classe C^1, que sa dérivée est g_k, et que $f_n^{(k-1)}$ converge uniformément sur les compacts vers g_{k-1}. Ainsi, sur chaque compact de I, la suite f_n vérifie les hypothèses de la proposition avec k remplacé par $k-1$. Par hypothèse de récurrence, cela implique que g_0 est de classe C^{k-1}, que $g_0^{(j)} = g_j$ pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, et $f_n^{(j)}$ converge uniformément sur les compacts vers g_j pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$. Comme $g_0^{(k-1)} = g_{k-1}$ est de classe C^1 de dérivée g_k, on obtient que g_0 est en fait de classe C^k et $g_0^{(k)} = g_k$. ☐

Pour les séries de fonctions, la convergence uniforme permet de dériver terme à terme.

Proposition 1.2.28 (Théorème de dérivation terme à terme)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 de I dans K. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n'$ converge uniformément sur (tous les compacts de) I. Alors sa somme est de classe C^1 et pour tout $x \in I$ on a*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n'(x).$$

En outre la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement sur tous les compacts de I.

Proposition 1.2.29. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^k de I dans K. On suppose que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^{(j)}$ converge simplement et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^{(k)}$ converge uniformément sur (tous les compacts de) I. Alors la somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ est de classe C^k et pour tous $j \in [\![1, k]\!]$ et $x \in I$ on a*

$$\frac{d^j}{dx^j} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^{(j)}(x).$$

En outre, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^{(j)}$ converge normalement sur tous les compacts de I.

Exemple 1.2.30. L'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ est bien définie et est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

***Exercice* 2.** Montrer que la fonction ζ de l'exemple 1.2.21 est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

1.2.7 Théorème de Weierstrass

On a vu au paragraphe précédent qu'une suite de fonctions régulières (dérivables, ou mieux) peut converger uniformément vers une fonction qui est continue mais pas nécessairement dérivable. Cette observation semble être un résultat négatif, mais le bon côté des choses est que, sur un segment, on va pouvoir approcher uniformément toute fonction continue par une suite de fonctions très régulières, à savoir les fonctions polynomiales (on note qu'un tel résultat ne peut évidemment pas être vrai sur un intervalle qui ne serait pas un segment).

Théorème 1.2.31. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f.*

Preuve par convolution. • On prolonge f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[a-1, b+1]$. On note $R = b - a + 1$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in [-R, R]$ on pose

$$\rho_n(y) = \frac{(R^2 - y^2)^n}{a_n}, \quad \text{où} \quad a_n = \int_{-R}^{R} (R^2 - t^2)^n \, dt.$$

Ainsi ρ_n est une fonction à valeurs positives sur $[-R, R]$ et $\int_{-R}^{R} \rho_n(y)\, dy = 1$. En outre on a

$$a_n = 2\int_0^R (R^2 - t^2)^n \, dt \geqslant \int_0^R \frac{2t(R^2 - t^2)^n}{R} \, dt = \left[-\frac{(R^2 - t^2)^{n+1}}{(n+1)R} \right]_0^R = \frac{R^{2n+1}}{n+1},$$

donc pour $\eta \in]0, R[$

$$\int_{\eta \leqslant |y| \leqslant R} \rho_n(y)\, dy \leqslant \frac{2R(R^2 - \eta^2)^n}{a_n} = 2(n+1)\left(\frac{R^2 - \eta^2}{R^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(NB : cela prouve que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de la masse de Dirac.)

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$ on pose

$$P_n(x) = \int_{-R}^{R} \rho_n(y)\tilde{f}(x-y)\,dy$$

(NB : c'est le produit de convolution de $\tilde{f}$ avec ρ_n). On a également

$$P_n(x) = \int_{x-R}^{x+R} \tilde{f}(s)\rho_n(x-s)\,ds = \int_{a-1}^{b+1} \tilde{f}(s)\rho_n(x-s)\,ds.$$

Il existe des fonctions polynomiales $q_0, \dots, q_{2n}$ telles que pour tous $x \in [a,b]$ et $s \in [a-1, b+1]$ on a

$$\rho_n(x-s) = \sum_{k=0}^{2n} q_k(s)x^k.$$

Cela donne

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{a-1}^{b+1} \tilde{f}(s)q_k(s)\,ds \right) x^k,$$

et prouve que P_n est une fonction polynomiale.
- Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un compact, elle est uniformément continue, donc il existe $\eta \in]0, R]$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x_1 - x_2| \leqslant \eta$ on a $\left|\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part $\tilde{f}$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\left|\tilde{f}(x)\right| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Enfin, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$\int_{\eta \leqslant |x| \leqslant R} \rho_n(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Pour $n \geqslant N$ et $x \in [a,b]$ on a alors

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-R}^{R} \rho_n(y)\big(\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big)\,dy \right| \\
&\leqslant \int_{-R}^{R} \rho_n(y)\big|\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big|\,dy \\
&\leqslant \int_{0 \leqslant |y| \leqslant \eta} \rho_n(y)\big|\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big|\,dy + \int_{\eta < |y| \leqslant R} \rho_n(y)\big|\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big|\,dy \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{0 \leqslant |y| \leqslant \eta} \rho_n(y)\,dy + 2M \int_{\eta < |y| \leqslant R} \rho_n(y)\,dy \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela prouve que P_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$. □

1.3 Passage à la limite sous l'intégrale

On a vu aux paragraphes précédents que les notions naturelles de convergence d'une suite ou d'une série ne sont pas bien adaptées au calcul intégral. Une suite de fonctions intégrables peut converger vers une fonction qui n'est pas intégrable, et quand bien même ce serait le cas, l'intégrale de la limite n'est pas nécessairement la limite de la suite des intégrales. Les contre-exemples simples du paragraphe 1.1.5 montrent que ces désagréments sont en fait inévitables. L'intégration au sens de Lebesgue, qui sera détaillée dans un autre cours, offre tout de même un cadre plutôt agréable pour les théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale. Il en résulte de bonnes propriétés d'espaces fonctionnels (espaces de Banach, voire de Hilbert) pour les espaces de Lebesgue, ce qui est crucial en analyse.

Pour ces rapides rappels, on se contente de considérer des fonctions sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (borné ou non), muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1.3.1 Théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale

Les fonctions pour lesquelles on peut espérer définir l'intégrale au sens de Lebesgue sont les fonctions mesurables. En particulier, les fonctions Riemann intégrables sont mesurables. En fait, cette notion de mesurabilité est si souple qu'elle est préservée par passage à la limite simple, ce qui n'est pas le cas pour les notions de continuité, de continuité par morceaux, ou d'intégrabilité au sens de Riemann.

Proposition 1.3.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de I dans K, convergeant simplement vers une fonction f de I dans K. Alors f est mesurable.*

On construit alors une intégrale pour toute fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$, puis pour toutes les fonctions f mesurables telles que l'intégrale de $|f|$ est finie (on dit alors que f est intégrable). En cumulant la théorie de la mesure et la construction de l'intégrale, l'investissement pour accéder à l'intégrale de Lebesgue est plus lourd que si on considère simplement l'intégrale des fonctions continues par morceaux ou même des fonctions Riemann intégrables générales. Mais les bonnes propriétés vis-à-vis du passage à la limite rendent cet investissement plus que rentable. Le point culminant d'un cours d'intégration de Lebesgue est le théorème de convergence dominée.

Théorème 1.3.2 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de I dans K. On suppose que f_n converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathsf{K}$ et qu'il existe une fonction intégrable g de I dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ on a*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x).$$

Alors f et les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I et on a

$$\int_I f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)\,dx.$$

Le théorème de convergence monotone, que l'on énonce maintenant, est très utile pour la construction de l'intégrale et rend encore bien service pour les applications. En particulier, contrairement au théorème de convergence dominée, il peut produire des limites infinies.

Théorème 1.3.3 (Théorème de convergence monotone ou Théorème de Beppo-Levi)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables de I dans $[0, +\infty]$. On note $f : I \to [0, +\infty]$ la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors f est mesurable sur I et*

$$\int_I f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)\,dx.$$

On donne des analogues de ces deux théorèmes pour des séries. Cela donne des résultats d'interversion somme-intégrale. Si on voit une série comme une intégrale sur $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, ces résultats sont également des cas particuliers des théorèmes de Fubini.

Théorème 1.3.4. *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de I dans $\mathbb{R}_+$. Alors on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I g_n(x)\,dx = \int_I \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)\,dx.$$

Dans ce théorème, il s'agit d'une égalité dans $[0,+\infty]$. Puisque les fonctions g_n sont à valeurs positives, on peut considérer les intégrales ou les sommes comme égales à $+\infty$ lorsqu'elles ne sont pas convergentes. Ce n'est plus le cas pour des fonctions de signes variables (ou à valeurs complexes). Dans le théorème suivant on a donc besoin d'une hypothèse assurant que toutes les quantités qui apparaissent dans l'égalité sont bien finies. Comme toujours dans ce genre de contexte, l'hypothèse porte sur la valeurs absolue (le module) de g_n et se vérifie en appliquant le résultat précédent pour les fonctions à valeurs positives.

Théorème 1.3.5. *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de I dans K. On suppose que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |g_n(x)|\;dx < +\infty.$$

Alors on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I g_n(x)\,dx = \int_I \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)\,dx.$$

Bien sûr, on peut montrer des versions plus faibles de ces résultats pour moins cher, mais une fois qu'on dispose de la théorie de Lebesgue, qui est de toutes façons indispensable pour avoir de bons espaces de fonctions intégrables, autant l'utiliser.

1.3.2 Convergence en norme L^p

L'un des intérêts majeurs du bon comportement de l'intégrale de Lebesgue vis-à-vis du passage à la limite est que l'espace des fonctions intégrables est finalement un bon espace, dans lequel on peut appliquer simplement de nombreux résultats d'analyse fonctionnelle. L'intérêt d'avoir généralisé la notion d'intégrale à des fonctions toujours plus compliquées peut être résumé de la façon suivante. Pour de nombreux problèmes, typiquement des équations aux dérivées partielles, quand bien même le problème ne ferait intervenir que des fonctions suffisamment régulières (ce qui n'est pas toujours le cas...), il est plus simple d'énoncer le problème dans un gros espace de fonctions plus générales, dans lequel on pourra résoudre le problème (montrer l'existence d'une solution, l'unicité, etc.). Il sera alors temps de se demander ensuite si la solution obtenue dans un espace très général n'est pas en fait plus régulière. Et, aussi surprenant que cela puisse paraître, c'est bien plus simple de procéder ainsi que d'essayer de traiter le problème directement dans un espace de fonctions régulières.

Souvent on travaille dans des espaces construits à partir des espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Si f est une fonction mesurable de I dans $\mathbb{C}$ on pose, pour $p \in [1,+\infty[$,

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p\;dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = +\infty$

$$\|f\|_\infty = \inf \{\rho \geqslant 0, |f(x)| \leqslant \rho \text{ pour presque tout } x \in I\}.$$

On note alors $L^p(I)$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_p < +\infty$, quotienté par la relation d'égalité presque partout.

Travailler dans l'un des espaces L^p est agréable pour la raison suivante :

Théorème 1.3.6. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors l'espace $L^p(I)$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$, est un espace de Banach.*

Ce n'est pas l'objet de ces notes d'étudier plus en détails les espaces de Lebesgue. On observe simplement que chacune de ces normes définit une nouvelle notion de convergence pour des suites de fonctions (mis à part la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$, qui ressemble très fortement à la convergence uniforme, si ce n'est qu'elle s'applique à des classes d'équivalence de fonctions plutôt qu'à de vraies fonctions, et que le supremum est remplacé par un supremum essentiel). Les exemples suivants montrent que ce sont des notions de convergence toutes différentes, par ailleurs différentes des notions déjà introduites. Il y a tout de même quelques résultats qui permettent d'obtenir des résultats sur la convergence en un sens à partir d'une hypothèse sur la convergence en un autre sens.

Exemple 1.3.7. Soit $p \in [1, +\infty[$. Il existe des suites de fonctions sur $\mathbb{R}$ qui convergent simplement mais qui ne convergent pas dans L^p. Voir par exemple les exemples 1.1.15, 1.1.16 et 1.1.17 avec $p = 1$. Il existe également des suites de fonctions qui convergent dans L^p mais qui ne convergent pas simplement. On considère par exemple la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la façon suivante. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $N_k = 1 + 2 + \cdots + k$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_k \leqslant n < N_{k+1}$. On pose alors

$$f_n = \mathbb{1}_{[\frac{n-N_k}{k}, \frac{n-N_k+1}{k}[}.$$

On a alors

$$\|f_n\|_p = k^{-\frac{1}{p}}.$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans L^p. Par contre elle n'a pas de limite ponctuelle puisque pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe $n_1, n_2 \in [\![N_k, N_{k+1} - 1]\!]$ tels que $f_{n_1}(x) = 0$ et $f_{n_2}(x) = 1$.

On a tout de même le résultat suivant, qui s'avère bien utile en pratique. En particulier, si une suite admet une limite simple et une limite dans L^p, alors les deux limites coïncident (presque partout).

Proposition 1.3.8. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant dans L^p vers une fonction f. Alors il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ telle que f_{n_k} converge simplement vers f.*

Évidemment, cette dernière discussion n'a pas lieu d'être pour $p = +\infty$, une suite qui converge dans L^∞ converge en particulier simplement presque partout.

Pour $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p \neq q$ on peut construire des exemples de suites de fonctions qui convergent dans L^p mais pas dans L^q, et inversement (on peut par exemple adapter les exemples 1.1.16 et 1.1.17 en multipliant la fonction f_n par une constante c_n bien choisie).

Sur un intervalle borné on a tout de même le résultat suivant.

Proposition 1.3.9. *Soit I un intervalle bornée de $\mathbb{R}$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p \leqslant q$. Alors $L^q(I) \subset L^p(I)$ avec inclusion continue. En particulier, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge dans $L^q(I)$, alors elle converge également dans $L^p(I)$ avec la même limite.*

On peut également considérer les espaces de Lebesgue de suites. Cela correspond à considérer sur $\mathbb{N}$ la mesure de comptage. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K on note pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\|u\|_{\ell^p(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $p = +\infty$ on pose

$$\|u\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Les inclusions sont alors renversées par rapport à celles de la proposition 1.3.9.

Proposition 1.3.10. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p \leqslant q$. Alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ avec inclusion continue. En particulier, si $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite (de suites) qui converge dans $\ell^p(\mathbb{N})$, alors elle converge également dans $\ell^q(\mathbb{N})$ avec la même limite.*