Chapitre 4

Distributions

Le but de ce chapitre est d'introduire les distributions. Les distributions généralisent la notion de fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Il s'agit en particulier d'étendre la notion usuelle de dérivabilité, qui s'avère trop rigide en pratique.

Les notions de fonctions (on se restreint ici aux fonction d'une ou plusieurs variables réelles) et de régularité de ces fonctions (continuité, etc.) ont mis du temps pour se stabiliser aux notions précises et générales telles qu'on les comprend aujourd'hui. Par exemple, une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est n'importe quelle correspondance qui à tout élément $x \in \mathbb{R}^3$ associe un unique élément $f(x)$ de $\mathbb{R}$. C'est une notion déjà très abstraite et très générale.

Et pourtant, cette notion montre des limites et n'est pas toujours adaptée aux calculs que l'on peut avoir à faire. Typiquement, lorsque f représente une quantité physique en fonctions de la position x. Par exemple, si f désigne une densité massique ou une densité électrique, et si on s'intéresse à une masse ou une charge très localisée, on la modélise par une masse ou une charge ponctuelle. Cela simplifie grandement les calculs, mais la densité f... n'est plus une fonction. En effet, dans ce cas la densité est ce qu'on appelle de façon impropre une « fonction de Dirac », nulle en dehors d'un point mais d'intégrale strictement positive. Ce qui ne peut être réalisé par aucune fonction. Ainsi, pour faire un calcul plus simple, on doit utiliser un objet qui semble plus compliqué. Alors que faut-il faire ? Renoncer à faire des calculs rigoureux, ou renoncer à un modèle avec lequel on peut effectivement faire les calculs ? Ni l'un ni l'autre évidemment, et c'est le but des distributions de proposer un cadre rigoureux, efficace et suffisament général pour inclure en particulier les fonctions au sens usuel et la fonction de Dirac. En fait on a déjà résolu ce problème en introduisant les mesures, puisque la fonction de Dirac a été remplacée par la mesure de Dirac. Mais les distributions vont plus loin et incluront en particulier les mesures.

Un autre aspect pour lequel la théorie usuelle des fonctions paraît trop restrictive par rapport aux calculs qu'on aimerait pouvoir faire est la notion de dérivée. Considérons par exemple une équation au dérivées partielles simple, à savoir le problème de transport

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \tag{4.1}$$

avec une condition initiale donnée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{4.2}$$

L'étude de ce type de problème viendra plus tard, mais une question importante avant de s'attaquer à une quelconque résolution est de se demander dans quel ensemble on travaille. Dans quel espace choisit-on la donnée initiale u_0 ? Et dans quelle espace cherche-t-on la solution u ? Un choix qui semble naturel est de chercher u dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ et donc de considérer u_0 dans $C^1(\mathbb{R})$. On peut alors vérifier que l'unique solution du problème est donnée par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t,x) = u_0(x-t). \tag{4.3}$$

Et maintenant, que se passe-t-il si on considère une donnée initiale u_0 qui n'est pas dérivable ? On peut toujours définir u par (4.3), physiquement elle va faire exactement la même chose (translation du profil u_0 vers la droite quand t grandit), mais par contre u n'est plus dérivable et on ne peut plus la réinjecter dans (4.1). Quel est le problème ? Faut-il exclure une telle solution, qui semble physiquement raisonnable mais qui n'est pas solution du problème tel qu'on l'a posé, ou faut-il repenser la façon de poser le problème ?

Commme pour la fonction de Dirac via les suites d'approximation de l'unité, on pourrait approcher en un sens convenable une fonction irrégulière par une suite de fonctions régulières. Mais il est plus facile de faire des calculs avec un Dirac qu'avec une suite d'approximation de l'unité, et il en sera de même pour les fonctions que l'on qualifiera de « dérivables au sens des distributions ». Ainsi il est bien pertinent d'introduire ces nouveaux espaces de « fonctions ».

Le changement de point de vue sur les fonctions qui amène à la définition des distributions est le suivant. Plutôt que de caractériser une fonction sur $\mathbb{R}$ (par exemple) en évaluant sa valeur en chaque point $x \in \mathbb{R}$, on la caractérise en calculant toutes ses moyennes pondérées par une fonction à support compact. Autrement dit, plutôt que de s'intéresser à tous les $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, on va s'intéresser à tous les $\int_{\mathbb{R}} f(s)\phi(s)\,ds$ pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

La caractérisation d'une fonction par sa valeur en chaque point avait déjà été mise à mal en intégration, où l'on a commencé à considérer que deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un point doivent être considérées comme égales.

Cette nouvelle approche n'est pas un simple artifice mathématique. Au contraire, elle est plutôt naturelle si on y regarde de plus près. Ou d'un peu moins près justement. Considérons par exemple une fonction θ qui décrit la température d'un fil infini. Quel sens cela a-t-il de parler de la température en un point précis ? La température mesure le degré d'agitation de particules. Quel sens cela aurait-il de mesurer la température avec une précision plus importante que la distance typique parcourue par chaque particule ? Et quand bien même cela aurait un sens, aucun appareil ne pourrait la mesurer avec une précision infinie. Ce que mesure un thermomètre, dans le meilleur des cas, et une moyenne de la température sur une petite zone autour de chaque point x. En considérant que la fonction θ a un sens, ce que mesure n'est pas la valeur $\theta(x)$, mais bien une quantité de la forme

$$\int \theta(x)\phi(x)\,dx,$$

où ϕ est une fonction qui décrit la pondération avec laquelle la moyenne est obtenue. On appelera ϕ la fonction test, car elle sert à évaluer la quantité qui nous intéresse.

Par ailleurs, ce point de vue correspond parfaitement à ce qu'on veut faire avec la fonction de Dirac δ sur $\mathbb{R}$. Le but de δ est d'avoir une fonction telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\,dx = \phi(0), \tag{4.4}$$

pour toute fonction test ϕ. Plutôt que d'essayer de donner une explication douteuse au membre de gauche, on renonce à voir δ comme une fonction usuelle en lui attribuant des valeurs en chaque point de $\mathbb{R}$ et on *définit* directement la *distribution* δ comme étant l'application qui à la fonction test ϕ associe $\phi(0)$. Et c'est en fait bien plus simple !

Dans le même esprit, on pourra définir une notion plus faible de solution pour un problème tel que (4.1). On dira que u est une solution faible de (4.1) si

$$\forall \phi \in C^1(\mathbb{R}^2), \qquad \int_{\mathbb{R}^2} u(t,x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) \right) dt\,dx = 0,$$

avec la condition initiale (4.2). Ainsi u peut être solution sans être dérivable au sens usuel. On dira que u est une solution forte de (4.1) sur $\mathbb{R}^2$ si c'est une solution au sens précédent, c'est-à-dire si u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (4.1). Avec une intégration par parties, on s'assure qu'une solution forte est une solution faible, et qu'ainsi la notion de solution faible est bien une généralisation de la notion de solution pour (4.1). Définir la dérivation au sens faible via une intégration par parties sera précisément le cœur de la nouvelle notion de dérivée à venir.

Le but de ce chapitre est de donner un cadre mathématique à toutes ces idées, en définissant en particulier la dérivation au sens des distributions. Les équations différentielles seront discutées ultérieurement dans un autre cours.

4.1 Définitions

On introduit dans ce paragraphe la notion de distribution. On fait le choix dans ces notes de regrouper tous les exemples dans la Section 4.2. L'inconvénient de ce choix est que les définitions seront données ici sans exemple, ce qui peut évidemment paraître un peu aride. Ainsi, il ne faut pas hésiter à lire la Section 4.2 en parallèle de celle-ci. En particulier, c'est dans le Paragraphe 4.2.1 qu'on verra que les fonctions s'identifient à des exemples de distributions, et qu'en ce sens la notion de distribution « inclut » bien en un sens convenable celle de fonction.

4.1.1 Espace des fonctions tests

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On commence par collecter quelques propriétés dont on aura besoin par la suite pour l'espace des fonctions tests $C_0^\infty(\Omega)$.

On rappelle que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ (voir la Proposition 1.18). On a également montré un resultat de partition de l'unité avec des fonctions de troncature de classe C^∞ (voir la Proposition 1.22).

Les propriétés suivantes de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ sont élémentaires et les preuves sont laissées en exercice.

Proposition 4.1. (i) *$C_0^\infty(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.*

(ii) *Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $f\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

(iii) *Si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ alors $\partial^\alpha \phi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

(iv) *Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on pose*

$$\widetilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Alors on a $\widetilde{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On rappelle maintenant la formule de Leibniz pour les fonctions de classe C^∞. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ dans $\mathbb{N}^d$ on dit que $\beta \leqslant \alpha$ si $\beta_j \leqslant \alpha_j$ pour tout $j \in [\![1, d]\!]$. On note alors

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \text{où} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!.$$

Proposition 4.2 (Formule de Leibniz)**.** *Soient $u, v \in C^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors on a*

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} u \, \partial^\beta v.$$

La preuve se fait par récurrence sur $|\alpha|$ comme pour le cas $d = 1$ (exercice).

4.1.2 Topologies sur les espaces de fonctions régulières à supports compacts

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Le but de ce paragraphe est de décrire les topologies des espaces de fonctions régulières et à support compact sur Ω, et en particulier $C_0^\infty(\Omega)$.

On commence par une situation plus simple. Soient K un compact de Ω et $k \in \mathbb{N}$. On note $C_K^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur Ω à support inclus dans K. Pour $u \in C_K^k(\Omega)$ on pose alors

$$\|\phi\|_{C_K^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(K)} . \tag{4.5}$$

Cela définit une norme sur $C_K^k(\Omega)$, et $C_K^k(\Omega)$ est complet pour cette norme. Jusqu'ici tout va bien.

La situation n'est pas aussi simple pour l'espace $C_K^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ sur Ω et à support dans K. Évidemment, on ne peut pas simplement remplacer k par $+\infty$ dans la définition (4.5). Chacune des normes (4.5) pour $k \in \mathbb{N}$ est une norme sur $C_K^\infty(\Omega)$, mais $C_K^\infty(\Omega)$ n'est complet pour aucune de ces normes (une suite de fonctions très régulières peut converger vers une limite qui ne l'est pas autant). Pour avoir un espace complet, il faut une topologie qui prenne en compte toutes les dérivées. Aucune norme sur $C_K^\infty(\Omega)$ ne fait ça, mais on peut munir $C_K^\infty(\Omega)$ d'une structure d'espace de Fréchet à partir de toutes les normes (4.5), pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $\phi, \psi \in C_K^\infty(\Omega)$ on pose

$$d_K(\phi, \psi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \min\left(1, \|\phi - \psi\|_{C_K^k(\Omega)}\right). \tag{4.6}$$

Cette distance n'est pas issue d'une norme, mais elle vérifie tout de même la propriété essentielle dont on a besoin en pratique.

Proposition 4.3. *d_K est une distance sur $C_K^\infty(\Omega)$, et $C_K^\infty(\Omega)$ est complet pour cette distance.*

On rappelle les propriétés de base de la topologie associée à la métrique d_K.

Proposition 4.4. (i) *Soient $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_K^\infty(\Omega)$ et $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$. Alors ϕ_n tend vers ϕ dans $C_K^\infty(\Omega)$ si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\phi_n - \phi\|_{C_K^k(\Omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(ii) *Une forme linéaire T sur $C_K^\infty(\Omega)$ est continue si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a*

$$|T(\phi)| \leqslant C \|\phi\|_{C_K^k(\Omega)}.$$

Plus généralement, si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé, alors une application linéaire $T : C_K^\infty(\Omega) \to E$ est continue s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a

$$\|T(\phi)\|_E \leqslant C \|\phi\|_{C_K^\infty(\Omega)}.$$

(iii) *Une application linéaire $T : C_K^\infty(\Omega) \to C_K^\infty(\Omega)$ est continue si pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a*

$$\|T(\phi)\|_{C_K^j(\Omega)} \leqslant C \|\phi\|_{C_K^k(\Omega)}.$$

On s'intéresse maintenant à $C_0^\infty(\Omega)$. La différence par rapport à $C_K^\infty(\Omega)$ est que les fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ ne sont pas toute à support inclus dans un même compact. On note en particulier que $C_K^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$ pour tout compact K de Ω. Par contre il n'existe aucun compact K de Ω tel que $C_0^\infty(\Omega)$ soit inclus dans $C_K^\infty(\Omega)$.

On ne peut pas munir $C_0^\infty(\Omega)$ d'une distance analogue à (4.6) avec des normes analogues à (4.5) où K serait remplacé par Ω, car pour la topologie correspondante une suite de fonctions à supports compacts dans Ω pourrait converger vers une fonction dont le support est tout Ω.

Pour s'assurer que la limite d'une suite convergente est bien à support compact, il faut une topologie telle que si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $C_0^\infty(\Omega)$ alors les supports de toutes les fonctions ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, sont inclus dans un compact commun K de Ω. Une fois ceci fait, pour assurer également la régularité de la limite, il faut encore imposer que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $C_K^\infty(\Omega)$ (cela a maintenant un sens, puisque toutes les fonctions ϕ_n de la suite considérée sont bien dans $C_K^\infty(\Omega)$).

La topologie qui vérifie toutes ces contraintes est compliquée, mais elle a le mérite d'exister. On admet le théorème suivant.

Théorème 4.5. *Il existe une topologie sur $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ converge vers $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si et seulement si*
- *il existe un compact K de Ω tel que $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- *$\partial^\alpha \phi_n$ tend uniformément vers $\partial^\alpha \phi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$.*

(ii) *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est continue si et seulement pour tout compact K de Ω il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall \phi \in C_K^\infty(\Omega), \quad |T(\phi)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty. \tag{4.7}$$

4.1.3 Distributions

Maintenant que l'on a décrit la topologie de l'espace des fonctions test $C_0^\infty(\Omega)$, on peut définir la notion de distribution.

Définition 4.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On appelle distribution sur Ω une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\Omega)$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

En général, on note $\langle T, \phi \rangle$ ou $\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$ plutôt que $T(\phi)$ pour l'image de la fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ par la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

On donnera de nombreux exemples de distributions à la Section 4.2 (ils peuvent être consultés dès maintenant).

En tant qu'ensemble des formes linéaires continues sur un espace vectoriel topologique, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est lui-même naturellement muni d'un structure d'espace vectoriel topologique. Ainsi si T et S sont deux distributions, la somme $T + S$ est définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle T + S, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle + \langle S, \phi \rangle ,$$

et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on définit λT par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle \lambda T, \phi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle .$$

On peut vérifier que $T + S$ et λS ainsi définies sont bien des distributions sur Ω et que $\mathcal{D}'(\Omega)$ muni de ces deux opérations est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit ensuite $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topologie faible-$*$.

Définition 4.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que T_n tend vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle T_n, \phi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \phi \rangle .$$

Grâce au théorème de Banach-Steinhaus on a le résultat suivant :

Proposition 4.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On suppose que pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$ la suite numérique $(\langle T_n, \phi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

4.1.4 Distributions d'ordres finis

Parmi les distributions, on distingue celles pour lesquelles le choix de m dans (4.7) ne dépend pas du compact K (la constante C peut elle dépendre de K dans la définition qui suit).

Définition 4.9. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution sur Ω. Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à m si pour tout compact K de Ω il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \phi \in C_K^\infty(\Omega), \quad |T(\phi)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty .$$

S'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que cette propriété est vérifiée on dit que T est d'ordre fini, et l'ordre de T est le plus petit entier qui convient. Dans le cas contraire, on dit que T est une distribution d'ordre infini.

On verra à la Section 4.2 que beaucoup de distributions usuelles sont en fait d'ordres finis.

Remarque 4.10 (Cette remarque peut être omise). Si T est une distribution d'ordre $m \in \mathbb{N}$ sur Ω, on n'a besoin de contrôler qu'un nombre fini de dérivées pour assurer que si ϕ_n tend vers ϕ alors $T(\phi_n)$ tend vers $T(\phi)$. Ainsi, une distribution d'ordre m peut être vue comme une forme linéaire continue sur l'espace $C_0^m(\Omega)$ des fonctions de classe C^m sur Ω et à supports compacts. Plus précisément, munissons $C_0^m(\Omega)$ d'une topologie analogue à celle décrite par le Théorème 4.5, c'est-à-dire telle qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^m(\Omega)$ tend vers $\phi \in C_0^m(\Omega)$ si et seulement si

(i) il existe un compact K de Ω tel que $\text{supp}(\phi_n) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\partial^\alpha \phi_n$ tend uniformément vers $\partial^\alpha \phi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant m$.

On peut alors vérifier que toute distribution d'ordre m sur Ω s'étend en une forme linéaire continue sur $C_0^m(\Omega)$ et qu'inversement, une forme linéaire continue sur $C_0^m(\Omega)$ définit par restriction à $C_0^\infty(\Omega)$ une distribution d'ordre m sur Ω.

4.1.5 Multiplication d'une distribution par une fonction régulière

Le but des distributions est de généraliser la notion de fonction. Pour que cela soit utile, il faudra pouvoir généraliser à ce cadre et en un sens convenable les opérations que l'on effectue habituellement sur les fonctions. On a déjà vu qu'on pouvait naturellement additionner des distributions et les multiplier par un scalaire. Pour aller plus loin, le mécanisme sera essentiellement toujours le même. On reporte l'opération en question sur la fonction test. Il faut en particulier que l'opération en question préserve l'espace des fonctions tests $C_0^\infty(\Omega)$. On illustre cette idée sur un premier exemple, la multiplication par une fonction régulière.

Proposition-Définition 4.11. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution sur Ω. Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. Pour $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on pose

$$\langle fT, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle .$$

Cela définit une distribution fT sur Ω.

Il y a deux choses à vérifier pour valider cette définition. D'une part il faut que l'expression $\langle T, f\phi\rangle$ ait bien un sens, et pour cela il faut que $f\phi$ soit un élément de $C_0^\infty(\Omega)$. C'est évident ici, mais ce ne sera pas toujours le cas. Et il faut ensuite montrer que l'application $\phi \mapsto \langle T, f\phi\rangle = T(f\phi)$ est bien une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\Omega)$. Et en général c'est la continuité qui n'est pas évidente.

Démonstration. L'application $\phi \mapsto f\phi$ est une application linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$, donc par composition fT est bien une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$. Soit K un compact de Ω. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty .$$

La fonction f et ses dérivées sont bornées sur le compact K. Par la règle de Leibniz on a

$$|\langle T, f\phi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha (f\phi)\|_\infty \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\|\partial^{\alpha-\beta} f\right\|_{L^\infty(K)} \left\|\partial^\beta \phi\right\|.$$

Ainsi, il existe une constante $\tilde{C} > 0$ indépendante de ϕ telle que

$$|\langle T, f\phi \rangle| \leqslant \tilde{C} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty .$$

Cela prouve que fT est continue sur $C_0^\infty(\Omega)$. □

Remarque 4.12. On observe que si T est d'ordre $m \in \mathbb{N}$ alors fT est d'ordre inférieur ou égal à m. En effet, dans ce cas, l'entier m ne dépend pas de K dans les calculs de la preuve précédente, et la dernière inégalité montre que fT est d'ordre inférieur ou égal à m. En fait, si f n'est pas identiquement nulle, fT est exactement du même ordre que T.

Remarque 4.13. Étant donnée $f \in C^\infty(\Omega)$ l'application $T \mapsto fT$ est continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$. Autrement dit, si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (au sens de la Définition 4.7), alors fT_n converge vers fT dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Une remarque importante pour finir ce paragraphe. Il n'y a pas de définition raisonnable pour le produit de deux distributions générales ! On oublie immédiatement cette idée.

4.2 Exemples importants de distributions

On donne dans cette section un certain nombre d'exemples de distributions que l'on utilise souvent en pratique. D'autres exemples apparaîtront ensuite dans les exercices.

4.2.1 Fonctions localement intégrables

L'une des motivations pour introduire la notion de distribution est qu'elle doit généraliser la notion de fonction. Il faut donc que l'ensemble des distributions « contienne » l'ensemble des fonctions en un sens raisonnable. On a dit en introduction qu'on pouvait remplacer l'évaluation d'une fonction f en chaque point de Ω par l'évaluation de moyenne pondérées de la forme

$$\int_\Omega f\phi \, dx.$$

Cela définit précisément une distribution, et c'est effectivement à cette distribution que l'on va identifier la fonction f. Pour que tout cela ait bien en sens il faut tout de même se restreindre au cas des fonctions localement intégrables. La contrainte est raisonnable.

Proposition-Définition 4.14. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors l'application

$$T_f : \phi \mapsto \int_\Omega f(x)\phi(x) \, dx$$

est une distribution sur Ω.

Démonstration. L'application T_f est bien définie, et elle est linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ par linéarité de l'intégrale. Soit K un compact de Ω. Alors f est intégrable sur K et pour $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a

$$\left| \int_\Omega f\phi \right| \leqslant \|\phi\|_\infty \int_K |f(x)| \, dx.$$

Cela prouve que T_f est bien une distribution sur Ω. □

On remarque que T_f est toujours une distribution d'ordre 0. D'autre part, on rappelle qu'on ne peut pas multiplier deux distributions, et d'ailleurs le produit de deux fonctions localement intégrables n'est pas nécessairement localement intégrable. Mais on peut multiplier une fonction localement intégrable par une fonction régulière, et on a par ailleurs défini le produit d'une distribution par une fonction régulière. On vérifie que dans le cas d'une distribution associée à une fonction, ces deux multiplications coïncident. Plus précisément, pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $g \in C^\infty(\Omega)$ on a

$$gT_f = T_{gf}.$$

En effet, pour toute fonction test $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\langle gT_f, \phi \rangle = \langle T_f, g\phi \rangle = \int_\Omega f(g\phi)\,dx = \int_\Omega (gf)\phi\,dx = \langle T_{gf}, \phi \rangle\,.$$

On a dit qu'on souhaitait identifier les fonctions (localement intégrables) à des distributions. Pour cela, il faut s'assurer que deux fonctions différentes ne sont pas associées à la même distribution. Cela signifie qu'on ne perd pas d'information en considérant l'ensemble des « moyennes pondérées » de f plutôt qu'en regardant l'ensemble de ses valeurs à égalité presque partout près (il est clair que si f et g sont deux fonctions localement intégrables égales presque partout sur Ω on aura $T_f = T_g$).

Proposition 4.15. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'application*

$$\begin{cases} L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto & T_f \end{cases}$$

est injective.

Démonstration. On suppose que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est telle que $\int_\Omega f\phi = 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Soit (K_n) une suite de compacts telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $A_n = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leqslant n\}$. Alors $\overline{f}\mathbb{1}_{A_n \cap K_n} \in L^2(\Omega)$. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers $\overline{f}\mathbb{1}_{A_N \cap K_n}$ dans $L^2(\Omega)$. Alors on a

$$0 = \int_\Omega f\phi_n\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{A_N\cap K_n} |f(x)|^2\,dx.$$

Cela prouve que $f = 0$ presque partout dans $A_n \cap K_n$. Ceci étant valable pour tout n, $f = 0$ presque partout dans Ω. $\square$

Démonstration. On suppose que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est telle que $\int_\Omega f\phi = 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Soient K un compact de Ω, $\chi_K \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K et $f_K = f\chi_K$. Alors f_K est intégrable sur Ω, et on peut la voir comme une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ en la prolongeant par 0 en dehors de Ω.

On considère alors une suite d'approximation de l'unité $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme la fonction $y \mapsto \chi_K(y)\rho_n(x-y)$ est dans $C_0^\infty(\Omega)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$(f_K * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\chi_K(y)\rho_n(x-y)\,dy = 0.$$

D'autre part,

$$\|(f_K * \rho_n) - f_K\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela prouve que $\|f_K\|_{L^1} = 0$ et donc que $f_K = 0$ presque partout sur K. Comme Ω est union dénombrable de compacts, on en déduit que $f = 0$ presque partout. $\square$

Avec l'habitude, on identifie souvent une distribution de la forme T_f avec la fonction f correspondante. D'ailleurs, on pourra dire qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (ou dans $L^p(\Omega)$ pour un certain $p \in [1, +\infty]$) s'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(f \in L^p(\Omega))$ telle que $T = T_f$.

4.2.2 Masse de Dirac et autres mesures

L'exemple typique d'objet que l'on voudrait manipuler comme une fonction mais qui n'en est pas une est la « fonction de Dirac », déjà évoquée en introduction. Ce qu'on entend habituellement par fonction de Dirac sur $\mathbb{R}^d$ serait une fonction à valeurs positives, nulle en dehors de $\{0\}$ et d'intégrale égale à 1. Une telle fonction ne peut exister, puisque la définition de l'intégrale impose en particulier qu'une fonction nulle presque partout sur $\mathbb{R}^d$ a une intégrale nulle.

Comme on l'a dit, le but d'une telle définition est d'avoir une fonction f qui vérifierait

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f\phi = \phi(0). \tag{4.8}$$

Non seulement la fonction de Dirac telle qu'on l'a décrite n'existe pas, mais il n'y a pas d'autre fonction qui pourrait donner ce résultat.

Proposition 4.16. *Il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant* (4.8).

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant (4.8). Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ à support dans la boule $B(0,1)$ et telle que $\phi(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose $\phi_n(x) = \phi(nx)$. Alors ϕ_n est à valeurs dans $[0,1]$ et à support dans $B\big(0, \frac{1}{n}\big)$, et $\phi_n(0) = 1$. D'après (4.8) on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 = \phi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(nx)\,dx \leqslant \int_{B(0,\frac{1}{n})} |f(x)|\,dx.$$

Comme f est intégrable sur $B(0,1)$, on a par ailleurs par le théorème de convergence dominée

$$\int_{B(0,\frac{1}{n})} |f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où la contradiction. □

Ainsi il faut renoncer à voir la fonction de Dirac comme une fonction. Par contre, le membre de droite de (4.8) définit bien une distribution.

Proposition-Définition 4.17. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. L'application

$$\delta_{x_0} : \phi \mapsto \phi(x_0)$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^d$, appelée distribution de Dirac en x_0 (en général, quand $x_0 = 0$, on note simplement δ au lieu de δ_0).

Démonstration. L'application δ_{x_0} est bien linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$. En outre pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$|\phi(x_0)| \leqslant \|\phi\|_\infty .$$

Cela prouve que δ_{x_0} est bien une distribution sur Ω. □

On note que δ_{x_0} définit une distribution d'ordre 0. En outre, la Proposition 4.16 peut être adaptée en tout point pour voir que δ_{x_0} n'est pas la distribution associée à une fonction $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (version courte : δ_{x_0} n'est pas dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$).

On a déjà discuté le fait qu'il n'existe pas de fonction de Dirac, et on avait introduit les approximations de l'unité pour approcher le comportement de cette fonction de Dirac par des fonctions régulières. Ainsi, étant donnée une suite d'approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^d$, on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$T_{\rho_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta.$$

En effet, pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x)\phi(x)\,dx = (\rho_n * \phi)(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle\,.$$

La notion de fonction de Dirac a en fait déjà été rendue rigoureuse via la théorie des mesures. En effet, on avait défini la mesure δ telle que $\delta(\{0\}) = 1$ et $\delta(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = 0$. En particulier,

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi\, d\delta = \phi(0).$$

En fait les mesures sont déjà une généralisation de la notion de fonctions (à valeurs positives, si on ne considère que les mesures positives). En effet, si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (et à valeurs positives), alors la mesure qui à $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ associe

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\lambda$$

(où λ est la mesure de Lebesgue) est une mesure localement finie (c'est-à-dire finie sur les compacts) sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La notion de distribution généralise encore la notion de mesure (localement finie).

Proposition 4.18. *Soit μ une mesure localement finie sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Alors l'application*

$$T_\mu : \phi \mapsto \int_\Omega \phi\, d\mu$$

est une distribution sur Ω.

Attention, le fait que μ est localement finie est important pour avoir la continuité de T_μ. On note que T_μ est une distribution d'ordre 0, et que c'est une distribution positive si μ est une mesure positive (cela signifie que $\langle T_\mu, \phi \rangle \geqslant 0$ si $\phi \geqslant 0$).

Remarque 4.19. En fait on peut montrer que toutes les distributions positives d'ordre 0 sont obtenues de cette manière et, en rafinant un peu, cela donne une autre façon de *définir* la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En effet, même si on ne connaît que l'intégrale des fonctions continues, on peut voir que l'application

$$T : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx$$

est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$, localement finie, et on peut définir la mesure de Lebesgue comme étant l'unique mesure de Radon λ (on ne développera pas cette notion ici) telle que $T = T_\lambda$.

4.2.3 Valeur principale de $1/x$

Le but de ce paragraphe est de définir une distribution naturellement associée à la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que cette fonction n'est pas dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ car elle n'est pas intégrable au voisinage de 0. Néanmoins, par imparité, les parties positives et négatives se « compensent ». On utilise cette remarque pour la définition suivante (qui peut paraître assez artificielle de prime abord, mais qui s'avèrera pertinante en pratique).

Proposition 4.20. *L'application*

$$\mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \phi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$$

est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$, appelée valeur principale de $1/x$.

Démonstration. Soit $R > 0$. On considère $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-R, R]$. Soit $\varepsilon \in]0, R[$. Comme la fonction $x \mapsto \phi(0)/x$ est impaire et intégrable sur $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$ on a

$$\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\, dx.$$

Par le théorème des accroissements finis on a, pour tout $x \in [-R, R] \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| \leqslant \|\phi'\|_{L^\infty(-R,R)}.$$

Par le théorème de convergence dominée, on obtient que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$$

existe et son module n'excède pas $2R \|\phi'\|_{L^\infty(-R,R)}$. En outre cette limite définit une application linéaire par rapport à ϕ, donc cela définit bien une application linéaire continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, d'ordre inférieur ou égal à 1. Pour $n \geqslant 3$ on considère $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ à support dans $\left]\frac{1}{n}, 2\right[$ et égale à 1 sur $\left[\frac{2}{n}, 1\right]$. Alors $\|\phi_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geqslant 3$ et

$$\left\langle \mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi_n \right\rangle \geqslant \int_{\frac{2}{n}}^1 \frac{1}{x}\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Cela prouve que la distribution $\mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas être d'ordre 0. Elle est donc exactement d'ordre 1. □

4.2.4 Exercices

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
1. Montrer que f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^*)$. En déduire que f définit une distribution sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f (bien définie presque partout sur $\mathbb{R}$) n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de distribution T sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad \langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, dx.$$

Correction : On suppose par l'absurde qu'une telle distribution T existe. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$ on a

$$|\langle T, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{k \leqslant m} \left\| \phi^{(k)} \right\|_\infty.$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ non nulle, à valeurs positives et à support dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\phi_n(x) = \phi(nx)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\left\| \phi_n^{(k)} \right\|_\infty \leqslant n^k \|\phi\|_\infty$, donc

$$|\langle T, \phi_n \rangle| = \underset{n \to +\infty}{O}(n^m).$$

Mais on a par ailleurs

$$\langle T, \phi_n \rangle = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \phi(nx) e^{\frac{1}{x}}\, dx = \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi(y) e^{\frac{n}{y}}\, dy \geqslant \frac{e^n}{n} \|\phi\|_{L^1},$$

ce qui donne une contradiction. □

Exercice 2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ associe $\phi^{(k)}(0)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ et préciser son ordre.

Exercice 3. Montrer que l'application T qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ associe

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi^{(n)}(n)$$

est une distribution d'ordre infini sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On donne dans cet exercice des exemples un peu dans le même esprit que la masse de Dirac, puisqu'il s'agit d'intégrer une fonction sur une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ de dimension strictement inférieure à d. Autrement dit, on intégre une fonction contre une mesure qui ne charge qu'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^d$.
1. Montrer que l'application qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ associe

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x)\, dx$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Préciser son ordre.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que l'application qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ associe

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi\big(f(x), x\big)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Préciser son ordre.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que l'application qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ associe

$$\int_{\mathbb{R}} \nabla\phi\big(f(x), x\big) \cdot \nu(x)\, dx$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son ordre.

Exercice 5. On rappelle que pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $y \in \mathbb{R}^d$ on a noté $\tau_y f$ la translatée de f : $\tau_y f : x \mapsto f(x - y)$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on pose

$$\langle \tau_y T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-y}\phi \rangle .$$

1. Montrer que cela définit une distribution $\tau_y T$ sur $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a $\tau_y T_f = T_{\tau_y f}$.

<u>Correction :</u> Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\tau_y f)(x)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x + y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\tau_{-y}\phi)(x)\, dx.$$

□

4.3 Dérivation d'une distribution

On en arrive maintenant à ce qui constitue la motivation principale de la notion de distribution, à savoir généraliser la notion de dérivée à des fonctions qui ne sont pas dérivables. L'idée est de voir une fonction quelconque comme une distribution, c'est-à-dire comme une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$, et de reporter la dérivée sur la fonction test ϕ (qui elle est bien dérivable).

Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (en particulier, elle est localement intégrable), alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\, dx. \tag{4.9}$$

Avec les notations de la proposition 4.15, cela s'écrit encore

$$\langle T_{f'}, \phi \rangle = - \langle T_f, \phi' \rangle .$$

Pour une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ générale, le membre de gauche dans (4.9) n'a pas de sens. Par contre on peut considérer le membre de droite, et on s'aperçoit qu'il définit une distribution. C'est ce qu'on va définir comme étant la dérivée de T_f. Et si cette distribution est associée à une fonction $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire s'il existe $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad - \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\,dx,$$

alors on dira que g est la dérivée au sens des distributions (ou dérivée au sens faible) de f. On reviendra sur cet aspect dans le chapitre sur les espaces de Sobolev. Ici, on définit la dérivée d'une distribution générale et on en donne les premières propriétés.

Exemple 4.21. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$- \int_{\mathbb{R}} |x|\,\phi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 x\phi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} x\phi'(x)\,dx.$$

Dans chacune des intégrales on peut faire une intégration par parties, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\,\phi'(x)\,dx = - \int_{-\infty}^0 \phi(x)\,dx + \int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx.$$

Ainsi, si on note

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$- \int_{\mathbb{R}} |x|\,\phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\,dx.$$

Cela signifie que g est la dérivée au sens des distributions de la fonction valeur absolue. C'est bien la dérivée que l'on pouvait espérer.

4.3.1 Définitions et premiers exemples

On donne maintenant une définition précise de la dérivée d'une distribution. Comme pour les dérivées usuelles, on utilise des notations différentes en dimension 1 ou en dimension supérieure.

Proposition-Définition 4.22. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}(\Omega)$. On appelle dérivée de la distribution T et on note T' la distribution définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle .$$

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $T^{(k)}$ la distribution définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle T^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle T, \phi^{(k)} \rangle.$$

Démonstration. On montre que l'application $\phi \mapsto - \langle T, \phi' \rangle$ est bien une distribution sur Ω. Soit K un compact de Ω. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a

$$|\langle T, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{j=0}^m \|\phi^{(j)}\|_\infty.$$

Pour $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a alors

$$\left|-\langle T, \phi' \rangle\right| \leqslant C \sum_{j=0}^{m} \|(\phi')^{(j)}\|_\infty \leqslant C \sum_{j=0}^{m+1} \|\phi^{(j)}\|_\infty.$$

Cela prouve que T' est une bien une distribution sur Ω. Le cas général se prouve par récurrence sur l'ordre de dérivation. □

On observe que si T est une distribution d'ordre m, alors $T^{(k)}$ est une distribution d'ordre $m+k$. La définition est analogue en dimension quelconque.

Proposition-Définition 4.23. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $j \in [\![1, d]\!]$ on note $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ la distribution définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Elle est appelée dérivée partielle de la distribution T par rapport à la j-ième variable. Plus généralement, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on note $\partial^\alpha T$ la distribution définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle.$$

On donne maintenant quelques exemples de dérivées de distributions. Dans le cahier des charges de la définition, on a demandé à ce que la dérivée de la distribution associée à une fonction dérivable soit la distribution associée à sa dérivée. C'est bien le cas d'après l'égalité (4.9) sur laquelle on s'est basé pour définir T'.

Exemple 4.24. Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors on a $T_f' = T_{f'}$.

C'est également le cas en toute dimension et pour tout ordre de dérivation.

Exemple 4.25. Soit f une fonction de classe C^k sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leqslant k$. On a

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$

On ré-écrit maintenant l'Exemple 4.21 en terme de dérivée de distribution.

Exemple 4.26. Si on note f la fonction valeur absolue, alors on a $T_f' = T_g$, où g est définie par (4.10).

On donne maintenant la dérivée d'une fonction qui n'est pas continue.

Exemple 4.27. La fonction de Heaviside est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Alors on a $T_H' = \delta$. En effet, pour toute $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\langle T_H', \phi \rangle = -\langle T_H, \phi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \phi'(x)\, dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

On peut donner un exemple de dérivée d'une distribution qui n'est pas associée à une fonction.

Exemple 4.28. On a

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle = -\phi'(0).$$

On donne enfin un exemple de fonction localement intégrable dont la dérivée est une fonction qui n'est pas localement intégrable.

Exemple 4.29. La fonction $f : x \mapsto \ln(|x|)$ est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto 1/x$, qui n'est pas localement intégrable. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Puisque f est localement intégrable on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\phi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon$$

où on a noté

$$I_\varepsilon = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(|x|)\phi'(x)\,dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(|x|)\phi'(x)\,dx.$$

Comme on a enlevé un voisinage de 0, on peut faire des intégrations par parties pour chacun des deux termes. Cela donne

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= -\ln(\varepsilon)\phi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \ln(\varepsilon)\phi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} \\ &= \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \big(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)\big)\ln(\varepsilon) \end{aligned}$$

Enfin, comme $\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, on obtient

$$I_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \left\langle \mathsf{vf}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle.$$

Cela prouve que

$$T_f' = \mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On note l'importance de l'ouvert dans lequel on se place, comme c'est déjà le cas pour la dérivation au sens usuel. Considérons par exemple sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$ la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors f est dérivable au sens usuel sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle. Si on voit f comme une fonction sur $\mathbb{R}$, alors quelle que soit la façon de la prolonger en 0 on obtient une fonction qui n'est pas dérivable car elle n'est pas dérivable en 0.

Quand on dérive au sens des distributions, on n'évalue plus la dérivée en un point, mais cette distinction subsiste. Si on voit f comme une fonction sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée au sens des distributions est toujours nulle (autrement dit, $T_f' = 0$). Sur $\mathbb{R}$, la distribution T_f admet, comme toute distribution, une distribution dérivée. Et cette dérivée est $T_f' = \delta$.

Au sens des distributions on identifie deux fonctions égales presque partout, mais ce n'est pas parce qu'une fonction est dérivable en presque tout point de $\mathbb{R}$ de dérivée nulle qu'elle dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$. Au sens des distributions il n'est pas question de nier la dérivabilité au point 0, c'est en considérant une fonction test non nulle en 0 (en particulier par à support dans $\mathbb{R}^*$) qu'on voit le saut en 0 et qu'on prouve que T_f' n'est pas nulle (et ne peut même pas être identifiée à une fonction).

On note que la dérivée d'une distribution d'ordre m est une distribution d'ordre au plus $m+1$. Elle n'est pas nécessairement d'ordre égal à $m+1$. Par exemple si T est la distribution associée à une constante, elle est d'ordre 0 et sa dérivée, nulle, l'est également.

La proposition suivante est laissée en exercice. On peut de la même façon généraliser la formule de Leibniz en dimension supérieure (voir la Proposition 4.2 pour les fonctions).

Proposition 4.30. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in C^\infty(I)$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. Alors on a*

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(fT)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} T^{(n-k)}.$$

4.3.2 Formule des sauts en dimension 1

On donne dans ce paragraphe un résultat qui donne en dimension 1 la dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe C^1 par morceaux.

Soit f une fonction C^1 par morceaux sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Pour simplifier l'écriture, on suppose par exemple que f admet un nombre fini N de points de discontinuité (mais on peut faire un raisonnement analogue si f admet un nombre infini –nécessairement dénombrable– de discontinuités). Ainsi il existe $a_1, \dots, a_N \in I$ tels que $a_1 < \dots < a_N$, f admet pour tout $j \in [\![1, N]\!]$ des limites à gauche et à droite en a_j (que l'on note respectivement $f(a_j^-)$ et $f(a_j^+)$), f est dérivable sur $I \backslash \{a_1, \dots, a_N\}$ et sa dérivée (que l'on notera $[f']$) admet également des limites à gauche et à droite en tout point. En particulier, $[f']$ définit une fonction localement intégrable sur I.

Proposition 4.31. *Soit f comme ci-dessus. Alors on a*

$$T_f' = T_{[f']} + \sum_{j=1}^{N} \big(f(a_j^+) - f(a_j^-)\big)\delta_{a_j}.$$

Démonstration. On note $a_0 = \inf(I) \in [-\infty, a_1[$ et $a_{N+1} = \sup(I) \in]a_N, +\infty]$. Pour $\phi \in C_0^\infty(I)$ on a

$$\begin{aligned}
-\int_I f(x)\phi'(x)\,dx &= -\sum_{j=0}^{N} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\phi'(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{N} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)\phi(x)\,dx + \sum_{j=0}^{N} \big(f(a_{j+1}^-)\phi(a_{j+1}) - f(a_j^+)\phi(a_j)\big) \\
&= \int_I [f'](x)\phi(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N} \big(f(a_j^+) - f(a_j^-)\big)\phi(a_j).
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on a utilisé le fait que ϕ s'annule au voisinage des bords (éventuellement infinis) de I. □

Avec cette proposition on retrouve les dérivées des Exemples 4.24, 4.26 et 4.27.

4.3.3 Exemples en dimension supérieures

Exemple 4.32. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f qui à (x_1, x_2) associe

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0, \\ 0 & \text{si } x_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Cela définit une fonction dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ on a par le théorème de Fubini puis par intégration par parties

$$-\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\partial_{x_1}\phi(x)\,dx = -\int_{x_2 \in \mathbb{R}} \left(\int_{x_1=0}^{+\infty} \partial_{x_1}\phi(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x_2)\,dx_2,$$

d'où $\partial_{x_1} T_f$ est la distribution de l'exercice 4. D'autre part

$$-\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\partial_{x_2}\phi(x)\,dx = 0,$$

donc $\partial_{x_2} T_f = 0$.

Exemple 4.33. Soit $\alpha \in]-\infty, d-1[$. On considère sur la boule unité $B(1)$ de $\mathbb{R}^d$ la fonction $f \mapsto |x|^{-\alpha}$. Cela définit une fonction intégrable sur $B(1)$. En outre elle est de classe C^∞ sur $B(1)\setminus\{0\}$ et pour $x \in B(1)\setminus\{0\}$ on a

$$\nabla f(x) = -\alpha\,|x|^{-\alpha-2}\,x.$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(B(1))$. Comme f est intégrable on a par le théorème de convergence dominée

$$-\int_{B(1)} f\nabla\phi\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(1)\setminus B(\varepsilon)} f\nabla\phi\,dx.$$

D'après la formule de Green on a pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$-\int_{B(1)\setminus B(\varepsilon)} f\nabla\phi\,dx = -\int_{S(\varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha}\phi\nu\,dx - \alpha\int_{B(1)\setminus B(\varepsilon)} |x|^{-\alpha-2}\,x\phi\,dx,$$

où $S(\varepsilon)$ est la sphère de rayon ε et ν est le vecteur normal unitaire à $S(\varepsilon)$ dirigé vers $B(\varepsilon)$. On a d'une part

$$\left|\int_{S(\varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha}\phi\nu\,dx\right| \leqslant |S(1)|\,\varepsilon^{d-1-\alpha}\,\|\phi\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

D'autre part, par le théorème de convergence dominée, on a

$$-\alpha\int_{B(1)\setminus B(\varepsilon)} |x|^{-\alpha-2}\,x\phi\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\alpha\int_{B(1)} |x|^{-\alpha-2}\,x\phi\,dx$$

Cela prouve que le gradient de la distribution T_f est la distribution associée à la fonction intégrable $x \mapsto -\alpha\,|x|^{-\alpha-2}\,x$. Autrement dit, pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, la distribution $\partial_j T_f$ est la distribution associée à la fonction $x \mapsto -\alpha\,|x|^{-\alpha-2}\,x_j$.

4.3.4 Premiers exemples d'équations différentielles

Maintenant que l'on a introduit les dérivées d'une distributions, on peut chercher à résoudre dans l'espace des distributions des équations différentielles. Comme pour les fonctions, il s'agit de déterminer l'ensemble des distributions T telles que telles ou telles relations entre T et ses dérivées sont satisfaites.

Naturellement, on commence par un problème simple. La première question est de se demander, en dimension 1, quelles sont les distributions dont la dérivée est nulle sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$. Bien entendu, les distributions associées à une fonction constante sont solutions. Ce sont les seules solutions dans l'espace des fonctions dérivables (ici on peut prendre un instant pour se remémorer comment on prouve cette affirmation, on se rappelle également que ce n'est plus vrai sur un ouvert de $\mathbb{R}$ qui n'est pas connexe), mais puisqu'on a agrandi l'espace où se trouve l'inconnue, on peut avoir créé de nouvelles solutions, qui ne sont pas des distributions associées à une fonction dérivable. Mais en fait, non.

Proposition 4.34. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. Alors $T' = 0$ si et seulement si T est constante (c'est-à-dire si T s'identifie à une fonction constante).*

Pour la preuve on utilisera le lemme suivant. On note qu'une fonction $\phi \in C_0^\infty(I)$ admet des primitives sur I, qui sont nécessairement de classe C^∞, mais qu'en général elle ne sont pas à support compact.

Lemme 4.35. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\phi \in C_0^\infty(I)$. Alors il existe $\psi \in C_0^\infty(I)$ tel que $\psi' = \phi$ si et seulement si $\int_I \phi = 0$.*

Démonstration. On suppose qu'il existe $\psi \in C_0^\infty(I)$ tel que $\psi' = \phi$. Alors on a

$$\int_I \phi = \int_I \psi' = 0.$$

Inversement, on suppose que $\int_I \phi = 0$. Pour $x \in I$ on note $\psi(x) = \int_a^x \phi(t)\,dt$, où on a noté $a = \inf(I)$. Alors $\psi \in C_0^\infty(I)$ et $\psi' = \phi$. □

Démonstration de la proposition 4.34. On sait que la dérivée au sens des distributions d'une fonction constante est nulle. Inversement, on suppose que $T \in \mathcal{D}'(I)$ est telle que $T' = 0$.

On fixe $\phi_0 \in C_0^\infty(I)$ telle que $\int_I \phi_0 = 1$ et on note $\alpha = \langle T, \phi_0 \rangle$. Soit $\phi \in C_0^\infty(I)$. On a

$$\int_I \left(\phi - \phi_0 \int_I \phi \right) = 0,$$

donc d'après le Lemme 4.35 il existe $\psi \in C_0^\infty(I)$ tel que $\psi' = \phi - \phi_0 \int_I \phi$. On a alors

$$\left\langle T, \phi - \phi_0 \int_I \phi \right\rangle = \langle T, \psi' \rangle = -\langle T', \psi \rangle = 0,$$

et d'autre part

$$\left\langle T, \phi - \phi_0 \int_I \phi \right\rangle = \langle T, \phi \rangle - \alpha \int_I \phi,$$

d'où

$$\langle T, \phi \rangle = \alpha \int_I \phi.$$

Cela prouve que T est la distribution associée à la fonction constante égale à α. On note que la définition de α ne dépend pas du choix de ϕ_0. □

Les généralisations suivantes sont laissées en exercice.

Corollaire 4.36. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. Alors $T^{(k)} = 0$ si et seulement si T est une fonction polynomiale de degré au plus $k - 1$.*

Corollaire 4.37. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ et f une fonction continue sur I. Les solutions $T \in \mathcal{D}'(I)$ de l'équation*

$$a_k T^{(k)} + \cdots + a_0 T = f$$

sont exactement les solutions du même problème posé dans $C^k(I)$.

Exemple 4.38. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation

$$T' - \alpha T = \delta, \tag{4.12}$$

d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Comme dans le cas usuel, comme le problème est affine il suffit de trouver une solution particulière et d'y ajouter les solutions du problème sans second membre. Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser… la variation de la constante. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ et $S = e^{-\alpha x} T$. Alors T est solution de (4.12) si et seulement si $e^{\alpha x} S = \delta$, soit $S' = e^{-\alpha x}\delta = \delta$. D'après l'Exemple 4.27 on peut prendre pour S la fonction de Heaviside H. Et on obtient qu'une solution particulière $T_0 = e^{\alpha x} H$. Comme pour le cas des fonctions, même si on n'est pas convaincu par les manipulations précédentes, on peut vérifier a posteriori que T_0 est effectivement solution en utilisant la Proposition 4.30 ou la Proposition 4.31. Ainsi, l'ensemble des solutions de (4.12) est l'ensemble des distributions associées aux fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{\alpha x}\big(H(x) + c\big),$$

où c est une constante.

Remarque 4.39. On rappelle que si f est une fonction continue et à support compact sur $\mathbb{R}$ alors les solutions de l'équation

$$y' - \alpha y = f$$

sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto Ce^{\alpha t} + \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds.$$

On note que ces solutions sont précisément les produits de convolution des fonctions solutions de (4.12) avec f. Ce n'est pas une coïncidence, et cette remarque sera généralisée par la suite.

On observe que comme dans le cas des fonctions, la difficulté pour résoudre une équation telle que (4.12) est d'identifier une primitive d'une certaine distribution. Comme pour les fonctions continues, on peut s'assurer que toute distribution sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet une primitive (c'est l'Exercice 9). En particulier, toute fonction dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ admet une primitive au sens des distributions.

La proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 4.40. *Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Alors F est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et sa dérivée au sens des distributions est f (autrement dit, $T_F' = T_f$).

Correction : On note $I_x = [x, 0]$ si $x \leqslant 0$ et $I_x = [0, x]$ si $x > 0$. On note tout d'abord que l'intégrale définissant $F(x)$ a bien un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque f est intégrable sur le segment I_x. Soit $R > 0$. L'application $(t, x) \mapsto \mathbb{1}_{I_x}(t) f(t)$ est mesurable sur $[-R, R]^2$, donc F est mesurable d'après le théorème de Fubini-Tonelli. En outre

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} |F(x)|\, dx &= \int_{x=-R}^{R} \int_{t \in I_x} |f(t)|\, dt\, dx \\
&= \int_{x=-R}^{0} \int_{t=x}^{0} |f(t)|\, dt\, dx + \int_{x=0}^{R} \int_{t=0}^{x} |f(t)|\, dt\, dx \\
&= \int_{t=-R}^{0} \int_{x=-R}^{t} |f(t)|\, dx\, dt + \int_{t=0}^{R} \int_{x=t}^{R} |f(t)|\, dx\, dt \\
&\leqslant R \int_{-R}^{R} |f(t)|\, dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Cela prouve que F est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit maintenant $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle T_F', \phi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} F(x)\phi'(x)\,dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{0}\int_{t=x}^{0} f(t)\phi'(x)\,dt\,dx - \int_{x=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{x} f(t)\phi'(x)\,dt\,dx \\
&= \int_{t=-\infty}^{0} f(t)\int_{x=-\infty}^{t} \phi'(x)\,dx\,dt - \int_{t=0}^{+\infty} f(t)\int_{x=t}^{+\infty} \phi'(x)\,dx\,dt \\
&= \int_{t=-\infty}^{0} f(t)\phi(t)\,dt + \int_{t=0}^{+\infty} f(t)\phi(t)\,dt \\
&= \left\langle T_f, \phi \right\rangle .
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien la dérivée au sens des distributions de F. □

4.3.5 Exercices

***Exercice* 6.** Soient $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(fT)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)} T^{(j)}.$$

***Exercice* 7. 1.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$T' = \alpha T.$$

2. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation

$$T' - \alpha T = H(x),$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

***Exercice* 8.** Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ on pose

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, -x)\,dx.$$

1. Montrer que cela définit une distribution T sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que T ne s'identifie pas à une fonction de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
3. Calculer $\partial_1 T - \partial_2 T$.

***Exercice* 9.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et T une distribution sur I.
1. Montrer que T admet une primitive, que l'on notera S.
2. Déterminer en fonction de S l'ensemble des primitives de T.

***Exercice* 10. 1.** Déterminer l'ensemble des primitives de δ sur $\mathbb{R}$. Vérifier en particulier que toutes les primitives de δ s'identifient à des fonctions dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des primitives de f (au sens des distributions) est l'ensemble des fonctions de la forme $(G * f)$, où G est une primitive de δ.

***Exercice* 11.** Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$-T'' + T = \delta.$$

Correction :

$$u(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

□

***Exercice* 12.** On note $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$. Pour $(x_1, x_2) \in \Omega$ on pose

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{si } |x_2| < x_1, \\ 1 + x_1 & \text{si } |x_2| < -x_1, \\ 1 - x_2 & \text{si } |x_1| < x_2, \\ 1 + x_2 & \text{si } |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

Déterminer les dérivées de u au sens des distributions sur Ω.

***Exercice* 13.** Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$G(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t - |x| > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et calculer $(\partial_{tt} - \partial_{xx})G$ au sens des distributions.

***Exercice* 14.** Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$G(t, x) = H(t)\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Montrer que $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et calculer $(\partial_t - \partial_{xx})G$ au sens des distributions.

***Exercice* 15. 1.** Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \mu(]-\infty, x[)$.

a. Montrer que f est une fonction croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et tend vers 1 en $+\infty$.

b. Montrer que, au sens des distributions, on a $f' = \mu$.

2. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. On suppose que f tend vers 0 en $-\infty$ et tend vers 1 en $+\infty$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilités μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que, au sens des distributions, $f' = \mu$.

Correction :
1. D'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \left\langle T_f', \phi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx = -\int_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_{y=-\infty}^{x} d\mu(y)\right)\phi'(x)\,dx \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}}\int_{x=y}^{+\infty} \phi'(x)\,dx\,d\mu(y) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\,d\mu(y) \\ &= \langle \mu, \phi \rangle. \end{aligned}$$

2.

□

4.4 Distributions à supports compacts

On s'intéresse dans cette section au cas particulier des distributions à supports compacts, c'est-à-dire nulles en dehors d'un compact de Ω. On commence par définir ce que cela signifie.

4.4.1 Restriction d'une distribution - Support

Proposition 4.41 (Restriction d'une distribution)**.** *Soient Ω et ω deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $\omega \subset \Omega$. Soit T une distribution sur Ω. Alors la restriction T_ω de T à $C_0^\infty(\omega)$ (on identifie une fonction $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ à son prolongement par 0 sur Ω) définit une distribution sur ω.*

Démonstration. T définit bien une application linéaire sur $C_0^\infty(\omega)$. Soit K un compact de ω. C'est aussi un compact de Ω, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\omega) \simeq C_K^\infty(\Omega)$ on a

$$|T_\omega(\phi)| = |T(\phi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty .$$

Cela prouve que T_ω est bien une distribution sur ω. □

Définition 4.42. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution sur Ω. On dit que T est nulle sur ω si la restriction de T à ω est nulle, c'est-à-dire si $\langle T, \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ à support dans ω.

Lemme 4.43. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution sur Ω. On note $\mathcal{O}$ l'union de tous les ouverts de Ω sur lesquels T s'annule. Alors T s'annule sur $\mathcal{O}$ (en particulier, $\mathcal{O}$ est alors le plus grand ouvert sur lequel T s'annule).*

Démonstration. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathcal{O})$. On note K le support de ϕ. Comme K est compact, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des ouverts $\omega_1, \dots, \omega_n \subset \Omega$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^n \omega_j$ et T s'annule sur ω_j pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Soient $\chi_1, \dots, \chi_n \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ une partition de l'unité associée ($\mathrm{supp}(\chi_j) \subset \omega_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et $\sum_{j=1}^n \chi_j = 1$ sur K). On a alors $\mathrm{supp}(\chi_j \phi) \subset \omega_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et donc

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{j=1}^n \langle T, \chi_j \phi \rangle = 0.$$

Cela prouve que T est nulle sur $\mathcal{O}$. □

Définition 4.44. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution sur Ω. On appelle support de T et on note $\mathrm{supp}(T)$ le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel T s'annule.

Exemple 4.45.
- Si f est une fonction continue sur Ω alors $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f)$.
- $\mathrm{supp}(\delta) = \{0\}$.
- Soient $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et ω un ouvert de Ω. Alors la restriction de T_f à ω est la distribution associée à la restriction sur ω de f. En particulier T_f s'annule sur ω si et seulement si f est presque partout nulle sur ω. Ainsi $\mathrm{supp}(T_f)$ est le complémentaire du plus grand ouvert de Ω sur lequel f est presque partout nulle.

Proposition 4.46. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution sur Ω.*

(i) $\mathrm{supp}(T)$ *est un fermé de* Ω

(ii) *Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que* $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\phi) = \varnothing$. *Alors* $\langle T, \phi \rangle = 0$.

(iii) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a* $\mathrm{supp}(\partial^\alpha T) \subset \mathrm{supp}(T)$.

Remarque 4.47. Soit T une distribution sur Ω. Il peut exister $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi = 0$ sur $\mathrm{supp}(T)$ et pourtant $\langle T, \phi \rangle \neq 0$. Par exemple, on a $\mathrm{supp}(\delta') = \{0\}$ et pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\phi'(0).$$

Or on peut avoir $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$, auquel cas $\phi = 0$ sur $\mathrm{supp}(T)$ mais $\langle T, \phi \rangle \neq 0$. Par contre, dans ce cas 0 est dans le support de ϕ et donc $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\phi) \neq \varnothing$.

4.4.2 Distributions à supports compacts

On s'intéresse maintenant au cas particulier des distributions dont le support est compact. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ on note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à supports compacts sur Ω.

Comme une distribution est « localement d'ordre fini » il n'est pas surprenant qu'une distribution à support compact soit automatiquement d'ordre fini.

Lemme 4.48. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T une distribution à support compact dans Ω. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 sur un voisinage*[1] *de* $\mathrm{supp}(T)$*. Alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a*

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi\phi \rangle .$$

Démonstration. Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Comme $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}((1-\chi)\phi) = \varnothing$ on a $\langle T, (1-\chi)\phi \rangle = 0$, d'où $\langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi\phi \rangle$. □

Proposition 4.49. *Une distribution à support compact est d'ordre fini. Plus précisément, si K est un voisinage compact de* $\mathrm{supp}(K)$ *dans Ω, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| . \tag{4.13}$$

Démonstration. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. D'après la Proposition 1.21 il existe $\chi \in C_0^\infty(\Omega, [0,1])$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de $\mathrm{supp}(T)$ et $\mathrm{supp}(\chi) \subset K$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que

$$\forall \phi \in C_K^\infty(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty .$$

D'après le Lemme 4.48 et la règle de Leibniz, on a alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|\langle T, \phi \rangle| = |\langle T, \chi\phi \rangle| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha (\chi\phi)\|_\infty \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty ,$$

pour un certaine constante C qui ne dépend pas de ϕ. Cela prouve (4.13) et en particulier T est une distribution d'ordre fini. □

On observe qu'une autre conséquence du lemme 4.48 est qu'une distribution à support compact peut-être étendue en une forme linéaire sur $C^\infty(\Omega)$. En effet, si $\phi \in C^\infty(\Omega)$ n'est pas à support compact, on peut définir $\langle T, \phi \rangle$ par $\langle T, \chi\phi \rangle$, avec χ égale à 1 au voisinage du support de T. Cette définition ne dépend pas du choix de χ, et cette nouvelle application est une forme linéaire sur $C^\infty(\Omega)$.

On définit maintenant une topologie sur $C^\infty(\Omega)$, pour voir une distribution à support compact comme une application linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \,|\, |x| \leqslant n \text{ et } \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geqslant 2^{-n} \right\} .$$

Cela définit une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts de Ω tels que

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n .$$

1. Comme pour la Remarque 4.47, il n'est pas suffisant de supposer que χ est égale à 1 sur $\mathrm{supp}(T)$.

En outre, si K est un compact de Ω alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_n$.

Pour $u, v \in C^\infty(\Omega)$ on pose

$$d_\infty(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min\left(1, \|u-v\|_{C^n_{K_n}(\Omega)}\right).$$

Cela définit une distance sur $C^\infty(\Omega)$, ce qui munit $C^\infty(\Omega)$ d'une structure d'espace métrique complet.

Avec cette topologie, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(\Omega)$ converge vers $u \in C^\infty(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et tout compact K de Ω la suite $(\partial^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial^\alpha u$ uniformément sur K.

On peut alors vérifier que si T est une distribution à support compact sur Ω, étendue comme ci-dessus en une forme linéaire sur $C^\infty(\Omega)$, alors T est en fait continue sur $C^\infty(\Omega)$.

4.4.3 Distributions à support ponctuel

Parmi les distributions à supports compacts, on trouve celles dont le support est un point. On sait qu'une fonction n'a jamais un support égal à un point. Par contre c'est le cas pour une distribution de Dirac et ses dérivées. On montre qu'il n'y a en fait pas d'autres possibilités.

Proposition 4.50. *Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que* $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$. *Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et des constantes $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leqslant m$, tels que*

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}.$$

Démonstration. • D'après la proposition précédente, T est d'ordre fini. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty .$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ égale à 1 au voisinage de 0 et à support dans $B(0,1)$. Pour $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose $\chi_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Alors χ_ε est à support dans $B(0,\varepsilon)$ et il existe $C_\chi > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant m$ on a

$$\|\partial^\alpha \chi_\varepsilon\|_\infty \leqslant C_\chi \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

• Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\psi(x) = \chi(x)\left(\phi(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right),$$

de sorte que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \psi(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant m$. D'après la formule de Taylor, il existe $C_\phi > 0$ telle que pour $|\alpha| \leqslant m$, $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in B(0,\varepsilon)$ on a

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leqslant C_\phi \varepsilon^{m+1-|\alpha|}.$$

D'après la formule de Leibniz on a alors, pour tout $|\alpha| \leqslant m$,

$$\|\partial^\alpha(\chi_\varepsilon \psi)\| = \sup_{x\in B(0,\varepsilon)} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^{\alpha-\beta}\psi(x)\right| \left|\partial^\beta \chi_\varepsilon(x)\right| = \underset{\varepsilon\to 0}{O}(\varepsilon^{m+1-|\alpha|}) = \underset{\varepsilon\to 0}{O}(\varepsilon).$$

D'après le Lemme 4.48 on a alors

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, \chi_\varepsilon \psi \rangle = \underset{\varepsilon \to O}{O}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Cela prouve que $\langle T, \psi \rangle = 0$. Ainsi,

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi\phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha \phi(0) \left\langle T, \frac{x^\alpha \chi}{\alpha!} \right\rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant n} c_\alpha \left\langle \partial^\alpha \delta, \phi \right\rangle,$$

où pour $|\alpha| \leqslant m$ on a noté [2]

$$c_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{x^\alpha \chi}{\alpha!} \right\rangle. \qquad \square$$

L'intérêt de cette proposition est manifeste quand on veut montrer qu'une distribution est une distribution de Dirac. On peut commencer par montrer que son support est réduit à un point, ce qui réduit grandement les possibilités. Il ne reste alors plus qu'à s'assurer qu'il ne peut pas y avoir de terme faisant intervenir les dérivées de la distribution de Dirac.

4.5 Convolution

Dans ce paragraphe, on généralise le produit de convolution aux distributions. Cela ne peut pas être fait en toute généralité, mais on peut aller encore au-delà de ce qui sera discuté ici.

4.5.1 Dérivation et intégration sous le crochet

On commence par généraliser aux distributions les théorèmes de dérivation sous l'intégrale et de Fubini. On se place ici sous des hypothèses telles que tout se passe bien.

Théorème 4.51 (Dérivation sous le crochet)**.** *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\nu)$. On suppose qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que* $\operatorname{supp}(T) \subset K$ *ou* $\operatorname{supp}(\Phi(\cdot, \lambda)) \subset K$ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ on pose*

$$F(\lambda) = \langle T, \Phi(\cdot, \lambda) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\nu$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^\nu$ et $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ on a

$$\partial^\alpha F(\lambda) = \langle T, \partial_\lambda^\alpha \Phi(\cdot, \lambda) \rangle.$$

Démonstration. • Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^\nu$. Soit $\tilde{K}$ un voisinage compact de K dans $\mathbb{R}^d$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ on a

$$|F(\lambda) - F(\lambda_0)| = |\langle T, \Phi(\cdot, \lambda) - \Phi(\cdot, \lambda_0) \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \tilde{K}} \left| \partial_x^\alpha \big(\Phi(x, \lambda) - \Phi(x, \lambda_0) \big) \right|.$$

Soit $r > |\lambda_0|$. Par l'inégalité des accroissements finis on a pour tout $\lambda \in B(r)$

$$|F(\lambda) - F(\lambda_0)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant 1} \sup_{x \in \tilde{K}} \sup_{\lambda_1 \in B(r)} \left| \partial_x^\alpha \partial_\lambda^\beta \Phi(x, \lambda_1) \right| |\lambda - \lambda_0| \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} 0.$$

Cela prouve que F est continue en λ_0, et donc sur $\mathbb{R}^\nu$.

2. Vérifier que cette définition de c_α ne dépend pas du choix de χ

- On note $(e_1, \dots, e_\nu)$ la base canonique de $\mathbb{R}^\nu$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ et $j \in [\![1, \nu]\!]$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\frac{F(\lambda + he_j) - F(\lambda)}{h} - \left\langle T, \partial_{\lambda_j} \Phi(\cdot, \lambda) \right\rangle = \langle T, \Psi_h(\cdot, \lambda) \rangle ,$$

où

$$\Psi_h(x, \lambda) = \frac{\Phi(x, \lambda + he_j) - \Phi(x, \lambda)}{h} - \partial_{\lambda_j} \Phi(x, \lambda).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ on a $\mathrm{supp}(\Psi_h(\cdot, \lambda)) \subset K$ si $\mathrm{supp}(\Phi(\cdot, \lambda)) \subset K$. En outre, les dérivées en x de Ψ_h convergent vers 0 uniformément pour $x \in \tilde{K}$ quand h tend vers 0, donc comme précédemment on obtient que la dérivée de F par rapport à λ_j existe et vaut

$$\left\langle T, \partial_{\lambda_j} \Phi(\cdot, \lambda) \right\rangle .$$

Ainsi, F est continue, ses dérivées partielles existent et sont comme annoncé par la proposition. On conclut alors en appliquant ce résultat aux dérivées successives de Φ par rapport à λ. □

Proposition 4.52. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\nu)$. On suppose qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que* $\mathrm{supp}(T) \subset K$ *ou* $\mathrm{supp}(\Phi(\cdot, \lambda)) \subset K$ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$. Soit P un pavé compact de $\mathbb{R}^\nu$. Alors on a*

$$\int_P \langle T, \Phi(\cdot, \lambda) \rangle \, d\lambda = \left\langle T, \int_P \Phi(\cdot, \lambda) \, d\lambda \right\rangle .$$

Démonstration. On note $P = \prod_{j=1}^\nu [a_j, b_j]$ et $P' = \prod_{j=2}^\nu [a_j, b_j]$. Pour $\lambda_1 \in [a_1, b_1]$ on pose

$$F(\lambda_1) = \left\langle T, \int_{a_1}^{\lambda_1} \int_{P'} \Phi(\cdot; s_1, \lambda') \, d\lambda' \, ds_1 \right\rangle .$$

D'après le théorème de dérivation sous le crochet F est dérivable sur $[a_1, b_1]$ et pour $\lambda_1 \in [a_1, b_1]$ on a

$$F'(\lambda_1) = \left\langle T, \int_{P'} \Phi(\cdot; \lambda_1, \lambda') \, d\lambda' \right\rangle .$$

D'où

$$\int_{a_1}^{b_1} \left\langle T, \int_{P'} \Phi(\cdot; \lambda_1, \lambda') \, d\lambda' \right\rangle d\lambda_1 = F(b_1) - F(a_1) = \left\langle T, \int_{a_1}^{b_1} \int_{P'} \Phi(\cdot; \lambda_1, \lambda') \, d\lambda' \, d\lambda_1 \right\rangle .$$

On procède de la même façon pour « sortir du crochet » les intégrales par rapport à chacune des autres variables. □

4.5.2 Convolution d'une distribution avec une fonction

On commence par définir et étudier le produit de convolution d'une distribution et d'une fonction régulière, l'une des deux au moins étant à support compact.

On rappelle que pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont l'une au moins est à support compact le produit de convolution $(f * \phi)$ est défini par

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \phi(x - y) \, dy.$$

Avec les notations des distributions cela s'écrit encore

$$(f * \phi)(x) = \langle T_f, \phi(x - \cdot) \rangle .$$

On rappelle qu'on a noté $\mathcal{P}g = \check{g}$ la fonction $g : y \mapsto g(-y)$ et $\tau_x g$ est la fonction qui à y associe $g(y-x)$. Ainsi on peut aussi écrire

$$(f * \phi)(x) = \left\langle T_f, \tau_x \check{\phi} \right\rangle$$

On note que si ϕ est à support compact, c'est encore le cas de $\tau_x \check{\phi}$. Cette écriture peut donc être généralisée à une distribution générale.

Définition 4.53. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, ou $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$(T * \phi)(x) = \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle = \left\langle T, \tau_x \check{\phi} \right\rangle .$$

Cela définit une fonction sur $\mathbb{R}^d$, appelée produit de convolution de T et de ϕ.

Exemple 4.54. Comme d'habitude le cahier des charges pour définir une opération sur les distributions est qu'elle coïncide avec l'opération usuelle pour une distribution associée à une fonction. Ici la définition a effectivement été choisie de sorte que pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont l'une au moins est à support compact on a bien

$$(T_f * \phi) = f * \phi.$$

Exemple 4.55. Le produit de convolution des fonctions n'avait pas d'élément unité, car la fonction de Dirac n'est pas une fonction. Maintenant qu'on peut définir le produit de convolution avec une distribution, on observe qu'on a bien comme attendu

$$\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (\delta * \psi) = \psi.$$

On donne maintenant quelques propriétés de ce produit de convolution. On commence par montrer que deux distributions qui agissent de la même façon sur les fonctions test par convolution sont égales.

Lemme 4.56. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a $T * \phi = 0$. Alors $T = 0$.*

Démonstration. Pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle T, \phi \rangle = (T * \check{\phi})(0) = 0,$$

et donc $T = 0$. □

Corollaire 4.57. *Si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sont telles que $T_1 * \phi = T_2 * \phi$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $T_1 = T_2$.*

On généralise maintenant le fait que le produit de convolution de deux fonctions à supports compacts est à support compact.

Proposition 4.58. *Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0, R_1)$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0, R_2)$ avec $R_1, R_2 > 0$, alors $(T * \phi)$ est nulle en dehors de $B(0, R_1 + R_2)$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| > R_1 + R_2$. Alors les supports de T et $\phi(x - \cdot)$ sont disjoints, donc $(T * \phi)(x) = 0$. □

On a vu à la Proposition 1.18 que si l'un des facteurs d'un produit de convolution est régulier, alors le produit l'est aussi et les dérivées du produit s'obtiennent en dérivant le facteur en question. Ici on a un résultat analogue, et on peut en outre dériver l'un ou l'autre des deux facteurs.

Proposition 4.59. *Soient* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, *ou* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $(T * \phi)$ *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^d$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^d$ *on a*

$$\partial^\alpha(T * \phi) = T * (\partial^\alpha \phi) = (\partial^\alpha T) * \phi.$$

Démonstration. D'après le théorème de dérivation sous le crochet, $(T * \phi)$ est de classe C^∞ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a

$$\partial^\alpha(T * \phi) = \left\langle T, \partial_x^\alpha\big(\phi(x - \cdot)\big)\right\rangle = \langle T, (\partial_x^\alpha \phi)(x - \cdot)\rangle = T * (\partial^\alpha \phi).$$

En outre, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\partial_x^\alpha \phi(x - y) = (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \phi(x - y),$$

donc on a aussi

$$\langle T, \partial_x^\alpha \phi(x - \cdot)\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \partial^\alpha\big(\phi(x - \cdot)\big)\right\rangle = \langle \partial^\alpha T, \phi(x - \cdot)\rangle . \qquad \square$$

On généralise maintenant à ce contexte le bon comportement du produit de convolution avec les translations, et on montre l'associativité du produit de convolution d'une distribution avec deux fonctions.

Proposition 4.60. *Soient* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, *ou* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Alors pour* $a \in \mathbb{R}^d$ *on a*

$$\tau_a(T * \phi) = T * (\tau_a \phi).$$

Démonstration. En $x \in \mathbb{R}^d$, ces deux fonctions valent $\langle T, \phi(x - a - \cdot)\rangle$. $\square$

Proposition 4.61. *Soient* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, *ou* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Soit* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Alors on a*

$$(T * \psi) * \phi = T * (\psi * \phi).$$

Démonstration. Soit P un pavé compact de $\mathbb{R}^d$ contenant le support de ϕ. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\big((T * \psi) * \phi\big)(x) = \int_P (T * \psi)(x - y)\phi(y)\, dy = \int_P \langle T, \psi(x - y - \cdot)\rangle\, \phi(y)\, dy.$$

Par le théorème d'intégration sous le crochet on obtient

$$\big((T * \psi) * \phi\big)(x) = \left\langle T, \int_P \psi(x - y - \cdot)\phi(y)\, dy\right\rangle = \langle T, (\psi * \phi)(x - \cdot)\rangle = \big(T * (\psi * \phi)\big)(x).$$

D'où le résultat. $\square$

Dans le prochain paragraphe on utilisera aussi l'égalité suivante.

Proposition 4.62. *Soient* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, *ou* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Soit* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Alors on a*

$$\langle T * \psi, \phi\rangle = \left\langle T, \check{\psi} * \phi\right\rangle.$$

Démonstration. Comme pour la preuve précédente on considère un pavé compact P contenant le support de ϕ et on applique le théorème d'intégration sous le crochet pour écrire

$$\begin{aligned}
\langle T * \psi, \phi\rangle = \int_P (T * \psi)(x)\phi(x)\, dx &= \int_P \langle T, \psi(x - \cdot)\rangle\, \phi(x)\, dx \\
&= \left\langle T, \int_P \psi(x - \cdot)\phi(x)\, dx\right\rangle \\
&= \left\langle T, \int_P \check{\psi}(\cdot - x)\phi(x)\, dx\right\rangle \\
&= \left\langle T, \check{\psi} * \phi\right\rangle . \qquad \square
\end{aligned}$$

4.5.3 Densité des fonctions régulières dans les espaces de distributions

On a utilisé le produit de convolution pour montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty[$. De la même façon, on montre que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (qui peut être vu comme une partie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ puisque chaque $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est identifié à une distribution sur $\mathbb{R}^d$) est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Attention, cela paraît être un résultat plus fort puisque $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est plus gros que $L^p(\mathbb{R}^d)$, mais la notion de densité n'est pas pour la même topologie, et il est plus « facile » d'être dense pour la topologie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ que pour celle de $L^p(\mathbb{R}^d)$. Par exemple, on obtient en particulier qu'on peut approcher tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ par une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour la topologie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors que ce n'était pas le cas pour la topologie de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.63. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers T au sens des distributions (autrement dit, T_{f_n} converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$).*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de Ω tels que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $\chi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi_n = 1$ au voisinage de K_n puis on considère $\varepsilon_n > 0$ tel que $B(x, 2\varepsilon_n) \subset \Omega$ pour tout $x \in \operatorname{supp}(\chi_n)$. On peut choisir ces ε_n de sorte que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n = (\chi_n T) * \rho_{\varepsilon_n}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\langle f_n, \phi\rangle = \langle \chi_n T, \widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \phi\rangle$$

Il existe un compact K de Ω et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \phi$ est à support dans K pour tout $n \geqslant N$. En outre pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha(\widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \phi) = \widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \partial^\alpha\phi$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\phi$. Ainsi,

$$\langle T, \widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \phi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \phi\rangle .$$

Quitte à prendre N plus grand, on peut supposer que $\chi_n = 1$ sur K pour tout $n \geqslant N$. On a alors

$$\langle f_n, \phi\rangle = \langle T, \chi_n(\widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \phi)\rangle = \langle T, \widecheck{\rho_{\varepsilon_n}} * \phi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \phi\rangle .$$

Cela signifie que f_n tend vers T au sens des distributions. □

4.5.4 Solution fondamentale d'une EDP

Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$. Cela signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et des constantes b_α pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leqslant m$ tels que

$$P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha \partial^\alpha.$$

L'adjoint formel de P est défini par

$$P^*\phi = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(b_\alpha\phi).$$

On considère l'équation

$$Pu = f, \tag{4.14}$$

où f est une fonction donnée et u est la fonction inconnue.

Définition 4.64. On dit d'une distribution G sur $\mathbb{R}^d$ que c'est une solution fondamentale de l'équation (4.14) si on a, au sens des distributions,

$$PG = \delta.$$

Cela signifie que pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle G, P^*\phi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = \phi(0).$$

La proposition suivante est alors une conséquence directe de la proposition 4.59, d'après laquelle on a $P(G * f) = (PG) * f$ pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.65. *On suppose que $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une solution fondamentale pour l'équation (4.14). Alors pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ la fonction $u = G * f$ est solution de (4.14) au sens des distributions.*

Exemple 4.66. On rappelle que $H' = \delta$, où H est la fonction de Heaviside. Or pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(H * f)(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy.$$

La proposition dit que $(H * f)' = f$. C'est bien le cas.

Exemple 4.67. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im}(z) > 0$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$-u'' - z^2 u = f.$$

Pour $z = i$, on a déjà évoqué cet exemple à la fin du chapitre sur la tranformée de Fourier. On a en particulier observé que ce problème se résoud simplement par la méthode de variation de la constante. On oberve tout de même que la solution particulière que l'on obtient, à savoir la fonction

$$u : x \mapsto -\int_{\mathbb{R}} e^{iz|x-y|} 2iz f(y)\, dt,$$

corresponding bien à ce qui est donné par la proposition 4.65, avec la fonction de Green G donnée par

$$G_z(x) = -\frac{e^{iz|x|}}{2iz}.$$

Exemple 4.68. On a vu à l'exemple 3.30 qu'en dimension $d \geqslant 3$ la solution élémentaire de l'equation de Poisson

$$-\Delta u = f. \tag{4.15}$$

est donné par

$$G(x) = \frac{1}{(d-2)\sigma(S^{d-1})\,|x|^{d-2}}.$$

En général, on cherche à résoudre des équations telles que (4.14) pour des seconds membres plus généraux que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sous certaines conditions, on peut définir le produit de convolution de deux distributions, ce qui permet d'énoncer la proposition 4.65 avec $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, ce qui inclut en particulier le cas où f est une fonction un peu générale. On définit par exemple au paragraphe suivant le produit de convolution de deux distributions dont une est à support compact.

Mais plutôt que de pousser plus loin la théorie générale, on donne des résultats pour certaines situations particulières qui vont inclure un certain nombre de cas modèles qui nous intéressent.

Proposition 4.69. *Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

On suppose que $G \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est une solution fondamentale pour (4.14). Alors pour $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ on a $u = G * f \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et, au sens des distributions, $Pu = f$.

Démonstration. Le fait que u est bien dans $L^r(\mathbb{R}^d)$ a été montré à la proposition 1.10. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (G * f)(x)(P^*\phi)(x)\,dx &= \int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\in\mathbb{R}^d} G(x-y)f(y)(P^*\phi)(x)\,dy\,dx\\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d} G(x-y)(P^*\phi)(x)\,dx\right)\,dy\\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d} G(x)(P^*\phi)(x+y)\,dx\right)\,dy\\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d} G(x)(P^*\phi_{-y})(x)\,dx\right)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\phi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Cela prouve que $P(G * f) = f$ au sens des distributions. □

Pour l'exemple 4.66 on a $H \in L^\infty(\mathbb{R})$, et le résultat est bien valable pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour l'exemple 4.67 on a $G \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$. On discute maintenant l'équation de Helmholtz en dimension 3.

Exemple 4.70. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$ on considère sur $\mathbb{R}^3$ l'équation

$$(-\Delta - z^2)u = f.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ on pose

$$G_z(x) = \frac{e^{iz|x|}}{4\pi\,|x|}.$$

Cela définit une fonction G_z qui appartient en particulier à $L^1(\mathbb{R}^3)$.

Sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ on a

$$(-\Delta - z^2)G_z = 0.$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Par la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} G_z(\Delta + z^2)\phi\,dx &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} G_z(\Delta + z^2)\phi\,dx\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon} G_z\,\partial_\nu\phi\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon}\partial_\nu G_z\,\phi\,dx.
\end{aligned}$$

On a

$$\int_{|x|=\varepsilon} G_z\,\partial_\nu\phi\,dx = \int_{|x|=\varepsilon}\frac{e^{iz\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\,\partial_\nu\phi\,dx = \mathcal{O}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

et

$$\int_{|x|=\varepsilon}\partial_\nu G_z\,\phi\,dx = \int_{|x|=\varepsilon}\frac{e^{iz\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2}(1 - iz\varepsilon)\,\phi\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \phi(0).$$

Cela prouve que $(-\Delta - z^2)G_z = \delta$ au sens des distributions. Ainsi, si pour $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ on pose

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi\,|x-y|} f(y)\,dy,$$

alors $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et au sens des distributions on a $(-\Delta - z^2)u = f$.

Exemple 4.71. Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$G(t,x) = H(t)\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Alors $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et au sens des distributions on a

$$(\partial_t - \partial_{xx})G = \delta.$$

En effet, pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ on a

$$\begin{aligned}\langle(\partial_t - \partial_{xx})G, \phi\rangle &= \langle G, (-\partial_t - \partial_{xx})\phi\rangle \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t=\varepsilon}^{+\infty} \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} (\partial_t + \partial_{xx})\phi(t,x)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\partial_t G(t,x) = \partial_{xx} G(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi}} \left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{4t^{\frac{5}{2}}} \right).$$

Ainsi, après intégrations par parties on obtient

$$\begin{aligned}\langle(\partial_t - \partial_{xx})G, \phi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \phi(\varepsilon, x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\eta\in\mathbb{R}} \frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt{\pi}} \phi(\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon}\eta)\,d\eta \\ &= \phi(0,0).\end{aligned}$$

Pour $t > 0$ la fonction $G(t) = G(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on peut voir G comme une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}_+^*$ dans $L^1(\mathbb{R})$. On considère maintenant une fonction f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telle que pour tout $t > 0$ la fonction $f(t) = f(t,\cdot)$ est dans $L^p(\mathbb{R})$ pour un certain $p \in [1, +\infty]$. On suppose que f est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $L^p(\mathbb{R})$, avec

$$\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}\,dt < +\infty.$$

On peut considérer la fonction u de $\mathbb{R}_+^*$ dans $L^p(\mathbb{R})$ définie par

$$u(t) = \int_{s=0}^t G(t-s) * f(s)\,ds.$$

Cela signifie que pour $t > 0$ la fonction $u(t) \in L^p(\mathbb{R})$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(t,x) = \int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}} G(t-s, x-y) f(s,y)\,dy\,ds. \tag{4.16}$$

On peut alors vérifier qu'au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = f.$$

On peut aller encore plus loin. Même si cela ne rentre pas dans le cadre qu'on a discuté jusqu'ici, on peut imaginer un terme source f concentré au temps $t = 0$. Formellement, on prend $f(t,x) = \delta(t)u_0(x)$, où $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$. Concrètement, on définit f comme étant la distribution

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \mapsto \int_{x\in\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0,x)\,dx.$$

Formellement, l'expression (4.16) devient

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)u_0(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)\,dy. \tag{4.17}$$

Et même si on n'a pas donné de résultat général incluant ce cas, on peut vérifier que la fonction u ainsi définie est bornée comme fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $L^p(\mathbb{R})$, elle vérifie au sens des distributions l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \partial_{xx}u = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

et elle vérifie la condition initiale $u(0) = u_0$ au sens où l'on a

$$\|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

4.5.5 Convolution de deux distributions dont l'une est à support compact

On définit maintenant le produit de convolution de deux distributions. Ce paragraphe peut être admis. On retiendra simplement que sous certaines conditions on peut définir le produit de convolution de deux distributions, et que ce produit de convolution vérifie les bonnes propriétés qu'on attend de lui (en particulier, la distribution de Dirac est bien une unité pour ce produit sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$).

Proposition-Définition 4.72. Soient T et S deux distributions sur $\mathbb{R}^d$, dont l'une au moins est à support compact. On note $T * S$ l'unique distribution sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (T*S)*\phi = T*(S*\phi).$$

Démonstration. L'unicité résulte du Corollaire 4.57. Pour l'existence on considère sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ la forme linéaire

$$L : \phi \mapsto (T*(S*(\mathcal{P}\phi)))(0).$$

Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $S*(\mathcal{P}\phi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et donc $T*(S*(\mathcal{P}\phi))$ est une fonction de classe C^∞, tandis que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors T définit une application linéaire de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, or $S*(\mathcal{P}\phi)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans tous les cas, $L(\phi)$ est bien défini.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Soit $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$ et T ou S est à support inclus dans $B(0,R)$.

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans K. Si S est à support dans $B(0,R)$ alors $S*\phi$ est à support dans $B(0,2R)$. Sinon T est à support dans $B(0,R)$. Dans tous les cas il existe $m_T \in \mathbb{N}$ et $C_T > 0$ ne dépendant que de T et R tels que

$$|L(\phi)| \leqslant C_T \sum_{|\alpha|\leqslant m_T} \sup_{|x|\leqslant 2R} |\partial^\alpha(S*(\mathcal{P}\phi))(x)| = C_T \sum_{|\alpha|\leqslant m_T} \sup_{|x|\leqslant 2R} |(S*\partial^\alpha(\mathcal{P}\phi))(x)|.$$

Or il existe $m_S \in \mathbb{N}$ et $C_S > 0$ tels que pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans $B(0,R)$ et $x \in B(0,2R)$ on a

$$|(S*\psi)(x)| = |\langle S, \psi(x-\cdot)\rangle| \leqslant C_S \sum_{|\beta|\leqslant m_S} \left\|\partial^\beta\psi\right\|_\infty.$$

Appliqué avec $\psi = \partial^\alpha \mathcal{P}\phi$ on obtient finalement

$$|L(\phi)| \leqslant C_T C_S \sum_{|\beta| \leqslant m_T + m_S} \left\| \partial^\beta \phi \right\|_\infty .$$

Cela prouve que l'application L est une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

Montrons que $L * \phi = T * (S * \phi)$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned}(L * \phi)(x) = \langle L, \tau_x \mathcal{P}\phi \rangle &= (T * (S * (\mathcal{P}\tau_x \mathcal{P}\phi)))(0) = (T * (S * (\tau_{-x}\phi)))(0)\\ &= (T * (\tau_{-x}(S * \phi)))(0) = (\tau_{-x}(T * (S * \phi)))(0)\\ &= (T * (S * \phi))(x).\end{aligned}$$

Ainsi $T * S$ est définie comme étant la distribution L. □

Exemples 4.73. — Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on a $T * \delta = \delta * T = T$.

— Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ou $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors on a $T * T_f = T_{T*f}$.

On montre maintenant la commutativité, le bon comportement de la dérivation et l'associativité pour ce produit de convolution.

Proposition 4.74. *Soient T et S deux distributions sur $\mathbb{R}^d$, dont une au moins est à support compact. Alors on a*

$$T * S = S * T.$$

Démonstration. D'après le Corollaire 4.57 il suffit de montrer que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$(T * S) * \phi = (S * T) * \phi.$$

Et pour cela il suffit de montrer que pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$((T * S) * \phi) * \psi = ((S * T) * \phi) * \psi.$$

Soient donc $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'après la proposition 4.61 (deux fois), la définition de $T * S$ et la commutativité du produit de convolution de fonctions on a

$$\begin{aligned}((T * S) * \phi) * \psi &= (T * S) * (\phi * \psi) = T * (S * (\phi * \psi))\\ &= T * ((S * \phi) * \psi) = T * (\psi * (S * \phi))\\ &= (T * \psi) * (S * \phi).\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}((S * T) * \phi) * \psi &= (S * T) * (\phi * \psi) = (S * T) * (\psi * \phi)\\ &= S * (T * (\psi * \phi)) = S * ((T * \psi) * \phi)\\ &= S * (\phi * (T * \psi)) = (S * \phi) * (T * \psi)\\ &= (T * \psi) * (S * \phi).\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.75. *Soient T et S deux distributions sur $\mathbb{R}^d$, dont une au moins est à support compact. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On a*

$$\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S).$$

Démonstration. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'après la Proposition 4.59 on a

$$(\partial^\alpha(T*S))*\phi = (T*S)*(\partial^\alpha\phi) = T*(S*(\partial^\alpha\phi)) = T*(\partial^\alpha(S*\phi)) = (\partial^\alpha T)*(S*\phi) = ((\partial^\alpha T)*S)*\phi$$

et

$$(\partial^\alpha(T*S))*\phi = T*(S*(\partial^\alpha\phi)) = T*((\partial^\alpha S)*\phi)) = (T*(\partial^\alpha S))*\phi.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.76. *Soient T, R et S des distributions sur $\mathbb{R}^d$, dont deux au moins sont à supports compacts. Alors on a*

$$(T*S)*R = T*(S*R).$$

Démonstration. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned}((T*S)*R)*\phi &= (T*S)*(R*\phi) = T*(S*(R*\phi)) = T*((S*R)*\phi)\\ &= (T*(S*R))*\phi.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

4.6 Transformée de Fourier

4.6.1 Distributions tempérées

La transformée de Fourier a été définie naturellement sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, puis sa restriction à $L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ (ou à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) a été étendue en une application sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On souhaite maintenant étendre la transformée de Fourier aux distributions.

La plupart des opérations usuelles sur les fonctions (dérivation, multiplication par une fonction régulière, etc.) sont étendues aux distributions en reportant l'opération en question sur la fonction test à laquelle on applique la distribution. Il est raisonnable de vouloir procéder de la même façon pour la transformation de Fourier.

On note que dans la section 2.4 on a choisi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ plutôt que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ comme espace de confort pour pouvoir à volonté dériver et multiplier par des fonctions polynomiales. La raison est la Proposition 2.18 qui montre que l'espace de Schwartz se comporte très bien vis-à-vis de la transformée de Fourier. Ce n'est pas le cas de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui n'est même pas stable par la transformée de Fourier. Pire, on peut vérifier que la seule fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est la fonction nulle (pour $d = 1$, la transformée de Fourier de ϕ s'étend une fonction entière dont la restriction à $\mathbb{R}$ ne peut pas être à support compact à moins d'être nulle). On note tout de même que comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est toujours dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi, la transformée de Fourier $\mathcal{F}\phi$ d'une fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est en général pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on ne peut donc pas lui appliquer une distribution. Pour généraliser la transformation de Fourier aux distributions, il va donc falloir… changer la définition d'une distribution. Ainsi on ne va pas étendre la transformée de Fourier aux formes linéaires continues sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, mais aux formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Le but de ce paragraphe est donc d'introduire les formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, que l'on appelera distributions tempérées. Pour cela, il faut d'abord décrire la topologie naturelle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

C'est un autre avantage des distributions tempérées par rapport aux distributions usuelles, la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est plus simple à décrire que celle de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on pose

$$\mathcal{N}_k(\phi) = \sup_{|\alpha|,|\beta| \leqslant k} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi \right\|_\infty .$$

On observe que cela définit une norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, mais une norme pour laquelle $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas complet. Comme on l'avait fait pour $C_K^\infty(\Omega)$, on définit sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ une topologie associée à toutes ces normes en même temps. Elle est donnée par la distance définie pour $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$d_{\mathcal{S}}(\phi, \psi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\big(1, \mathcal{N}_k(\phi - \psi)\big).$$

Proposition 4.77. *$d_{\mathcal{S}}$ est une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet pour cette distance.*

Proposition 4.78. (i) *Soient $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors ϕ_n tend vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{N}_k(\phi_n - \phi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

(ii) *Une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$|T(\phi)| \leqslant C \mathcal{N}_k(\phi).$$

Plus généralement, si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé, alors une application linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to E$ est continue si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|T(\phi)\|_E \leqslant C \mathcal{N}_k(\phi).$$

(iii) *Une application linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continue si pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\mathcal{N}_j(T(\phi)) \leqslant C \mathcal{N}_k(\phi).$$

Maintenant que l'on a défini la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut lister un certain nombre de propriétés utiles.

Proposition 4.79. (i) *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. L'application $\phi \mapsto x^\alpha \phi$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Plus généralement, si f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ dont toutes les dérivées sont à croissance lente (voir la Définition 2.3), alors la multiplication par f est une application continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. L'application $\phi \mapsto \partial^\alpha \phi$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*

(iii) *Soit $p \in [1, +\infty]$. L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue.*

(iv) *La transformée de Fourier et sa réciproque sont des fonctions continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Les deux premières propriétés sont laissées en exercices.

Démonstration. • Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\|\phi\|_\infty = \mathcal{N}_0(\phi)$, donc l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est bien continue. On considère maintenant $p \in [1, +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $kp > d$. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|\phi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{-kp}(1+|x|)^{kp} |\phi(x)|^p \, dx \leqslant C\mathcal{N}_k(\phi)^p$$

avec

$$C = 2^k \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|)^{kp}} \, dx < +\infty.$$

Cela prouve que l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue.

• Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. D'après les Propositions 2.18 et 2.11 on a pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \widehat{\partial^\alpha x^\beta \phi}(\xi) \right| \leqslant \left\| \partial^\alpha x^\beta \phi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Puisque la multiplication par x^β, la dérivation ∂^α et l'inclusion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ sont toutes des applications continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ indépendants de ϕ tels que

$$\left\| \partial^\alpha x^\beta \phi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\mathcal{N}_k(\phi).$$

Cela prouve que la transformée de Fourier est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Proposition 4.80. (i) *$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *L'inclusion de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue.*

Démonstration. • Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ à support dans $B(0,2)$ et égale à 1 sur $B(0,1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\chi_n \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. D'après la formule de Leibniz on a

$$\partial^\beta\big((1-\chi_n)\phi\big) = \sum_{\tilde{\beta} \leqslant \beta} \binom{\beta}{\tilde{\beta}} \partial^{\beta - \tilde{\beta}}(1-\chi_n)\partial^{\tilde{\beta}}\phi.$$

Puisque $\partial^{\beta-\tilde{\beta}}(1-\chi_n)$ est à support hors de $B(n)$ on a

$$\left\| x^\alpha \partial^{\beta-\tilde{\beta}}(1-\chi_n)\partial^{\tilde{\beta}}\phi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left\| |x|^{-(d+1)} \partial^{\beta-\tilde{\beta}}(1-\chi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \mathcal{N}_{|\alpha|+d+1+|\beta|}(\phi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où

$$\left\| x^\alpha \partial^\beta(\phi - \chi_n\phi) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_k(\phi - \chi_n\phi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi la suite $(\chi_n\phi)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qui prouve le premier point.

• On considère maintenant une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ϕ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il existe alors un compact K de $\mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que ϕ_n est à support dans K pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\partial^\alpha\phi_n$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\phi$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$. Cela assure bien que ϕ_n converge vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qui donne la seconde propriété. □

Maintenant que la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est bien comprise, on peut commencer l'étude des formes linéaires continues.

Définition 4.81. On appelle distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est continuement inclus et dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a le lien suivant avec les distributions usuelles.

Proposition 4.82. (i) *Par restriction, une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ induit une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a donc $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leqslant C\mathcal{N}_k(\phi).$$

Alors T se prolonge de manière unique en une distribution tempérée.

Exemples 4.83. — Les distributions à supports compacts (comme par exemple une distribution de Dirac en un point) s'étendent en des distributions tempérées.
— Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $T_f : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\phi$ est une distribution tempérée.
— Si f est mesurable et à croissance lente sur $\mathbb{R}^d$ alors T_f est une distribution tempérée.
— La fonction e^x définit une distribution sur $\mathbb{R}$ mais pas une distribution tempérée.

Les opérations de base sur les distributions tempérées sont les mêmes que pour les distributions usuelles.

Proposition-Définition 4.84. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(i) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On définit la distribution tempérée $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle .$$

(ii) Soit f une fonction C^∞ dont toutes les dérivées sont à croissance lente. On définit alors la distribution tempérée fT par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle fT, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle .$$

(iii) Soit $y \in \mathbb{R}^d$. On définit la distribution tempérée $\tau_y T$ par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \tau_y T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-y} \phi \rangle .$$

Remarque 4.85. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Par restriction, T définit une distribution $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathbb{R}^d$, et sa dérivée $\partial^\alpha \tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ s'étend en une distribution tempérée. Cette extension est exactement la distribution tempérée $\partial^\alpha T$ que l'on vient de définir.

Définition 4.86. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions tempérées. On dit que T_n tend vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T_n, \phi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \phi \rangle .$$

4.6.2 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Maintenant que l'on a introduit les distributions tempérées nous pouvons, comme annoncé, définir la transformée de Fourier d'une telle distribution. Comme pour les autres opérations, la définition pour les distributions doit généraliser celles déjà données pour les fonctions. De même que l'on s'est appuyé sur la formule d'intégration par parties pour définir la dérivée d'une distribution, on se base ici sur le corollaire 2.22.

Proposition-Définition 4.87. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors l'application $\hat{T}$ définie par

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$, appelée transformée de Fourier de T. On peut également la noter $\mathcal{F}T$.

Par définition, on a bien

$$\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle = \left\langle T_{\hat{f}}, \phi \right\rangle$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. C'est également le cas pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ d'après la remarque 2.24, et il est facile de voir que cela vaut aussi pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, en utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou en observant directement que le calcul donnant le corollaire 2.22 est encore valable directement pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

On donne maintenant un exemple usuel de transformée de Fourier pour une distribution qui n'est pas une fonction.

Exemple 4.88. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle \delta, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx,$$

donc

$$\hat{\delta} = 1.$$

Inversement, par la formule d'inversion de la transformée de Fourier on a

$$\langle 1, \hat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^d \phi(0),$$

donc

$$\hat{1} = (2\pi)^d \delta.$$

On conclut maintenant ce chapitre en étendant aux distributions quelques propriétés usuelles de la transformée de Fourier.

Proposition 4.89. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On note e_a la fonction*[3] $y \mapsto e^{-iy\cdot a} = e^{-ia\cdot y}$*. On a*

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e_a \mathcal{F}T$$

et

$$\mathcal{F}(e_{-a} T) = \tau_a \mathcal{F}T.$$

3. On donne les deux expressions pour insister sur le fait que a et y pourront chacun jouer les rôles de x et de ξ, si on se réfère aux notations de la Proposition 2.12.(iii).

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. D'après la Proposition 2.12.(iii) on a $\mathcal{F}(\tau_a \phi) = e_a \mathcal{F}\phi$ et $\mathcal{F}(e_{-a}\phi) = \tau_a \mathcal{F}\phi$. On voit que cela se transpose effectivement aux distributions en écrivant

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a T), \phi \rangle = \langle \tau_a T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(e_a\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, e_a\phi \rangle = \langle e_a \mathcal{F}T, \phi \rangle$$

et

$$\langle \mathcal{F}(e_{-a}T), \phi \rangle = \langle e_{-a}T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, e_{-a}\mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\tau_{-a}\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, \tau_{-a}\phi \rangle = \langle \tau_a \mathcal{F}T, \phi \rangle .$$

□

On étend maintenant aux distributions les résultats des Propositions 2.16 et 2.17.

Proposition 4.90. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors on a*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T)$$

et

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) = (i\partial)^\alpha \mathcal{F}(T).$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. D'après les Propositions 2.16 et 2.17 on a [4]

$$\langle \mathcal{F}(\partial^\alpha T), \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \mathcal{F}\phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}((-iy)^\alpha \phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, (iy)^\alpha \phi \rangle = \langle (iy)^\alpha T, \mathcal{F}\phi \rangle$$

et

$$\langle \mathcal{F}(y^\alpha T), \phi \rangle = \langle T, y^\alpha \mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}((-i\partial)^\alpha \phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, (-i\partial)^\alpha \phi \rangle = \langle (i\partial)^\alpha \mathcal{F}T, \phi \rangle ,$$

ce qui donne les résultats annoncés. □

On généralise maintenant la formule d'inversion de la Proposition 2.14. On rappelle qu'on avait défini sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'opérateur $\overline{\mathcal{F}}$, analogue à la transformée de Fourier. Cette définition peut s'étendre à une distributions tempérée T par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \left\langle \overline{\mathcal{F}}T, \phi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}}\phi \right\rangle .$$

L'opérateur $\mathcal{P}$ peut également être étendu aux distributions tempérées par la définition

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \mathcal{P}T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{P}\phi \rangle .$$

Les égalités (2.6) sont alors encore valables pour une distributions tempérée.

Proposition 4.91. *Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$T = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{P}\mathcal{F}\mathcal{F}T = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{P}T = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T.$$

Le résultat suivant donne un analogue pour les distributions à supports compacts de l'expression (2.4).

Proposition 4.92. *Soit T une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^d$. Alors $\mathcal{F}T$ est (la distribution associée à) une fonction C^∞ dont toutes les dérivées sont à croissance lente, et pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\hat{T}(\xi) = \langle T, e_\xi \rangle .$$

4. Partout on note y la variable muette, elle peut jouer à la fois le rôle des variables x ou ξ utilisées habituellement.

Démonstration. • Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ on note $f(\xi) = \langle T, e_\xi \rangle$. D'après le théorème de dérivation sous le crochet, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\partial^\alpha f(\xi) = \langle T, (-ix)^\alpha e_\xi \rangle .$$

• Soit K un voisinage compact du support de T. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\partial^\alpha f(\xi)| \leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant m} \sup_{x \in K} \left| \partial_x^\beta (x^\alpha e^{-ix\cdot\xi}) \right| .$$

Ainsi il existe $\tilde{C} > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$|\partial^\alpha f(\xi)| \leqslant \tilde{C}(1 + |\xi|^m).$$

Cela prouve que les dérivées de f sont à croissance lente.
• Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit P un pavé compact de $\mathbb{R}^d$ contenant le support de ϕ. Par le théorème d'intégration sous le crochet on a

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_P \langle T, e_y \rangle \, \phi(y) \, dy = \left\langle T, \int_P \phi(y) e_y \, dy \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle ,$$

et donc $\mathcal{F}T = T_f$. □

Si T et S sont deux distributions à supports compacts, on a défini le produit de convolution $T * S$, et le produit $\hat{T}\hat{G}$ a bien un sens puisque $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont de simples fonctions régulières. Dans ce cas on peut généraliser la proposition 2.13.

Proposition 4.93. *Soient $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors on a*

$$\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T) \, \mathcal{F}(S).$$

Démonstration. Les transformées de Fourier $\mathcal{F}T$, $\mathcal{F}S$ et $\mathcal{F}(T * S)$ sont des fonctions et pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\mathcal{F}(T*S)(\xi) = \langle T * S, e_\xi \rangle = ((T*S)*(\mathcal{P}e_\xi))(0) = (T*(S*(\mathcal{P}e_\xi)))(0) = \langle T, \mathcal{P}(S * (\mathcal{P}e_\xi)) \rangle .$$

Or pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$(S * (\mathcal{P}e_\xi))(-x) = \langle S, (\mathcal{P}e_\xi)(-x - \cdot) \rangle = \langle S, e_\xi(x + \cdot) \rangle = \hat{S}(\xi) e^{-ix\cdot\xi},$$

donc

$$\mathcal{F}(T * S)(\xi) = \left\langle T, \hat{S}(\xi) e_\xi \right\rangle = (\mathcal{F}T)(\xi)(\mathcal{F}S)(\xi).$$

□